Bab VII

Peranan matematika didalam teknologi

Matematika adalah ilmu dasar dari berbagai macam disiplin ilmu, maka penelitian didalam matematika adalah penelitian dasar. Setelah penelitian dasar dilakukan oleh para ahli dimasing-masing bidang, tentunya akan disusul dengan penelitian terhadap terapannya oleh para ahli teknik. Namun biasanya dibutuhkan waktu yang cukup panjang. Bahkan pada umumnya justru yang mencetuskan sesuatu hasil dari penelitian dasar, tak dapat menikmati penerapan-penerapan dari hasil penelitiannya.

Bagi J.B.J. Fourier yang berhasil menjabarkan deret, masih dapat menikmati sebagian kecil dari hasil jerih payahnya. Namun penerapan yang lebih luas juga tidak nampak pada dirinya.

Kemajuan bidang teknologi yang sangat pesat sejak beberapa dasa warsa ini, mengikut sertakan berbagai ilmu dasar terlibat pada penerapannya, terutama ilmu dasar dibidang fisika, kimia, biologi maupun matematika.

Khususnya dibidang matematika sangat dominan sekali, hal tersebut disebabkan setiap disiplin ilmu apa saja tak dapat berjalan sendiri tanpa matematika, lagi pula setiap melakukan penelitian, tentunya perlu mencari keteraturan dari hal-hal yang akan diteliti. Matematika adalah suatu alat untuk mencari keteraturan yang terdapat pada segala sesuatu masalah, kemudian keteraturan tersebut dinyatakan dalam bentuk simbol dan dioperasikan serta dikembangkan pada masalah tersebut. Oleh karenanya setiap penelitian apapun harus berlandaskan pada ilmu matematika, terutama dibidang teknologi yang kian menanjak pada akhir-akhir ini, terlebih setelah dikombinasikan dengan sistem komputerisasi.

Komputerisasi dasarnya adalah matematika, bahkan 20 tahun terakhir ini, sistem transformasi Fourier Cepat (FFT) dan convolusi menggantikan transformasi Fourier Diskrite (DFT), sehingga kemampuan komputer dapat ditingkatkan. Maka nampak jelas sekali peranan matematika didalam teknologi sangat dominan.

Namun telah dikemukakan didepan, bahwa kemajuan bidang teknologi adalah mengikut sertakan berbagai macam ilmu dasar, matematika dapat sangat berperan didalam teknologi juga berkat dukungan terapan ilmu dasar lainnya, hal tersebut jelas tak dapat diabaikan. Sebagai contoh :

Berhasilnya penerapan ilmu dasar fisika dan kimia, dapat menciptakan komponen-komponen elektronika yang bentuk fisiknya kecil, ringan dan berkapasitas tinggi, sehingga mudah diselipkan atau diikutsertakan kedalam suatu rangkaian peralataan untuk dibawa kemana saja, berarti matematika juga terbawa ke era baru pada penerapan teknologi canggih.

Dibawah ini akan dikemukakan beberapa fungsi matematika yang sangat dominan pada penerapan teknologi.

VII.1. Penerapan fungsi impulse

Telah diuraikan pada bab sebelumnya bahwa fungsi impulse didefinisikan sebagai fungsi yang mempunyai sifat :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial(x)\ dx = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.1)$$

$$\partial(x) = 0 \text{ untuk } x \neq 0$$

$$\partial(x) = \infty \text{ untuk } x = 0$$

atau bila $\epsilon > 0$ dan $\epsilon \longrightarrow 0$

maka :

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \partial(x)\ dx = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.2)$$

didalam penerapan pada teknologi maupun ilmiah (scient), fungsi ∂ adalah fungsi sampling, oleh karena bila fungsi tersebut ditransformasi Fourier, distribusinya pada domain frekwensi sangat lebar sekali dan fungsi tersebut akan nampak sangat penting, bila dioperasikan pada suatu pemetaan (sistem). sistem tersebut linier, hasil dari pemetaan tersebut akan merupakan basis dari convolusi. Untuk lebih jelasnya , ada baiknya bila pemetaan (sistem) dibicarakan terlebih dahulu.

