BAB II

Deret Fourier

Telah disinggung pada Bab I bahwa fungsi yang bersifat periodik dapat dijabarkan ke dalam deret Fourier, oleh karenanya disini akan didefinisikan beberapa terminologi yang berkaitan dengan deret Fourier.

II.1. Fungsi Periodik

Suatu fungsi $f(x)$ mempunyai periode p atau disebut fungsi periodik dengan periode p jika memenuhi syarat :

$$f(x) = f(x + np)$$

untuk semua x, dimana n = 1, 2, 3, 4, ... dan p merupakan konstanta yang positip, harga terkecil $p>0$ disebut periode terkecil atau tersederhana dari $f(x)$.

contoh :

1. fungsi sin x mempunyai periode 2π, 4π, 6π, ...

   oleh karena memenuhi :

   $$\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) = \sin(x+6\pi) = \ldots\ldots\ldots = \sin(x+p)$$

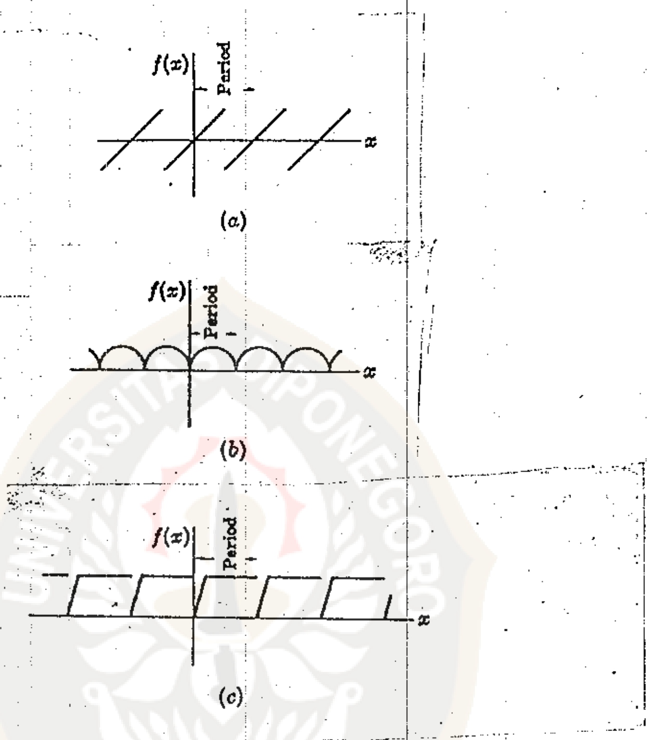
   $p = 2\pi$ adalah periode terkecil atau periode dari sin x.

2. Periode dari sin nx atau cos nx untuk n bulat positip adalah $2\pi/n$.

3. Periode dari tg x adalah π.

4. Contoh-contoh lainnya dari fungsi-fungsi periodik

dinyatakan pada gambar dibawah ini :



gambar : II-1.

Contoh gambar fungsi periodik

II.2. Definisi fungsi ganjil dan fungsi genap

1. Suatu fungsi f(x) disebut fungsi ganjil didalam selang (interval) [a,b] jika :

$$f(-x) = -f(x)$$

untuk semua harga $x \in [a,b]$.

contoh :

1. x^3
2. x^5-3x^3+2x
3. $\sin x$
4. $\text{tg } 3x$

2. suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi genap didalam selang $[a,b]$ jika :

$$f(-x) = f(x)$$

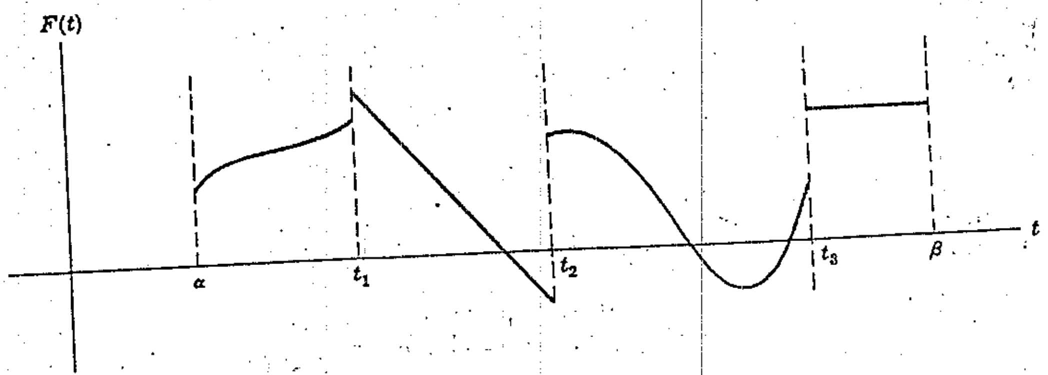
untuk semua harga $x \in [a,b]$.

