B A B II

II.1.1. TRANSFORMASI KOORDINAT

Sistem koordinat ruang kartesius dengan sumbu saling tegak lurus, disini dinyatakan dengan x^i(i = 1,2,3).Dari banyak sistem koordinat seperi ini hubungan dua buah sistem x^i dan x'^i diberikan oleh persamaan

$$x^i = a^i_j \, x'^j + b^i \tag{2.1}$$

x'^i menyatakan koordinat dengan satu himpunan sumbu saling tegak lurus yang titik asalnya dalam sistem x adalah $b^i . a^i_j$ dengan (i = 1,2,3) merupakan cosinus arah sumbu x'^j terhadap sistem x. Cosinus arah ini memenuhi syarat

$$\sum_i a^i_j \, a^i_k = \delta_{jk} \quad , \quad \sum_i a^j_i a^k_i = \delta^{jk} \tag{2.2}$$

dengan besaran δ_{jk} dan δ^{jk} merupakan delta Kronecker yang didefinisikan oleh

$$\begin{cases} \delta_{jk} = 1 \quad \text{untuk } j = k \\ \delta^{jk} = 0 \quad \text{untuk } j \neq k \end{cases} \tag{2.3}$$

Selanjutnya determinan besaran a^i_j adalah

$$\left| a^i_j \right| = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} = 1 \tag{2.4}$$

Jika $a_i'^j$ adalah cofaktor a^i_j dalam determinan (2.4) dibagi determinan itu sendiri, maka didapat

$$a^i_k \cdot a^{'k}_j = \delta^i_j \quad ; \quad a^i_j a^{'i}_l = \delta^i_j \qquad (2.5)$$

dengan δ^i_j merupakan delta kronecker yang didefinisikan oleh

$$\begin{cases} \delta^i_j = 1 & \text{untuk } i = j \\ \delta^i_j = 0 & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

Persamaan kedua dari persamaan (2.5) dapat dinyatakan sebagai jumlah hasil kali elemen - elemen kolom ke j dan cofaktor elemen kolom ke i yang bersangkutan sama dengan determinannya bila i = j atau sama dengan nol bila i ≠ j.

Bila persamaan (2.1) dikalikan dengan $a^{'k}_i$ dan dijumlahkan terhadap i didapat

$$a^{'k}_i (x^i - b^i) = a^{'k}_i a^i_j x^{'j} = \delta^k_j x^{'j} = x^{'k} \qquad (2.7)$$

Oleh sebab itu tempat kedudukan $x^{'k}$ adalah konstan,adalah bidang - bidang paralel untuk mana $a^{'k}_i$ merupakan bilangan arah dari normal pada bidang - bidang ini dalam sistem x. Meskipun demikian bila pada persamaan pertama dari (2.2) j ≠ k maka sumbu - sumbu sistem x' tidak saling tegak lurus. Oleh sebab itu sistem x' seperti ini disebut sistem koordinat miring.

Selanjutnya diselidiki bila determinan dari (2.4) sama dengan nol, dalam hal ini persamaan (2.1) dalam x' tetap konsisten hanya bila tiga determinan yang didapat dengan menggantikan elemen - elemen sebuah kolom dalam sebuah determinan dari (2.4) dengan $x^1 - b^1$, $x^2 - b^2$, $x^3 - b^3$ berturut - turut sama dengan nol. Akibatnya besaran $x^{'i}$ tidak memdefinisikan koordinat untuk ruang, tapi hanya pada titik - titik kedudukan dalam bidang.

Persamaan (2.7) mendefinisikan transformasi invers dari persamaan(2.1), sebaliknya persamaan (2.1) juga merupakan tran formasi invers dari persamaan (2.7) sesuai dengan persamaan (2.5).

Bila digunakan koordinat polar, maka sistem koordinat polar x'^i didefinisikan terhadap sistem koordinat kartesius sebagai

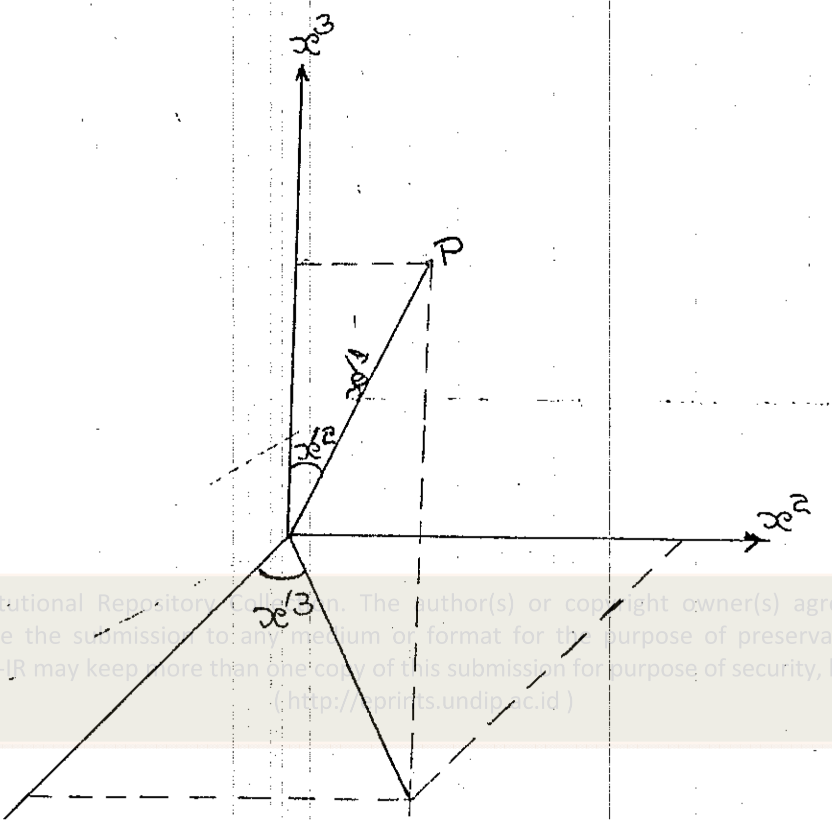
$$\left.\begin{aligned} x^1 &= x'^1 \sin x'^2 \cos x'^3 \\ x^2 &= x'^1 \sin x'^2 \sin x'^3 \\ x^3 &= x'^1 \cos x'^2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

Dari persamaan (2.8) ini akan dicari transformasi inversnya dengan

x'^1 = jarak antara titik $P(x^i)$ dari titik asal nol dalam sistem x.

x'^2 = sudut antara garis $\overline{OP}$ dengan sumbu x^3.

x'^3 = sudut antara proyeksi $\overline{OP}$ pada bidang x^1x^2 dengan sumbu x^1 positip.



$$x'^1 = \sqrt{\sum_i x^i x^i}$$

$$\frac{x^2}{x^1} = \frac{x'^1 \sin x'^2 \sin x'^3}{x'^1 \sin x'^2 \cos x'^3} = \mathrm{tg}\, x'^3$$

$$x'^3 = \mathrm{arc\ tg}\, \frac{x^2}{x^1}$$

$$x^3 = x'^2 \cos x'^2 = \sqrt{\sum_i x^i x^i} \cos x'^2$$

$$\cos x'^2 = \frac{x^3}{\sqrt{\sum_i x^i x^i}}$$

$$x'^2 = \mathrm{arc\ cos}\, \frac{x^3}{\sqrt{\sum_i x^i x^i}}$$

Maka transformasi invers dari (2.8) adalah

$$\left.\begin{aligned} x'^1 &= \sqrt{\sum_i x^i x^i} \\ x'^2 &= \mathrm{arc\ tg}\, \frac{x^2}{x^1} \\ x'^3 &= \mathrm{arc\ cos}\, \frac{x^3}{\sqrt{\sum_i x^i x^i}} \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

Persamaan (2.9) menunjukkan bahwa :

1. Bila x'^1 = konstan maka kedudukan merupakan bola dengan titik asal O sebagai pusat
2. Bila X'^2 = konstan maka tempat kedudukan merupakan kerucut dengan puncak pada O dan x^3 sebagai sumbunya.
3. Bila x'^3 = konstan maka tempat kedudukannya merupakan

Permukaan - permukaan ini disebut permukaan - permukaan koordinat dalam sistem x'. Oleh sebab itu permukaan - permukaan koordinat sistem x' yang didefinisikan oleh (2.1) dan (2.7) merupakan bidang - bidang orthogonal bila persamaan (2.5) dipenuhi.