Dalam matematika, suatu pemetaan didefinisikan sebagai hubungan satu per satu dari himpunan asal M (dapat juga disebut pemasukan) dengan himpunan hasil K (dapat juga disebut keluaran), sering juga ditulis secara simbolik sebagai berikut :

$$f : M \longrightarrow K$$

atau :

$$M \xrightarrow{f} K$$

namun pada bidang fisika, kimia dan teknik lainnya, dinyatakan sebagai :

$$M \dashrightarrow \boxed{\text{sistem}} \dashrightarrow K$$

ini berarti jika masukan M, maka keluarnya adalah K.

Pada kenyataannya, sistem bisa berupa suatu penguat radio, suatu mikrofon, suatu mesin, alam semesta atau suatu instrument kimia dan lain sebagainya, yang jelas cara kerjanya adalah teratur, bersifat time invarian dan linier.

Bila suatu sistem S yang bersifat linier, seperti yang diilustrasikan pada gambar dibawah ini :

$$M_1 \dashrightarrow \boxed{S} \dashrightarrow K_1$$

$$M_2 \dashrightarrow \boxed{S} \dashrightarrow K_2$$

$$M_1 + M_2 \dashrightarrow \boxed{S} \dashrightarrow K_1 + K_2$$

Andaikan pada sistem diatas dimasukkannya fungsi fungsi $\partial(t)$ dan hasil keluarnya adalah $h(t)$, akan timbul pertanyaan, apa yang akan terjadi bila sistem ini diberi pemasukan $f(t)$? Matematika menjawab terlebih dahulu bahwa keluarnya adalah convolusi $f(t)$ dan $h(t)$, jadi secara simbol ditulis sebagai :

M(t)   K(t)

$\partial(t)$ ---> | sistem linier | ---> $h(t)$

$f(t)$ ---> | sistem linier | ---> $f(t) * h(t)$

jadi :

$$K(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

dimana $h(t)$ adalah tanggapan dari fungsi impulse pada sistem linier di atas. Didalam praktek, dapat dianalogkan sebagai berikut :

Masuk $\partial(t)$
fungsi impulse

↓

| Sistem linier |

↓

Keluar $h(t)$
tanggapan dari impulse $\partial(t)$

sedangkan :

Masuk $f(t)$ sembarang fungsi

↓

Sistem linier

↓

keluar tanggapan dari $f(t)$ adalah $f(t) * h(t)$

Dengan demikian, segala fungsi yang dimasukkan ke dalam sistem linier tersebut, akan terlebih dahulu diketahui hasil yang akan dikeluarkan oleh definisi convolusi berdasarkan penjajakan fungsi impulse.

Sebagai illustrasi, didalam kehidupan sehari-hari, suatu pipa baja yang dipergunakan sebagai bahan pada kerangka sepeda, untuk mengetahui kwalitas pipa tersebut baik atau jelek, biasanya pada pipa itu cukup diberi suatu ketokan (impulse), kemudian hasil ketokan tersebut didengarkan, lalu langsung dapat disimpulkan baja itu baik atau jelek.

Akan timbul pertanyaan bahwa pengetesan tanpa mempergunakan peralatan/instrumen apapun juga, sebenarnya bagaimana kejadiannya/prosedurnya?

Sebetulnya ketokan adalah memberikan impulse $\partial(t)$ pada baja itu, dan hasil dari pemberian impulse $\partial(t)$ adalah $h(t)$. Kemudian $h(t)$ masuk ke dalam otak melalui pendengaran, berdasarkan pengalaman yang dimiliki oleh si pengetok, otaknya mengadakan convolusi, dari hasil convolusi ini disimpulkan bahwa pipa itu memang baik.

Demikianlah dengan contoh yang sederhana ini, nampak pentingnya fungsi impulse ∂(t) didalam ilmiah maupun teknologi, sehingga terhadap segala sistem linier, karakteristiknya terdefinisi oleh hasil dari pemasukan fungsi impulse ∂(t) di-convolusi-kan dengan fungsi pemasukkan yang lain.

VII. 2. Penerapan convolusi

Salah satu penerapan dari convolusi yang paling sering dijumpai adalah "filter". Filter dapat diidentikkan dengan saringan, yaitu suatu alat yang berfungsi untuk menyaring data pemasukan, sedemikian hingga diperoleh hasil keluar yang tertentu.