contoh :

1. x^2
2. $2x^6-4x^4+5x^2-6$
3. $\cos x$
4. e^x+e^{-x}

II. 3. Fungsi kontiniu bagian demi bagian (Piecewise continuous function).

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan kontiniu bagian demi bagian didalam suatu selang $\alpha \leq t \leq \beta$, bila selang ini dapat dibagi-bagi lagi ke dalam sejumlah berhingga selang, dimana dalam setiap selang ini fungsinya kontiniu dan memiliki limit-limit kanan dan kiri yang berhingga.



gambar : II-2.

fungsi kontiniu bagian demi bagian

contoh dari suatu fungsi yang kontiniu bagian demi bagian diperlihatkan secara grafik dalam gambar : II-2. Fungsi ini memiliki titik diskontinuitas pada t_1, t_2, t_3.

II.4. Definisi dari deret Fourier.

Misalkan f(x) terdefinisi didalam selang (-L, L) dan diasumsikan f(x) = f(x+2L) untuk setiap x diluar selang (-L, L) atau dengan perkataan lain f(x) berperiode 2L diluar selang tersebut. Sedangkan suatu deret fungsi dengan bentuk :

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi x}{L} + a_2\cos\frac{2\pi x}{L} + a_3\cos\frac{3\pi x}{L} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ b_1\sin\frac{\pi x}{L} + b_2\sin\frac{2\pi x}{L} + b_3\sin\frac{3\pi x}{L} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

atau

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.1)$$

disebut deret trigonometri (trigonometric series). Konstanta-konstanta a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, 3 ......) disebut koeffisien-koeffisien dari deret trigonometri.

Bila deret pada persamaan (2.1) konvergen, maka jumlah deret merupakan suatu fungsi f(x) yang periodik dengan periode 2L. Oleh karena $\sin\frac{n\pi x}{L}$ dan $\cos\frac{n\pi x}{L}$ merupakan fungsi yang periodik dengan periode 2L. Maka fungsi f(x) = f(x+2L) dapat dinyatakan sebagai deret trigonometrik yang konvergen dalam selang dengan panjang 2L, yaitu :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2.2)$$

untuk menentukan rumus koeffisien-koeffisien :

a_0, a_n dan b_n dalam bentuk persamaan (2.2), dapat menggunakan integral-integral tertentu (definite integral) seperti dibawah ini :

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{k\pi x}{L}dx = \int_{-L}^{L} \cos\frac{k\pi x}{L}dx = 0$$

jika k = 1, 2, 3, ...

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0 \quad \text{dimana} \begin{cases} m = 1, 2, 3 \ldots \\ n = 1, 2, 3 \ldots \end{cases}$$

Kemudian dijabarkan dan akhirnya didapat :

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}dx \end{aligned}\right\} \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots \quad \ldots\ldots (2.3)$$

jika f(x) mempunyai periode 2L, koeffisien-koeffisien a_n dan b_n dapat ditentukan secara ekivalen dari :

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \end{aligned}\right\} n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ \ldots \quad (2.4)$$

dimana c bilangan riel sembarang. Dalam keadaan khusus, $c = -L$, maka persamaan (2.4) akan berubah menjadi persamaan (2.3).

Catatan :

Untuk $n = 0$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

bila $L = \pi$, deret pada persamaan (2.1) dan koeffisien-koeffisiennya menjadi :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Koeffisien-koeffisien yang dinyatakan oleh persamaan (2.3) maupun (2.4) disebut koeffisien Fourier (Fourier Coeffisients) dari fungsi f(x) atau Euler-Fourier Formula.

Deret trigonometri persamaan (2.1) dengan koeffisien-koeffisien tersebut di atas, disebut Deret

Fourier dari fungsi $f(x)$.

II.5. Syarat-syarat Dirichlet

Andaikan bahwa :

1. $f(x)$ terdefinisi dan berharga tunggal, kecuali diberhingga banyak titik dalam selang $(-L, L)$.
2. $f(x)$ periodik dengan periode $2L$.
3. $f(x)$ dan $f'(x)$ kontiniu bagian demi bagian didalam selang $(-L, L)$.

Maka deret :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right)$$

dengan koeffisien-koeffisien :

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}\right\} n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

konvergen ke :

(i). $f(x)$, bila x titik kontiniuitet (point of continuity).