Sehingga persamaan - persamaan transformasi kesebuah himpunan koordinat umum x'^1 , x'^2 , x'^3 dapat dituliskan sebagai

$$x^i = \varphi^i(x'^1 , x'^2 , x'^3) \tag{2.10}$$

Dengan φ adalah nilai - nilai tunggal fungsi - fungsi x'^1, x'^2 x'^3 . Dengan demikian persamaan (2.1) dan (2.8) merupakan keadaan khusus dari persamaan (2.10).

Fungsi - fungsi φ^i adalah fungsi independen. Bila tidak independen maka terdapat satu atau dua relasi yang berbentuk

$$F (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) = 0$$

Dalam hal ini (2.10) bukanlah merupakan transformasi ruang, dengan persamaan ini mereka hanya mempunyai arti pada titik - titik kedudukan. Sebuah syarat yang diperlukan supaya fungsi φ^i independen adalah Yacobian nya tidak independen dengan nol. sehingga dapat dituliskan

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right| \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x'^1} & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x'^2} & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x'^3} \\ \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial x'^1} & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial x'^2} & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial x'^3} \\ \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial x'^1} & \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial x'^2} & \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial x'^3} \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

$$\equiv e^{ijk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x'^i} \frac{\partial \varphi^2}{\partial x'^j} \frac{\partial \varphi^3}{\partial x'^k} \neq 0$$

Dengan e^{ijk} dan e_{ijk} didefinisikan sebagai berikut

$$\left.\begin{matrix} e^{ijk} \\ \\ e_{ijk} \end{matrix}\right\} = \begin{cases} 0, & \text{jika dua atau tiga indeksnya sama dengan 0} \\ 1, & \text{jika indeksnya berurutan misalkan} \\ & 1,2,3 \ ; \ 2,3,1 \ ; \ 3,1,2 \\ -1, & \text{jika indeksnya tidak berurutan misalkan} \\ & 1,3,2 \ ; \ 3,2,1 \ ; \ 2,1,3 \end{cases}$$

Bila syarat ini dipenuhi mungkin ada nilai - nilai x'^i tertentu yang ber Yacobian nya sama dengan nol. Tetapi secara umum bukan ini permasalahannya, masalahnya adalah sebuah titik x'^i yang nilai $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x'}\right| = 0$ terdapat sebuah domain dengan pertak samaan ini tetap berlaku. Untuk nilai - nilai x'^i persamaan - persamaan (2.10) dapat diselesaikan, penyelesaian seperti ini dinyatakan dengan

$$x'^i = \varphi'^i\,(x^1, x^2, x^3) \qquad (2.12)$$

Persamaan ini mendefinisikan transformasi invers (2.10).

Yacobian (2.11) untuk persamaan - persamaan (2.1) adalah determinan (2.4). Bila determinan ini tidak sama dengan nol , maka terdapatlah $a^{'i}_{j}$ dan persamaan - persamaan (2.7) merupakan invers (2.1) dan memberikan koordinat x'^i untuk sebuah titik dalam besaran x.

Sekarang akan dicari Yacobian (2.11) untuk persamaan (2.8).

Bila persamaan (2.8) didefferensilkan terhadap x'^1, x'^2 dan x'^3 didapat

$$\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} = \sin x'^2 \cos x'^3 \qquad \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} = x'^1 \cos x'^2 \cos x'^3$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial x'^1} = \sin x'^2 \sin x'^3 \qquad \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} = x'^1 \cos x'^2 \sin x'^3$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial x'^1} = \cos x'^2 \qquad\qquad \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} = - x'^1 \sin x'^2$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial x'^3} = - x'^1 \sin x'^2 \sin x'^3$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial x'^3} = x'^1 \sin x'^2 \cos x'^3$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial x'^3} = 0$$

Harga determinan (2.11) adalah

$$\begin{vmatrix} \sin x'^2 \cos x'^3 & x'^1 \cos x'^2 \cos x'^3 & - x'^1 \sin x'^2 \sin x'^3 \\ \sin x'^2 \sin x'^3 & x'^1 \cos x'^2 \cos x'^3 & x'^1 \sin x'^2 \cos x'^3 \\ \cos x'^2 & - x'^1 \sin x'^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(x'^1)^2 \sin x'^2 (\cos x'^2)^2 (\cos x'^3)^2 \quad +$$
$$(x'^1)^2 (\sin x'^2)^3 (\sin x'^3)^3 \quad +$$
$$(x'^1)^2 \sin x'^2 (\cos'^2)^2 (\sin x'^3)^2 \quad +$$
$$(x'^1)^2 (\sin x'^2)^3 (\cos x'^3)^2 \quad =$$
$$\left\{ (x'^1)^2 \sin x'^2 (\cos x'^2)^2 \right\} \left\{ (\cos x'^3)^2 + (\sin x'^3)^2 \right\}$$
$$+ \left\{ (x'^1)^2 (\sin x'^2)^3 \right\} \left\{ (\sin x'^3)^2 + (\cos x'^3)^2 \right\} =$$
$$(x'^1)^2 \sin x'^2 (\cos x'^2)^2 + (x'^1)^2 \sin x'^2 (\sin x'^2)^2 \quad =$$
$$(x'^1)^2 \sin x'^2 \left\{ (\cos x'^2)^2 + (\sin x'^2)^2 \right\} = (x'^1)^2 \sin x'^2$$

Jadi Yacobian (2.11) untuk persamaan (2.8) adalah $(x'^1)^2 \sin x'^2$. Karena besaran ini tidak identik dengan nol koordinat polar dapat diterapkan pada setiap titik dalam ruang

Tetapi mereka terdefinisi secara unik :

1. Bila $x'^1 = 0$ berarti pada titik asal O.
2. Bila $\sin x'^2 = 0$ berarti terletak pada sumbu x^3

Keterangan

ad 1. Pada titik O berarti $x'^1 = 0$ dan x'^2 dan x'^3 dapat bernilai sebarang yaitu semua permukaan - permukaan koordinat x'^2 konstan dan x'^3 konstan melalui titik O, dalam hal $x'^1 = 0$, permukaan - permukaan koordinat menciut menjadi sebuah titik.

ad 2. Setiap titik pada sumbu x^3 harga x'^3 nya dapat sebarang yaitu semua bidang - bidang koordinat x'^3 konstan bertemu dalam sumbu x^3 , dalam hal $x'^3 = 0$, permukaan - permukaan koordinat menciut menjadi sebuah garis.

Untuk titik - titik lain persamaan (2.9) tetap berlaku dan merupakan persamaan - persamaan invers.

Bila x'^i dari persamaan - persamaan (2.12) disubstitusikan kedalam (2.10) maka didapat

$$x^i - \varphi^i(\varphi'^1, \varphi'^2, \varphi'^3) = 0$$

yang merupakan identitas dalam x sesuai dengan definisi (2.11) Karena persamaan ini merupakan persamaan identitas, suku sebelah kiri tidak bervariasi dengan x sebarang, akibatnya turunan terhadap x^i sama dengan 0; Sehingga didapat

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial \varphi^i}{\partial \varphi'^k} \frac{\partial \varphi'^k}{\partial x^j} ,$$

dengan k adalah indeks pengganti. Karena x^i dan x^j untuk $i \neq j$ independen, maka

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^i} = 1 \quad , \quad \text{untuk} \quad i = j$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = 0 \quad , \quad \text{untuk} \quad i \neq j$$

Sehingga dapat ditulis

$$\delta^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \tag{2.13}$$

Dengan δ^i_j didefinisika oleh (2.6), bila i dan j mempunyai nilai 1,2,3 maka terdapat 9 persamaan dalam himpunan (2.13).