Seperti yang telah dibicarakan pada bab VI, 2 fungsi h(t) dan g(t) yang di-convolusi-kan, bila ditransformasi Fourier, maka hasil transformasinya adalah perkalian dari hasil transformasi masing-masing fungsi, untuk lebih jelasnya, ditampakkan sebagai berikut :

$$\text{Bila } h(t) \longleftrightarrow H(f)$$

$$f(t) \longleftrightarrow F(f)$$

maka sesuai dengan persamaan (6.7), hasil transformasi Fourier dari kedua fungsi yang di-convolusi-kan adalah :

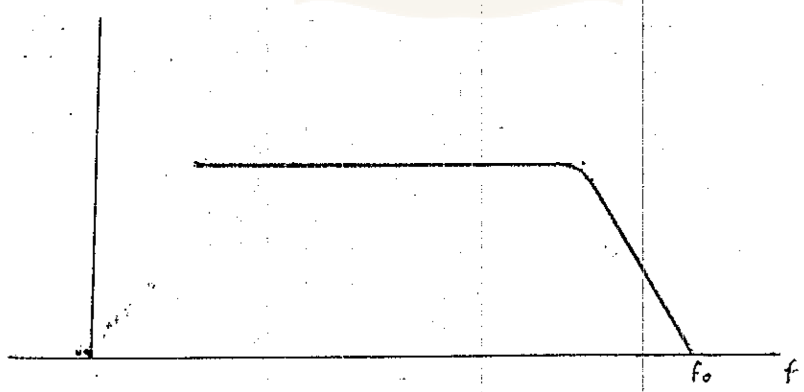
$$f(t) * g(t) \longleftrightarrow F(f)\ H(f) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.4)$$

Persamaan ini menyatakan bahwa 2 fungsi frekwensi yang melakukan perkalian, salah satu diantaranya adalah pemasukan (input) dan dikalikan yang lain adalah "window", bentuk fisis dari perkalian ini adalah filter yang telah dibicarakan didepan.

Beberapa jenis filter yang sering kali digunakan adalah :

1. Filter "lowpass"

Filter "lowpass" adalah suatu filter yang dapat melewatkan sinyal-sinyal/data dengan frekwensi dibawah suatu frekwensi tertentu, sedangkan frekwensi yang lebih tinggi dari ketentuan tersebut diredam. Dari karakteristik tersebut, dapat dilihat pada gambar : VII-1. Frekwensi yang dapat melalui filter adalah untuk $f < f_0$, sedangkan frekwensi lainnya diredam. Bila transformasi Fourier dari convolusi, "half window" adalah garfik dapa gambar : VII-1. Dimana frekwensi yang dilepas dari filter adalah hasil perkalian "half window" dan frekwensi pemasukkan, hasil perkaliannya terdapat pada daerah yang frekwensinya rendah.

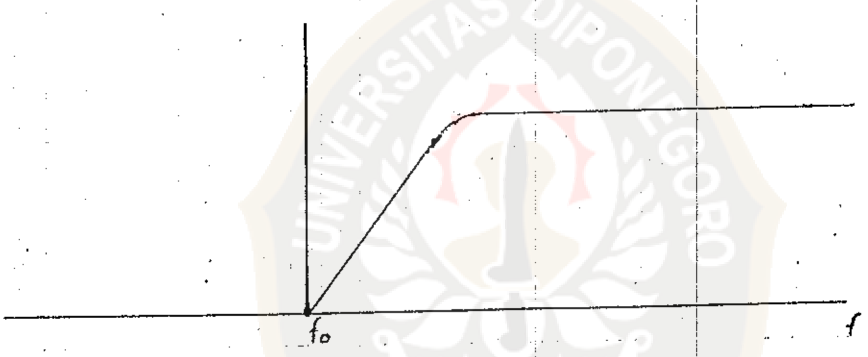


Gambar : VII-1.

Karakteristik dari filter "lowpass".