(ii). $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, bila x adalah titik diskontinuitet.

catatan :

$f(x+0)$ dan $f(x-0)$ adalah limit kanan dan limit kiri dari $f(x)$ di titik x, kadang-kadang ditulis dalam bentuk :

$$\lim_{\epsilon \to 0} f(x+\epsilon) \text{ dan } \lim_{\epsilon \to 0} f(x-\epsilon).$$

II.6. Deret Fourier untuk fungsi ganjil dan genap.

1. Fungsi ganjil

Bila f(x) suatu fungsi ganjil, maka $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap harga x dan

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

Arti dalam geometri (ilmu ukur) yaitu grafik dari f(x) letaknya simetris terhadap titik O (pusat sumbu koordinat). Sekarang ditentukan koeffisien-koeffisien dari deret Fourier untuk fungsi ganjil.

Bila dalam pernyataan umum dimuka diambil $c = -L$, maka mendapat :

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$+ \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

dengan mengambil substitusi :

$x = -u$ dan $dx = -du$

Kita mendapatkan :

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(-u)\cos\frac{n\pi(-u)}{L}\,du$$

$$+ \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

dengan cara yang sama, kita dapat menjabarkan :

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

dalam suku pertama bagian kanan, diambil substitusi :

$x = -u$ dan $dx = -du$

batas-batas integrasi, untuk :

$x = -L \dashrightarrow u = L$

$x = 0 \dashrightarrow u = 0$

Maka terdapat :

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(-u) \sin\frac{n\pi(-u)}{L}du + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Teorema-teorema :

Bila $f(x)$ adalah fungsi ganjil yang periodik, maka koeffisien-koeffisien dalam deret Fourier dari $f(x)$ dinyatakan oleh rumus :

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

atau :

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

jika periode f(x) adalah 2π.

Jadi deret Fourier untuk fungsi ganjil adalah :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

atau

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

jika periode f(x) adalah 2π.

Oleh karena deret hanya memuat suku-suku sinus saja, maka disebut Deret Sinus Fourier (Fourier Sine Series) atau half range sine expansions.

2. Fungsi genap

Bila f(x) suatu fungsi genap, maka f(-x) = f(x) untuk setiap harga x dan

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 2\int_0^{L} f(x)\, dx$$

Arti dalam geometri grafik dari f(x) letaknya hanya simetris terhadap sumbu tegak. Selanjutnya ditentukan koeffisien-koeffisien dari deret Fourier untuk fungsi genap. Diambil c = -L dalam pernyataan umum dari a_n dan b_n dimuka, maka :

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$+ \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

dalam suku pertama bagian kanan, diambil substitusi :

$$x = -u \quad \text{---->} \quad dx = -du$$

batas-batas untuk integrasi :

$$x = -L \quad \text{---->} \quad u = L$$

$$x = 0 \quad \text{---->} \quad u = 0$$

maka terdapat :

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(-u)\cos\frac{n\pi(-u)}{L}du$$

$$+ \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

oleh karena integral di atas menghasilkan harga yang sama, maka :

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

dengan substitusi :

$$x = -u \quad \text{dan} \quad dx = -du$$

maka terdapat :

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(-u)\sin\frac{n\pi(-u)}{L}d(-u)$$

$$+ \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= -\frac{1}{L}\int_0^L f(u)\ \sin\frac{n\pi(u)}{L}du$$

$$+ \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= 0$$

Teorema-teorema :

Bila f(x) adalah fungsi genap yang periodik, maka koeffisien-koeffisien dalam deret Fourier dari f(x) dinyatakan oleh rumus-rumus :

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\ dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\ \cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

dan

$$b_n = 0$$

atau

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\ \cos nx\ dx$$

dan

$$b_n = 0$$

jika periode f(x) adalah 2π.

Jadi deret Fourier untuk fungsi genap adalah :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

atau :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

jika periode f(x) adalah 2π.

Oleh karena deret hanya memuat suku-suku cosinus saja, maka disebut Deret Cosinus Fourier (Fourier Cosine Series) atau half range cosine expansions.

II.7. Identitas Parseval

Bila f(x) memenuhi syarat-syarat Direchlet, maka :

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \{f(x)\}^2\, dx = \frac{a_0^{\,2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\,2} + b_n^{\,2})$$

disini a_n dan b_n adalah foeffisien-Koeffisien Fourier dari f(x).

Catatan :

Identitas Parseval dapat diterapkan untuk menghitung jumlah deret yang konvergen.