Bila x^i dalam persamaan (2.10) disubstitusikan kedalam (2.12) secara analog dengan (2.13) didapat

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} = \delta^i_j \tag{2.14}$$

Bila Yacobian transformasi (2.10) yaitu (2.11) yang dinyatakan dengan $\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|$ dikalikan dengan Yacobian invers (2.12), sebagai akibat (2.13)didapat sebuah determinan dengan setiap elaman diagonal utamanya sama dengan 1 dan elemaen lainnya sama dengan 0, sehingga dituliskan sebagai

$$\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = 1 \tag{2.15}$$

Sehingga setiap Yacobian adalah kebalikan dari lainnya. Jadi hubungan antara persamaan (2.10) dan (2.12) sedemikian rupa sehingga persamaan yang satu merupakan transformasi invers dari yang lainnya.

Bila dalam persamaan (2. 13) i diambil bernilai tetapdan j bernilai 1,2,3 maka terdapatlah 3 persamaan tingkat satu dalam $\frac{\partial x^i}{\partial x'^2}$, $\frac{\partial x^i}{\partial x'^2}$ dan $\frac{\partial x^i}{\partial x'^3}$ menghasilkan

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \frac{\text{cofaktor dari} \left|\dfrac{\partial x'^j}{\partial x^i}\right| \quad \text{dalam} \left|\dfrac{\partial x'}{\partial x}\right|}{\left|\dfrac{\partial x'}{\partial x}\right|}$$

Persamaan (2.10) adalah persamaan sebuah transformasi dari x^i yang diinterpretasikan sebagai koordinat kartesius ke koordinat lainnya. Dalam menjalankan sifat - sifat transformasi persamaan (2.10) dan inversnya (2.12) tidak ada yangmenyatakan bahwa koordinat x^i merupakan koordinat kartesius. Oleh sebab itu semua hasil - hasil dari pembicaraan diatas dapat diterapkan dengan baik bila persamaan (2.10) merupakan relasi antara dua sistem koordinat sebarang dalam ruang.
Jadi bila x^i merupakan sebuah koordinat sebarang, maka persamaan (2.1) dan(2.8) mendefinisikan sebuah transformasi koordinat tetapi interpretasi geometris, koordinat - koordinat baru ini hanya bisa diterapkan bila x^i merupakan koordinat kartesius.

Sehubungan dengan transformasi (2.10) diberikan sebuah transformasi kedua yaitu

$$x'^i = \psi^i (x''^1, x''^2, x''^3) \tag{2.17}$$

Yang Yacobiannya $\left|\dfrac{\partial x'}{\partial x''}\right|$ tentunya tidak identik dengan nol.
Bila x'^i persamaan ini disubstitusikan kedalam (2.10) maka didapat

$$x^i = x^i(x''^1, x''^2, x''^3) \tag{2.18}$$

Yang mendefinisikan sebuah transformasi dari x^i kedalam x''^i, yang disebut juga hasil kali transformasi (2.10) dan (2.17)
Karena

$$\frac{\partial x^i}{\partial x''^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x''^j},$$

maka dengan aturan pergandaan determinan berlaku bahwa

$$\left|\frac{\partial x}{\partial x''}\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \left|\frac{\partial x'}{\partial x''}\right| ,$$

Jadi Yacobian hasil kali dua transformasi koordinat ialah hasil kali Yacobian dari masing - masing transformasi, dengan perkataan lain transformasi koordinat mempunyai sifat Group yaitu hasil kali tiap dua transformasi seperti ini menghasilkan sebuah transformasi koordinat.

II.1.2. KOORDINAT KURVILINIER

Dari pembicaraan I.1 diatas dapat disimpulkan bila x^i merupakan koordinat kartesius, setiap nilai tertentu x' dalam tiap persaan (2.12) menyatakan sebuah permukaan dalam ruang. Untuk nilai - nilai tertentu x'^1, x'^2, x'^3 merupakan persamaan tiga permukaan dalam ruang yang berpotongan dalam sistem koordinat x' disatu titik, dalam hal ini persamaan (2.1) merupakan persamaan linier dan (2.8) merupakan koordinat polar.
Begitu pula untuk nilai - nilai tertentu dalam koordinat kartesius x^i , persamaan (2.10) merupakan bidang melalui titik x^i dalam koordinat x'^i yang sejajar dengan bidang - bidang koordinat $x^i = 0$

Bila x^i dan x'^i merupakan koordinat sebarang, untuk nilai - nilai tertentu x'^1, x'^2, x'^3 persamaan (2.12) merupakan persamaan - persamaan tiga permukaan yang didefinisikan dalam besaran koordinat x^i, yang melalui titik (x'^1, x'^2, x'^3) dan begitu pula untuk persamaan (2.10).

Pernyataan - pernyataan diatas dapat dinyatakan secara lain yaitu dengan memberikan

$$x^1 = c^1 \quad , x^2 = c^2 \quad , x^3 = c^3 \tag{2.19}$$

Untuk nilai -nilai konstan c tertentu, persamaan merupakan sebuah persamaan permukaan yang salah satu koordinatnya merupakan sebuah konstanta untuk semua titik- titik permukaan, nilai nilai kedua koordinat lainnya menentukan sebuah titik tertentu pada permukaan . Jadi persamaan (2.19) merupakan persamaan - persamaan permukaan yang sejajar dengan bidang - bidang koordinat sebuah sistem koordinat saling tegak lurus.
Bila konstanta c^i dalam tiap persamaan - persamaan ini merupakan bilangan riil tertentu yang kontinu,maka persamaannya merupakan sebuah persamaan keluarga permukaan. Jadi persamaan - persamaan ini merupakan sebuah persamaan permukaan - permukaankoordinat yang berjumlah tak terhingga. Dalam sistem x' yang yang didefinisikan oleh (2.10), persamaan permukaan - permukaan ini adalah $\varphi^i(x'^1, x'^2, x'^3) = c^i$, satu dan hanya satu permukaan dari tiga keluarga yang melalui tiap titik dalam ruang yang Yacobi transformasi dari koordinat kartesius ke koordinat yang diinginkan tidak nol. Pada titik -titik yang Yacobiannya hilang (tidak ada) koordinat - koordinat baru tak terdefinisi secara unik, seperti dinyatakan dalam persamaan (2.8).

Untuk nilai - nilai tertentu c setiap dua persamaan(2.19) merupakan persamaan - persamaan kurva perpotongan permukaan - permukaan koordinat yang bersangkutan, koordinat sisanya merupakan sebuah parameter. Jadi x^1 adalah sebuah parameter untuk setiap satu kurva, khusus $x^2 = c^2$ dan $x^3 = c^3$ kurva - kurva ini disebut kurva - kurva koordinat atau dapatdinyatakan sebuah kurva koordinat x^1 adalah sebuah kurva koordinat dengan hanya x^1 yang bervariasi, yaitu berlaku sebagai sebuah parameter.
Kurva - kurva ini berupa garis garis sejajar dengan sumbu sumbu koordinat dalam koordinat kartesius ,karena kurva -kurva ini tidak merupakan garis lurus, maka koordinat bersangkutan disebut kurvilinier.

Jadi bisa disimpulkan dalam koordinat koordinat x^i apa - pun, secara umum kedudukdn yang didefinisikan oleh sebuah persamaan $f(x^1,x^2,x^3) = 0$ adalah sebuah permukaan dan kedudukan yang didefinisikan oleh dua persamaan independen $f_1(x^1,x^2,x^3) = 0$ dan $f_2(x^1,x^2,x^3) = 0$ adalah sebuah kurva.
Pernyataan ini ekivalen dengan definisi sebuah permukaan sebagai tempat kedudukan dua demensi dan definisi sebuah kurva sebagai tempat kedudukan satu demensi.