2. Filter "highpass"

Filter "highpass" adalah kebalikan filter "lowpass", justru data input dengan frekwensi yang lebih besar dari frekwensi yang telah ditentukan dapat dilewatkan. Karakteristik dari filter "highpass" dapat digambarkan sebagai berikut :



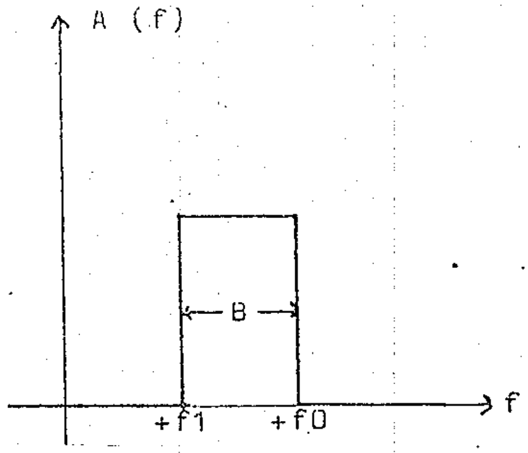
Gambar : VII-2

karakteristik dari filter "highpass".

Hal yang serupa, dipandang dari segi convolusi, "half window" dari filter "highpass" adalah bagian $f > f_0$. Setelah dikalikan dengan frekwensi pemasukan. Maka frekwensi hasil perkalian pada bagian tersebut, yaitu frekwensi yang dapat lewat adalah pada daerah yang berfrekwensi tinggi.

3. Filter "bandpass"

Filter "bandpass" adalah filter yang dapat melewatkan data pemasukan dengan "band" frekwensi tertentu, sedangkan data pemasukan dengan frekwensi diluar itu diredam.



Gambar : VII-3.

Karakteristik dari filter "bandpass".

Hasil perkalian dari "window" segi empat gambar : VII-3 dengan data pemasukan, menghasilkan filter "bandpass", frekwensi yang dilewatkan hanya terdapat pada daerah segi empat.

Ketiga jenis filter, kegunaannya yang paling sering nampak untuk memilih band pada radio maupun televisi. Pada pengukuran getaran mesin penggerak yang akan dibahas pada bab VII.3, masing-masing frekwensi yang akan dimonitoring dipilih satu per satu, pemilihan ini merupakan hasil transformasi Fourier dari convolusi, atau perkalian hasil transformasi Fourier dari ke dua fungsi yang di-convolusi-kan, lazimnya disebut sebagai filter "bandpass".

VII.3. Penerapan transformasi Fourier

Secara matematika, suatu fungsi f(t) ditransformasikan secara Fourier adalah mengubah dari domain waktu ke dalam domain frekwensi dengan definisi :

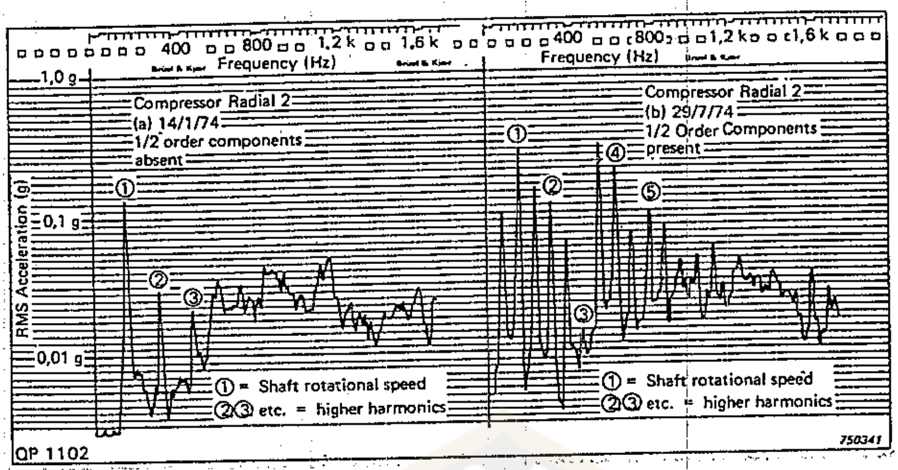
$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2j\pi ft} dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.5)$$

seperti yang telah dikemukakan pada persamaan (4.1), H(f) adalah notasi hasil dari transformasi Fourier tersebut.

Langkah transformasi tersebut, bila diterapkan pada teknologi, akan sangat membantu bagi para ilmuwan yang berkecimpung pada lapangan maupun laboratorium.