II.2. BENTUK DASAR KWADRATIK RUANG

Kurva didalam ruang didefinisikan dalam bentuk

$$x^i = f^i(t) \tag{2.20}$$

dengan x merupakan koordinat kartesius, differensial panjang kurva ini adalah

$$ds^2 = \sum_i \left(\frac{df^i}{dt}\right)^2 dt^2$$

Dengan pernyataan lain elemen panjang atau elemen linier ds dalam ruang dinyatakan sebagai

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{2.21}$$

Berarti bila differensial dx^i rumusan (2.20) disubstitusikan dengan (2.21) bentuk ds yang didapat differensial panjang busur kurva (2.20). Ruas kanan dari (2.21) disebut bentuk dasar kwadrat ruang.

Dalam sistem koordinat yang lainnya dari (2.10) x'^i dinyatakan dengan

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j \tag{2.22}$$

dan dari (2.21) didapat

$$ds^2 = \sum_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\, dx'^j\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\, dx'^k\right)$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\right) dx'^j dx'^k$$

$$= a'_{jk}\, dx'^j dx'^k \qquad (2.23)$$

dengan

$$a'_{jk} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \qquad (2.24)$$

dan berlaku

$$a'_{jk} = a'_{jk}$$

Karena X'^i merupakan sistem koordinat sebarang, maka da - lam setiap sistem koordinat x^i bentuk kwadrat dasarnya adalah

$$ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j \qquad (2.25)$$

Dengan a_{ij} simetris dalam indeks i dan j, sehingga $a_{ij} = a_{ji}$. Bila sistem koordinat x^i merupakan sistem koordinat kartesius yaitu (2.21), maka akibatnya

$$a_{ij} = \delta_{ij} \quad , \; ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \qquad (2.26)$$

Bila koordinatnya merupakan koordinat (2.8) dari (2.24) untuk

$$a'_{11} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\frac{\partial x^2}{\partial x'^1} + \frac{\partial x^3}{\partial x'^2}\frac{\partial x^3}{\partial x'^2}$$

$$= (\sin x'^2 \cos x'^3)^2 + (\sin x'^2 \sin x'^3)^2 + (\cos x'^2)^2$$

$$= \sin^2 x'^2 \cos^2 x'^3 + \sin^2 x'^2 \sin^2 x'^3 + \cos^2 x'^2$$

$$= \sin^2 x'^2 \,(\cos^2 x'^3 + \sin^2 x'^3\,) + \cos^2 x'^2$$

$$= \sin^2 x'^2 + \cos^2 x'^2$$

$$= 1$$

$$a'_{22} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\frac{\partial x^1}{\partial x'^2} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\frac{\partial x^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial x^3}{\partial x'^2}\frac{\partial x^3}{\partial x'^2}$$

$$= (x'^1 \cos x'^2 \cos x'^3)^2 + (x'^1 \cos x'^2 \sin x'^3)^2 + (-\, x'^1 \sin x'^2\,)^2$$

$$= (x'^1)^2 \cos^2 x'^2 \cos^2 x'^3 + (x'^1)^2 \cos^2 x'^2 \sin^2 x'^3 + (x'^1)^2 \sin^2 x'^2$$

$$= (x'^1)^2 \cos^2 x'^2 (\cos^2 x'^3 + \sin^2 x'^3) + (x'^1)^2 \sin^2 x'^2$$

$$= (x'^1)^2 \cos^2 x'^2 + (x'^1)^2 \sin^2 x'^2$$

$$= (x'^1)^2 (\cos^2 x'^2 + \sin^2 x'^2)$$

$$= (x'^1)^2$$

$$a'_{33} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^3}\frac{\partial x^1}{\partial x'^3} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^3}\frac{\partial x^2}{\partial x'^3} + \frac{\partial x^3}{\partial x'^3}\frac{\partial x^3}{\partial x'^3}$$

$$= (-\, x'^1 \sin x'^2 \sin x'^3\,)^2 + (x'^1 \sin x'^2 \cos x'^3)^2 + 0$$

$$= (x'^1)^2 \sin^2 x'^2 \sin^2 x'^3 + (x'^1)^2 \sin^2 x'^2 \cos^2 x'^3$$

$$= (x'^1)^2 \sin^2 x'^2 (\,\sin^2 x'^3 + \cos^2 x'^3\,)$$

$$= (x'^1)^2 \sin^2 x'^2$$

maka didapat

$$a'_{11} = 1$$

$$a'_{22} = (\,x'^1\,)^2 \qquad (2.27)$$

$$a'_{33} = (\,x'^1\,)^2 \,\sin^2 x'^2$$

$$a'_{ij} = 0 \text{ untuk } i \neq j$$

Oleh sebab itu bentuk dasar kwadratis dalam koordinat polar adalah

$$ds^2 = (dx'^1)^2 + (x'^1)^2(dx'^2)^2 + (x'^1)^2\sin^2 x'^1(dx'^3)^2$$
$$= (dx'^1)^2 + (x'^1)^2\left\{(dx'^2)^2 + \sin^2 x'^2(dx'^3)^2\right\} \qquad (2.28)$$

Sekar ang dicari hubungan antara koefisien a_{ij} dan a'_{ij} dari bentuk dasar dalam dua buah sistem koordinat x^i dan x'^i Karena elemen panjang ds tak tergantung pada sebuah koordinat sistem, maka bentuk - bentuk persamaan elemen panjang dalam kedua sistem dapat disamakan.Sedemikian hingga didapat

$$a_{ij}dx^i dx^j = a'_{kl}dx'^k dx'^l \qquad (2.29)$$

dx^i dan dx^j persamaan (2.22) disubstitusikan kedalam (2.29) adalah

$$a_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}dx'^k\frac{\partial x^j}{\partial x'^l}dx'^l = a'_{kl}dx'^k dx'^l$$

$$a_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x^j}{\partial x'^l}dx'^k dx'^l - a'_{kl}dx'^k dx'^l = 0$$

$$\left(a_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x^j}{\partial x'^l} - a'_{kl}\right)dx'^k dx'^l = 0$$

Karena persamaan ini harus berlaku untuk nilai dx' sebarang , dan suku -suku yang didalam kurung simetri dalam k dan l. Maka

$$a_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x^j}{\partial x'^l} - a'_{kl} = 0$$

$$a'_{kl} = a_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x^j}{\partial x'^l} \qquad (2.30)$$

Untuk mendapatkan hasil ini haruslah $dx'^1 \neq 0$, $dx'^2 = dx'^3 = 0$ dan $k = l = 1$ umtuk persamaan (2.30) . Secara sama bila diambil kedua differensialnya sama dengan nol, maka didapat nilai (2.30) untuk nilai $k = l = 1,2,3$; Dalam mendapatkan 3 persamaan dari (2.30) untuk $k \neq l$, maka diambil satu differensial sama dengan nol dan lainnya tidak.

Hanya terdapat 3 persamaan yang memenuhi $a_{kl} = a_{lk}$

Bila (2.30) dikalikan dengan $\frac{\partial x'^k}{\partial x^h} \frac{\partial x'^l}{\partial x^m}$ dan dijumlahkan terhadap k dan l , harus menggunakan (2.13)

$$a'_{kl} \frac{\partial x'^k}{\partial x^h} \frac{\partial x'^l}{\partial x^m} = a_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^h} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^l}{\partial x^m}$$

$$= a_{ij}\, \delta^i_h\, \delta^j_m$$

$$= a_{hm}$$

Jadi dengan mengganti indeksnya h dan m dengan i dan j bertu-rut - turut didapat persamaan

$$a_{ij} = a'_{kl} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^j} \qquad (2.31)$$

Yang menghubyngkan a dan a' yang ekivalen dengan (2.30),tetapi dalam bentuk invers.

Bila determinan besaran a'_{ij} dan a_{ij} dinyatakan dengan a' dan a, maka didapat :

$$a' \equiv \left| a'_{kl} \right| = \left| a_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} \right|$$

$$= \left| a_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \right| \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| = a \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 \qquad (2.32)$$

Untuk sistem koordinat kartesius, nilai δ_{ij} dari a yaitu determinannya adalah +1. Dengan hasil ini dan persamaan (2.32) dapat disimpulkan.

TEOREMA 2.1

Determinan koefisien bentuk dasar ruang Euclidean dalam setiap sistem koordinat adalah positip.

Karena $a \neq 0$ fungsi a^{ik} didefinisikan dengan

$$a^{ik}a_{kj} = \delta^{i}_{j} \tag{2.33}$$

dengan (2.13) dan (2.16), maka nilai a^{ik} adalah

$$a^{ik} = \frac{\text{cofarian dari } a_{ki} \text{ dalam } a}{a} \tag{2.34}$$

Karena $a_{ij} = a_{ji}$, dengan (2.34) didapatkan $a^{ik} = a^{ki}$, yaitu besaran a^{ik} berindeks simetri. Secara khusus dikatakan bila $a_{ij} = \delta_{ij}$ didapat $a^{ij} = \delta^{ij}$

Bila determinan besaran a^{ik} dinyatakan dengan $\bar{a}$, dengan persamaan (2.33) didapat bahwa hasil kali determinan a dan $\bar{a}$ adalah determinan yang tiap elemen diagonal utamanya +1, dan elemen - elemen lainnya sama dengan nol.

Jadi

$$\bar{a} \equiv \left| a^{ij} \right| = \frac{1}{a} \tag{2.35}$$

Untuk sistem kooordinat x'^{i} lainnya koefisien bentuk dasar a'^{ij} diberikan oleh persamaan (2.30) sehingga (2.33) fungsi a'^{ik} didefinisikan secara unik.

Akan ditunjukkan bahwa hubungan antara a'^{ij} dan a^{kl} adalah

$$a'^{ij} = a^{kl} \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{l}} \tag{2.36}$$

Bila diambil persamaan

$$a^{lk} a_{kh} = \delta^{l}_{k}$$

Yang merupakan bentuk dari (2.33) dan mensubstitusikan a_{kh} dalam bentuk (2.31) didapat

$$a^{kl}\, a'_{im} \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{h}} = \delta^{l}_{h} ,$$

kemudian dikalikan dengan $\dfrac{\partial x'^{j}}{\partial x^{h}}$ dan dijumlahkan terhadap l didapat

$$a^{kl} \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{h}} a'_{im} \frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{l}} = \delta^{l}_{h} \frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{l}}$$

$$a^{kl} \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{h}} a'_{im} \frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{l}} = \frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{h}}$$

Karena $\dfrac{\partial x'^{j}}{\partial x^{h}}$ ini sama dengan $\delta^{j}_{m} \dfrac{\partial x'^{m}}{\partial x^{h}}$ didapat persamaan

$$a^{kl} \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{h}} a'_{im} \frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{l}} = \delta^{j}_{m} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{h}}$$

$$\left(a^{kl} \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{l}} a'_{im} - \delta^{j}_{m} \right) \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{h}} = 0$$

Karena $\dfrac{\partial x'}{\partial x} \neq 0$, maka dengan mengganti indeks i dengan h yang didalam kurung adalah

$$a^{kl} \frac{\partial x'^{h}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{l}} a'_{hm} - \delta^{j}_{m} = 0$$

mengalikannya dengan $a^{'mi}$ dan menjumlahkan terhadap m didapat:

$$a^{kl} \frac{\partial x^{'h}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{'j}}{\partial x^l} a'_{hm} a^{'im} - \delta^j_m a^{'im} = 0$$

$$a^{kl} \frac{\partial x^{'i}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{'j}}{\partial x^l} - a^{'ji} = 0$$

Jadi

$$a^{kl} \frac{\partial x^{'i}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{'j}}{\partial x^l} = a^{'ij}$$

II.3.1 VEKTOR KONTRAVARIAN

Sebuah transformasi koordinat dari persamman (2.12) yaitu

$$x^{'j} = \varphi^{'j}(x^1 ,x^2 ,x^3) \tag{2.37}$$

didapat persamaan

$$d x^{'j} = \frac{\partial x^{'j}}{\partial x^h} dx^h \tag{2.38}$$

Jadi dalam dua sistem koordinat sebarang, dalam mentransformasikan dari satu sistem ke sistem lainnya yang differensialnya merupakan transformasi homogen linier, Sehingga disini sebuah transformasi koordinat menghasilkan sebuah transformasi homogen linier dari differensial koordinat.

Bila persamaan (2.38) digandakan dengan $\frac{\partial x^i}{\partial x^j}$ dan dijumlahkan terhadap j dengan (2.13) didapat

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{'j}} dx^{'j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{'j}} \frac{\partial x^{'j}}{\partial x^h} dx^h$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\, dx'^j = \delta^i_h\, dx^h = dx^i \qquad (2.39)$$

persamaan ini sebagai invers dari persamaan (2.38).
Persamaan (2.39) sebenarnya persamaan (2.22) yang didapat dari invers (2.37). Bila persamaan (2.39) dx'^j diganti dengan

$dx'^j = \dfrac{\partial x'^j}{\partial x''^k}\, dx''^k$ yang didapat dari (2.17) maka didapat

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^j}{\partial x''^k}\, dx''^k$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial x''^k}\, dx''^k \qquad (2.40)$$

Sehingga himpunan yang dihasilkan transformasi mempunyai sifat sifat Group.

Jika x^i dalam persamaan (2.37) merupakan koordinat kartesius, maka differensial dx^i merupakan elemen garis yang ujung x^i dan $x^i + dx^i$.

Differensial dx'^j yang diberikan oleh (2.38) menentukan arah yang sama dalam sistem x', karena sebuah arah independen dari sebuah sistem koordinat. Oleh sebab itu bila x^i merupakan koordinat kartesius arah yang ditentukan oleh dx^i tetap akan sama dimanapun dalam ruang, sedangkan nilai dx'^i yang bersangkutan tergantung pada titik dimana arah itu ditetapkan, kecuali

$\dfrac{\partial x'^j}{\partial x^h} = a^j_h$, dengan a konstan.

Dengan mengintegralkan persamaan khusus diatas, maka akan didapat kembali persamaan (2.1) dengan x'^i merupakan koordinat kartesius atau koordinat miring tergantung apakah persamaan

Untuk sebuah kurva dengan persamaan

$$x^i = f^i(t) \tag{2.41}$$

Dengan koordinat kartesius x^i, besaran $\xi^i(t) = \dfrac{dx^i}{dt}$

terdapat pada sebuah titik kurva merupakan bilangan arah tangen vektor pada titik tersebut. Bila untuk sebuah sistem koordinat diberikan

$$\xi'^i(t) = \frac{dx'^i}{dt}$$

sebagai akibat (2.38) didapat

$$\xi'^i(t) = \xi^j(t) \frac{dx'^i}{dx^j} \tag{2.42}$$

Jadi besaran besaran $\xi'^j(t)$ menentukan pada setiap titik kurva tangen vektornya dalam sistem x'.
Sekarang misalkan tiga buah fungsi koordinat kartesius x^s yang dinyatakan dengan $\lambda^i(x)$, nilai nilai fungsi ini pada tiap titik dalam ruang diambil sebagai bilangan arah sebuah vektor pada titik itu. Himpunan vektor seperti ini disebut medan vektor (vektor field).
Bila ditentukan

$$dx^i = \rho \lambda^i \tag{2.43}$$

Dengan ρ adalah setiap fungsi x, nilai - nilai differensial ini pada setiap titik dalam ruang juga merupakan bilangan - bilangan arah vektor yang ditentukan oleh λ^i pada titik tersebut. Misalkan untuk setiap koordinat sisitem x'^i sebarang fungsi fungsi x' dinyatakan dalam $\lambda'^i(x')$ dan didefinisikan sebagai

$$\lambda'^i(x') = \lambda^j(x) \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \tag{2.44}$$