Sebagai contoh, bila diterapkan pada getaran mesin penggerak atau gear yang sedang dioperasikan, getaran-getaran tersebut biasanya menpunyai ciri khas tertentu, pada saat pengoperasian mesin, amplituda getaran dapat dianggap sebagai indikator. Namun sulit ditelaah bila pengukuran getaran dilakukan pada domain waktu, tetapi setelah di-transformasi Fourier, akan nampak ciri-ciri pada getaran tersebut. Bila data-data dari hasil pengukuran getaran setelah ditransformasikan ke dalam domain frekwensi direkam dan pengukuran dilakukan secara berkala, maka dari perbandingan akan nampak suatu perubahan, sedangkan perubahan tersebut, akan dapat dipergunakan sebagai data untuk tolok ukur bagi kondisi mesin penggerak atau gear yang telah dimonitoring secara berkala itu.

Seperti gambar VII-4, merupakan rekaman pada tanggal 14 Januari 1974 dan 29 Juli 1974. Nampak banyak tambahan frekwensi dan beberapa frekwensi bertambah amplitudanya.



Gambar : VII-4

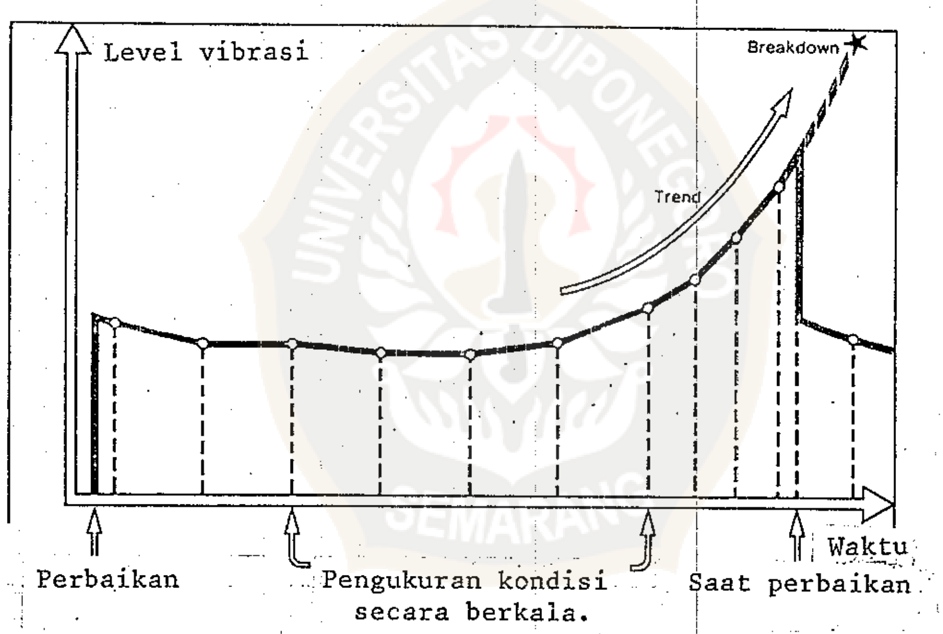
Rekaman frekwensi mesin pada waktu yang berbeda

(Gambar berasal dari brusur BG 0016 perusahaan Bruel & Kjaer, Denmark.)

Dari rekaman setiap periode pengukuran getaran, setelah dibandingkan, jika skala frekwensi bertambah suatu getaran yang sebelumnya tidak ada, atau frekwensi getaran tersebut sudah ada, tetapi amplitudanya selalu bertambah tinggi, dari gejala-gejala tersebut, bagi seorang ahli yang berpengalaman, akan dapat menduga bahwa getaran tersebut berasal dari bagian tertentu pada mesin yang frekwensinya sesuai dengan getaran tambahan atau getaran yang amplitudanya meningkat . Amplituda getaran-getaran yang dimonitoring tersebut, akan bertambah lebih besar seiring dengan keausan pada bagian komponen mesin tersebut, pada saat tertentu akan mencapai titik kritis, biasanya sebelum mencapai titik kritis dihentikan serta direvisi atau mengganti komponen-

komponen dibagian tersebut.

Berdasarkan arsip-arsip data getaran dalam domain frekwensi yang dikumpulkan serta pengalaman-pengalaman sebelumnya, akan dapat diramalkan bahwa sampai kapan pengoperasian mesin dapat bertahan dan memilih saat yang paling effisien untuk dihentikan dan memperbaikinya, hal sedemikian rupa adalah cara kerja yang paling effisien seperti grafik yang diperlihatkan pada gambar VII.5.