Bila x dalam ruas kanan digantikan dengan x' yang mendefinisikan transformasi koordinat. Bila dibandingkan persamaan ini dan (2.43) dengan persamaan (2.38), tampak bahwa

$$dx'^{i} = \rho\,\lambda'^{i}(x') \tag{2.45}$$

Yaitu besaran besaran $\lambda'^{i}(x')$ mendefinisikan medan vektor dalam x' yang didefinisikan oleh $\lambda^{i}(x)$ dalam (x) seperti juga (2.39) yang didapat dari (2.38), maka persamaan (2.44) ekivalen dengan

$$\lambda^{i}(x) = \lambda'^{j}(x')\,\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{j}} \tag{2.46}$$

dan persamaan persamaan (2.44) dan (2.46) merupakan sifat kebalikan .

Untuk sistem koordinat x''^{i} secara analog dengan (2.46) didapat

$$\lambda^{i}(x) = \lambda''^{i}(x'')\,\frac{\partial x^{i}}{\partial x''^{k}}$$

Dari kedua persamaan himpunan ini didapat

$$\lambda'^{j}(x')\,\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{j}} = \lambda''^{k}(x'')\,\frac{\partial x^{i}}{\partial x''^{k}}$$

Bila digunakan persamaan ini dengan $\frac{\partial x'^{h}}{\partial x^{i}}$ dan dijumlahkan terhadap i, maka

$$\lambda'^{j}(x')\,\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{j}}\,\frac{\partial x'^{h}}{\partial x^{i}} = \lambda''^{k}(x'')\,\frac{\partial x^{i}}{\partial x''^{k}}\,\frac{\partial x'^{h}}{\partial x^{i}}$$

$$\lambda'^{j}(x')\,\delta^{h}_{j} = \lambda''^{k}(x'')\,\frac{\partial x'^{h}}{\partial x''^{k}}$$

Jadi didapat

$\partial x'^{h}$

Padahal (2.46) mempunyai sifat Group, maka akibatnya dalam du sistem x^i dan x'^i sebarang, hubungan besaran $\lambda^i(x)$ dan $\lambda'^i(x')$ yang dalam sistem masing - masing menen tukan vektor dari sebuah medan vektor disetiap titik yang dinyatakan oleh persamaan (2.46). Besaran - besaran λ^i dan λ'^i disebut komponen - komponen sebuah vektor kontravarian dalam sistem x dan x'.

Jadi terdapatlah sebuah vektor kontravarian pada setiap titik dalam ruang membentuk sebuah medan vektor. Bila koordinatnya merupakan koordinat kartesisus mereka merupakan bilangan arah dari vektor.

Dapat disimpulkan bahwa sebuah vektor kontravarian seluruhnya didefinisikan oleh komponen komponennya dalam sebuah sistem koordinat sebarang,untuk komponen komponen disistem sebarang lainnya tertentukan, sehingga dapat ditentukan fungsi λ^i sebarang dalam sistem x. Misalakan diambil λ' konstan, maka secara umum komponen kompon en dalam sistem lainnya tidak konstan. Bila koordinat x^i merupakan koordinat kartesius dan λ^i konstan, maka seluruh vektor vektornya sejajar , karena mempunyai bilangan arah yang sama. Tetapi secara umum komponen konstan dalam sistem koordinat sebarang tidaklah mendefinisikan vektor sejajar.

Dalam menhadapi sebuah masalah geometri akan timbul persamaan berbentuk (2.46) yang menghubungkan besaran besaran ^{i} dan $'^i$ tertentu dalam sistem koordinat sebarang. Dalam hal ini persamaan geometris tersebur mendefinisikan secara analitis sebuah vektor kontravarian yang komponen komponen λ^i dan λ'^i dalam sistem koordinat masing masing.

Bila fungsi fungsi λ^i dan λ'^i didefinisikan pada titik titik sebuah kurva bukan ruang, sehingga memenuhi persamaan berbentuk (2.44) maka λ^i dikatakan komponen komponen sebuah vektor kontravarian pada titik titik kurva.

Misalkan persamaan differensial

$$\frac{dx^1}{\lambda^1} = \frac{dx^2}{\lambda^2} = \frac{dx^3}{\lambda^3} \qquad (2.47)$$

dengan λ^i merupakan komponen komponen sebuah vektor kontravarian. Integral persamaan ini akan menghasilkan persamaan dalam bentuk

$$f_1(x^1,x^2,x^3) = c_1 \quad , \quad f_2(x^1,x^2,x^3) = c_2 \qquad (2.48)$$

dengan c konstanta sebarang dan f_1 dan f_2 merupakan dua fungsi independen yang merupakan penyelesaian persamaan

$$\lambda^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \qquad (2.49)$$

Untuk setiap pasang nilai c_1 dan c_2, persamaan (2.48) merupakan persamaan sebuah kurva melalui sebuah titik dalam ruang dengan f_1 dan f_2 bernilai tunggal terdapat satu dan hanya kurva famili. Sebuah famili kurva berparameter dua, ini disebut kongkruen.

Dari persamaan (2.43) dan (2.45) disimpulkan bahwa sistem koordinat x'^i sebarang persamaan (2.47) adalah

$$\frac{dx'^1}{\lambda'^1} = \frac{dx'^2}{\lambda'^2} = \frac{dx'^3}{\lambda'^3}$$

dan integralnya terdiri dari persamaan persamaan x' yang didapat dari (2.48), dengan menggantikan x dengan fungsi x' yang mendefinisikan transformasi koordinat.

Dari persamaan (2.47) dan (2.49) didapat

$$\frac{\partial f_1}{\partial x^i} dx^i = 0 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial x^i} dx^i = 0$$

Dari persamaan ini disimpulkan bahwa bila x merupakan sistem koordinat kartesius, dx^i merupakan bilangan arah tangen vektor pada sebuah titik di kurva yang kongkruen (2.48) yang melalui titik tersebut, begitu pula λ^i.

Maka dalam sistem koordinat sebarang λ^i merupakan komponen dari sebuah tangen vektor.

II.3.2. S K A L A R.

Bila f merupakan fungsi sebarang x^i dan f' merupakan x'^i yang didapat dari f denga n menggantikan x^i dengan fungsi x'^i yang mendefinisikan transformasi koordinat, maka didapat

$$f(x^1, x^2, x^3) = f'(x'^1, x'^2, x'^3) \tag{2.50}$$

Salah satu fungsi ini disebut transformasi dari lainnya. Dari persamaan ini didapat

$$\frac{\partial f}{dx^i} = \frac{\partial f'}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \tag{2.51}$$

dengan hasil ini dan (2.46) didapat

$$\lambda^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \lambda'^j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial f'}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}$$

$$\lambda^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \lambda'^j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial f'}{\partial x'^k}$$

$$= \lambda'^j \delta^k_j \frac{\partial f'}{\partial x'^k}$$

$$= \lambda'^j \frac{\partial f'}{\partial x'^j} \tag{2.52}$$

Maka transformasi penyelesaian sebuah persamaan (2.49) adalah merupakan penyelesaian persamaan

$$\lambda'^i \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \tag{2.53}$$

Fungsi sebarang $f(x^1, x^2, x^3)$ dan transformasinya kedalam tiga sistem koordinat sebarang lainnya mendefinisikan dalam sistem koordinat masing - masing sebuah besaran yang disebut sebuah skalar. Sehingga suatu besaran dalam suatu koordinat bila ditransformasikan kedalam sistem koordinat lainnya secara (2.50), maka besaran itu didefinisikan sebagai sebuah skalar.