Gambar : VII-5

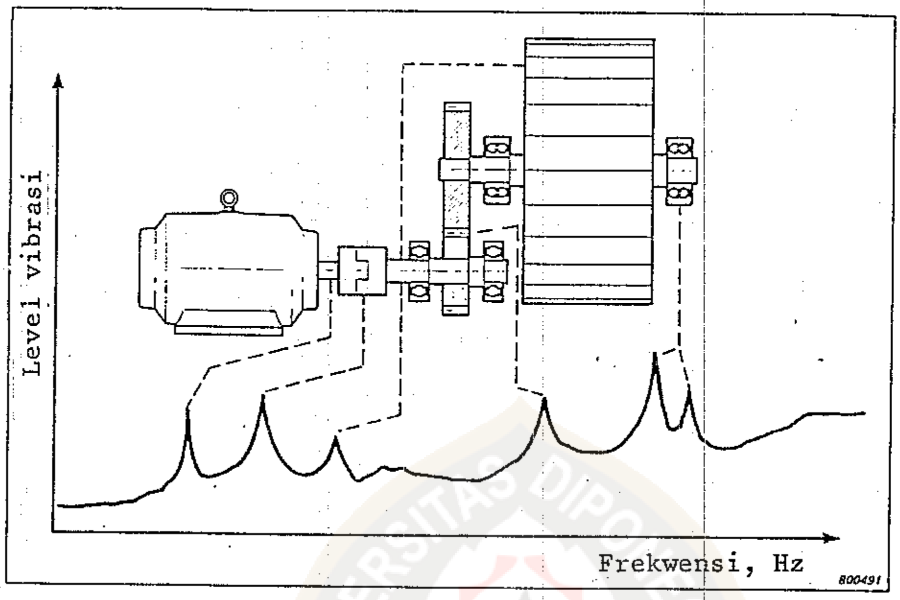
Grafik pemilihan saat yang paling efisien untuk pemeliharaan mesin

(Gambar berasal dari brosur 0104-11 perusahaan Bruel & Kjaer, Denmark.)

Sebelum teknologi tersebut ditemukan, pada umumnya operasi mesin dinilai dari jam kerja mesin tersebut, kemudian dilakukan perbaikan/perawatan pada saat mesin mencapai jam kerja yang ditargetkan. Pada kenyataannya kondisi mesin saat itu berbeda-beda, ada yang kondisinya masih sempurna walaupun sudah mencapai jam kerja yang ditargetkannya, sehingga perawatan pada kondisi tersebut merupakan suatu penghamburan, tidak sesuai dengan azas ekonomis. Namun ada juga yang belum mencapai jam operasi yang ditargetkan, keadaan mesin sudah terlalu fatal dan harus diperbaiki diluar rencana semula yang tak terduga, sehingga akan menghambat seluruh jadwal pekerjaan, sistem/proyek menjadi kacau, dapat mengakibatkan kerugian yang sangat besar. Apa lagi bila kejadian tersebut kebetulan menimpa pada suatu pesawat terbang, akibatnya sangat fatal dan membahayakan seluruh awak pesawat serta jiwa berikut barang-barang yang sedang diangkut. Oleh karenanya mesin pesawat selalu mempergunakan angka keamanan yang tinggi, namun akibatnya biaya operasi juga melambung tinggi.

Dengan menggunakan sistem pengukuran getaran, hal tersebut di atas dapat dihindarkan, sehingga seluruh pekerjaan dapat jalan berkesinambungan dengan lancar dan terperinci.

Gambar : VII-6 menunjukkan sebuah mesin yang kompleks akan menimbulkan frekwensi getaran yang kompleks pula, frekwnsi yang kompleks ini dapat diketahui getaran dari komponen masing-masing karena sudah dalam domain frekwensi, bila rekaman sedemikian rupa diperbandingkan setiap selang waktu tertentu, akan dapat ditarik kesimpulan yang bermanfaat.



Gambar : VII-6

Frekwensi yang ditimbulkan oleh masing-masing komponen

(Gambar berasal dari brosur BG 0016 perusahaan Bruel & Kjaer, Denmark.)

Demikian contoh penerapan penggunaan transformasi Fourier pada getaran mesin yang dapat berfungsi sebagai peramal/praduga. Dengan demikian nampaklah peran matematik didalam teknologi adalah sangat berdominan.