Contohnya, karena suku pertama dan terakhir dalam (2.52) merupakantransformasi satu sama lain, dikatakan bahwa $\lambda^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ adalah sebuah skalar.

Berarti bahwa transformasinya dalam sistem koordinat sebarang lainnya mempunyai bentuk yang analog yaitu

$$\lambda'^j \frac{\partial f'}{\partial x'^j}$$

II.3.3. PANJANG VEKTOR KONTRAVARIAN

Misalkan λ^i merupakan komponen komponen sebuah vektor kontravarian dalam sistem koordinat x^i sebarang dan misalkan $a_{ij}\lambda^i\lambda^j$ dengan a_{ij} merupakan koefisien bentuk dasar (2.25) sebagai akibat (2.46) dan (2.14) untuk sistem koordinat x'^i sebarang lainnya

$$a_{ij}\lambda^i\lambda^j = a'_{kl} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^j} \lambda'^h \frac{\partial x^i}{\partial x'^h} \lambda'^m \frac{\partial x^j}{\partial x'^m}$$

$$= a'_{kl} \lambda'^h \lambda'^m \frac{\partial x'^k \partial x^i}{\partial x^i \partial x'^h} \frac{\partial x'^l \partial x^j}{\partial x^j \partial x'^m}$$

$$= a'_{kl} \lambda'^h \lambda'^m \delta^k_h \delta^l_m$$

Sehingga untuk vektor kontravarian λ^i sebarang, $a_{ij}\lambda^i\lambda^j$ adalahskalar. Dalam koordinat kartesius $a_{ij}\ \lambda^i\ \lambda^j$ menyatakan bentuk dasar $\sum_i \lambda^i\lambda^i$ sperti dinyatakan pada (2.26). Pada setiaptitik, $a_{ij}\ \lambda^i\ \lambda^j$ adalah kwadrat panjang segmen garis yang proyeksi - proyeksi orthogonalnya terhadap sumbu koordinat adalah λ^i. Dan λ^i ini merupakan komponen komponen saling tegak lurus dari vektor.

Maka disimpulkan

TEOREMA 2.2

> Bila λ^i merupakan komponen komponen dalam sebuah sistem koordinat sebarang dari sebuah vektor kontravarian dan a_{ij} merupakan koefisien koefisien bentuk dasar dalam sistem koordinat ini, maka besaran $a_{ij}\lambda^i\lambda^j$ adalah sebuah skalar, yaitu merupakan koresponden λ dalm sistem koordinat kartesius.

Maka dalam sebuah sistem koordinat sebarang sehimpunan λ^i mendefinisikan dan menentukan arah serta panjang sebuah vektor pada setiap titik dalam ruang.

II.3.4. SUDUT ANTARA DUA VEKTOR

Sekarang akan diselidiki arti geometris komponen - komponen λ^i dalam koordinat sebarang. Bila dipilih λ^i sedemikian rupa hingga

$$a_{ij}\ \lambda^i\lambda^j = 1 \tag{2.55}$$

Maka vektor ini adalah sebuah vektor satuan. Disini komponen λ^i merupakan cosinus arah vektor pada setiap titik dalam sebuah sistem koordinat kartesius.

Untuk dua vektor λ_1^i dan λ_2^i didapat

$$a_{ij}\,\lambda^{i}_{1}\,\lambda^{j}_{2} = a'_{kl}\,\lambda'^{k}_{1}\,\lambda'^{l}_{2} \qquad (2.56)$$

Ternyata sama dengan kasun (2.54). Jadi $a_{ij}\ \lambda^{i}_{1}\ \lambda^{j}_{2}$ adalah sebuahskalar. Bila sistem koordinat adalah sistem koordinat kartesius, sehingga komponen komponen mengandung bilangan bilangan arah, skalar ini adalah $\sum_{i}\lambda^{i}_{1}\ \lambda^{i}_{2}$ .Bila besaran ini dibagi dengan

$$\sqrt{\left(\sum_{i}\lambda^{i}_{1}\lambda^{i}_{1}\right)\left(\sum_{j}\lambda^{j}_{2}\lambda^{j}_{2}\right)}$$

hasilnya merupakan cosinus sudut dua vektor , sehingga dapat disimpulkan:

<u>TEOREMA.2.3</u>

Bila λ^{i}_{1} dan λ^{i}_{2} merupakan komponen komponen dua vektor kontravarian dalam sistem koordinat sebarang sudut(≤ 180) antara dua vektor pada sebuah titik, diberikan oleh

$$\cos\theta = \frac{a_{ij}\,\lambda^{i}_{1}\,\lambda^{j}_{2}}{\sqrt{\left(a_{ij}\,\lambda^{i}_{1}\lambda^{j}_{1}\right)\left(a_{kl}\,\lambda^{k}_{2}\lambda^{l}_{2}\right)}} \qquad (2.57)$$

Dan akibatnya didapat

<u>TEOREMA.2.4</u>

Supaya pada setiap vektor vektor kontravarian λ^{i}_{1} dan λ^{i}_{2} saling tegak lurus, maka syarat yang diperlukan dan menentukan adalah persamaan

$$a_{ij}\lambda^{i}_{1}\lambda^{j}_{2} = 0 \qquad (2.58)$$

merupakan identitas dalam x^{i}

Bila vektor vektor λ^i_1 dan λ^i_2 tidak saling tegak lurus pada setiap titik dalam ruang, yaitu bila (2.58) tidak merupakan sebuah identitas, vektor - vektor ini tegak lurus pada setiap titik permukaan yang persamaan nya dalam x diberikan oleh (2.58)

II.3.5. VEKTOR - VEKTOR COVARIAN DAN KOMPONEN - KOMPONEN KONTRAVARIAN SERTA COVARIAN SEBUAH VEKTOR.

Misalkan $f(x^1, x^2, x^3)$ merupakan koordinat sistem sebarang, diketahui bahwa

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f'}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \tag{2.59}$$

Dengan f' merupakan transformasi sistem koordinat x^i ke dalam sistem koordinat x'^i sebarang. Bila dibanding persamaan - persamaan ini dengan (2.40) tampak bahwa $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ dan $\frac{\partial f}{\partial x^2}$ bukan merupakan komponen - komponen sebuah vektor kontravarian dalam sistem koordinat masing masing. Sehingga termasuk klas baru. Fungsi λ_i dan λ'_i dari x dan x' berturut - turut (ini dinyatakan dengan subscrips) dengan hubungan,

$$\lambda_i = \lambda'_j \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \tag{2.60}$$

Bila terdapat dua himpunan fungsi yang berhubungan seperti diatas dan kemudian fungsi fungsi ini dikalikan dengan $\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}$ dan dijumlahkan terhadap i, maka didapat

$$\lambda_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} = \lambda'_j \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x'^k} = \lambda'_j \delta^j_k = \lambda'_k \tag{2.61}$$

Yang hubungan bolak balik seperti halnya vektor - vektor kon-

Kedua himpunan fungsi λ_i dan λ'_i dari x dan x' yang berhubungan seperti dala m (2.60), dikatakan sebagai komponen komponen sebuah kovarian dalam sistem koordinatnya masing -masing Untuk setiap titik dalam ruang terdapat sebuah vektor kovarian. Untuk membedakannya maka indeks sebuah vektor kovarian ditulis sebagai subscrips (dibawah), sedangkan indeks sebuah vektor kontravarian ditulis subscripts (diatas) dan turunan parsielnya diperlakukan berbeda seperti (2.46) dan(2.60). Sepertihalnya vektor - vektor kontravarian , sebuah vektor kovarian keseluruhannya ditentukan oleh komponen - komponen nya dalam satu sistem koordinat dan komponen - komponennya dalam sistem koordinat lain , ditentukan oleh persamaan - persamaan diatas. Juga tidak peduli bagaimana diturunkannya, bila didapat dua himpunan fungsi yang memenuhi persamaan (2.60) atau (2.61), maka besaran yang diterapkan adalah vektor kovarian. Contoh dengan (2.59) disimpulkan bahwa f fungsi sebarang dari x turunan $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ dan turunan - turunan terhadap transformasi f Yaitu x'^i merupakan komponen - komponen sebuah kovarian dalam sistem koordinat masing masing. Vektor kovarian ini disebut juga gradien dari f, sehingga dapat disimpulkan:

TEOREMA .2.5

Gradien sebuah skalar adalah sebuah vektor covarian.

Bila λ^i dan λ'^i merupakan komponen - komponen sebuah vektor kontravarian dalam sistem koordinat x^i dan x'^i maka dengan (2.30) dan (2.44) didapat :

$$a'_{kl}\lambda'^k = a_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x^j}{\partial x'^l}\lambda^h\frac{\partial x'^k}{\partial x'^h}$$

$$= a_{ij} \lambda^h \delta^i_h \frac{\partial x^j}{\partial x'^l}$$

$$= a_{ij} \lambda^i \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} \qquad (2.62)$$

CATATAN

Persamaan ini dari bentuk (2.61) sehingga berarti bahwa kombinasi - kombinasi linier adlah komponen komponen $a_{ij} \lambda^i$ dari vektor kontravarian dalam sistem x' merupakan sebuah vektor kovarian dalam sistemnya masing - masing. Oleh sebab itu dapat disimpulkan bahwa :

TEOREMA. 2.6

Bila λ^i merupakan komponen komponen sebuah vektor kontravarian, maka $a_{ij} \lambda^i$ merupakan kpmponen komponen sebuah vektor covarian.

Dari (2.36) dan (2.63) didapat

$$a'^{ih} \lambda'_i = a^{kl} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^h}{\partial x^l} \lambda_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$$

$$= a^{kl} \lambda_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^h}{\partial x^l}$$

$$= a^{kl} \lambda_j \delta^j_k \frac{\partial x'^h}{\partial x^l}$$

$$= a^{kl} \lambda_k \frac{\partial x'^h}{\partial x^l} \qquad (2.63)$$

Bila hasil ini dibandingkan dengan persamaan (2.44) maka dapat disimpulkan

TEOREMA. 2.7

Jika λ_i dan λ'_i merupakan komponen komponen sebuah vektor covarian dalam sistem koordinatnya masing - masing maka $a^{ij}\lambda_i$ dan $a'^{ij}\lambda'_i$ merupakan komponen komponen sebuah vektor kontravarian dalam sistemnya masing masing.

Sehingga akibat (2.33), bila teorema ini diterapkan ke vektor covarian komponen komponen $a_{ji}\lambda^j$, maka didapat

$$a^{ih} a_{ji} \lambda^j = \delta^h_j \lambda^j = \lambda^h ,$$

ini berarti dari vektor covarian yang diturunkan sesuai teorema(2.6), vektor covarian yang bersangkutan dengan vektor tadi didapat vektor asli λ_i.

Dari hasil hasil diatas disimpulkan bahwa λ^i dan λ_i berturut - turut merupakan komponen komponen kontravarian dan covarian dari vektor yang sama bila

$$\lambda_i = a_{ji}\lambda^j \quad , \quad \lambda^i = a^{ji}\lambda_j \tag{2.64}$$

Dengan himpunan persamaan persamaan saling mengakibatkan satu dengan lainnya.Bila koordinatnya merupakan koordinat kartesius yang akibatnya $a_{ij} = \delta_{ij}$, $a^{ij} = \delta^{ij}$ komponen komponen kontravarian dan covarian yang bersangkutan adalah sama dan merupakan bilangan arah vektor.

Dengan persamaan (2.64) yang pertama dan persamaan (2.33) didapat

$$a^{ij}\lambda_i \lambda_j = a^{ij} a_{hi}\lambda^h a_{kj}\lambda^k$$

$$= \delta^j_h \lambda^h a_{kj}\lambda^k$$

$$= a_{jk} \lambda^j \lambda^k \qquad (2.65)$$

Karena besaran yang terakhir ini adalah sebuah sekalar, maka besaran yang pertama juga merupakan sebuah skalar dengan hasil ini dan teorema (2.2) dapat disimpulkan :

TEOREMA.2.8

Kwadrat panjang sebuah vektor yang komponen covariannya λ_i adalah skalar $a^{ij} \lambda_i \lambda_j$

Dari persamaan(2.60) yaitu

$$\frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \lambda'_j = \lambda_i$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \frac{\lambda'_j}{\lambda_i}$$

disubstitusikan kedalam persamaan (2.39) yaitu

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j = dx^i \longrightarrow \frac{\lambda'_j}{\lambda_i} dx'^j = dx^i$$

dan sebagai akibat (2.13) maka dapat disimpulkan

$$\lambda_i \, dx^i = \lambda'_j \, dx'^j$$

dengan $\lambda_i dx^i$ adalah sebuah skalar sehingga persamaannya

$$\lambda_i \, dx^i = 0 \qquad (2.66)$$

Akan berbentuk sama dalam sistem koordinat sebarang, bila d_1x^i

persamaan diatas yang tidak proposional (sebanding) dengan persamaan

$\lambda_i d_1 x^i = 0$, $\lambda_i d_2 x^i = 0$, dan (2.66) terdapat sebuah penyelesaian berbentuk

$$dx^i = c_1 d_1 x^i + c_2 d_2 x^i$$

Sehingga pada setiap titik dalam ruang setiap arah dx^i yang memenuhi persamaan (2.66) ada dalam bidang yang ditentukan oleh dan arah arah $d_1 x^i$ dan $d_2 x^i$. Akibatnya sebuah vektor covarian menentukan sebuah bidang pada setiap titik dalam ruang. Tidak setiap persamaan berbentuk (2.66) mengandung sebuah penginte-gralan yaitu sebuah fungsi t dari x, sedemikiaan rupa sehingga

$$t \lambda_i \, dx^i = d\varphi \qquad (2.67)$$

Dengan φ merupakan suatu fungsi dari x. Tapi bila sebuah faktor pengintegralan sedemikian ituada, maka φ = konstan merupakan hasil integral dari persamaan $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i = 0$ dan didapat persamaan yang ekivalen dengan (2.66).Persamaan ini merupakan syarat bahwa setiap himpunan differensil yang memenuhi persamaan asli , menentukan pada sebuah titik sebuah garis singgung, ke permukaan φ = konstan yang melalui titik tersebut.

Jadi bila persamaan (2.66) mengandung sebuah faktor penginte - gralan bidang - bidang yang ditentukan oleh vektor λ_i adalah merupakan bidang bidang singgung pada sebuah famila permukaan

Pandang sifat - sifat metrik ruang yang berdasarkan bentuk dasar $a_{ij} dx^j$ dan λ_i dalam (2.66) diganti dengan $a_{ij} \lambda^j$ maka didapat :

$$a_{ij} \lambda^j \, dx^i = 0$$

Dari teorema (2.4) disimpulkan bahwa arah - arah dx^i yang mempunyai persamaan (2.66) tegak lurus dengan vektor λ

Akibatnyapada setiap titik λ_i merupakan komponen - komponen covarian dari normal ke bidang yang ditentukan oleh λ_i . Kemudian bila persamaan mengandung sebuah vektor pengintegral-an λ_i merupakan komponen covarian dari normal ke permukaan permukaan φ = konstan.Sehingga dapat disimpulkan :

TEOREMA.2.9

Bila sebuah vektor covarian merupakan gradien sebuah fungsi φ , atau komponen komponen sebanding dengan komponen - komponen sebuah gradien, medan vektor terdiri dari vektor - vektor normal ke permukaan - permukaan dengan konstan.