BAB III

EKOLOGI

Yang dimaksud Ekologi adalah suatu ilmu yang mempelajari hubungan mahluk hidup dengan lingkungannya. Dalam alam ini tidak ada mahluk hidup yang dapat hidup sendiri. Mahluk hidup senantiasa akan bergantung kepada mahluk hidup lainnya,dan lingkungannya dimana ia mengalami kehidupan itu.

Pengaruh timbal-balik antara mahluk hidup dan lingkungannya ,sebagai contoh untuk lebih memahami pengaruh timbal-balik diantara mahluk hidup dengan lingkungannya kita perhatikan keadaan berikut:

Didalam suatu hutan yang subur,ada beberapa ekoor harimau,mereka hidup tentram dengan serba kecukupan,karena fasilitas-fasilitas untuk hidup ada dihutan itu. Sebagai bahan makanan,mereka biasa memangsa menjangan (atau binatang/mahluk yang lain) yang juga sebagai penghuni hutan yang sama(daerah yang sama). Menjangan itu sedemikian banyaknya sehingga cukup untuk bahan makanan harimau. Sedang menjangan dapat hidup subur dihutan , hal ini karena keadaan hutan yang subur,banyak tumbuh-tumbuhan yang menjadi makanannya.

Jelaslah disini bahwa harimau dapat hidup dihutan, karena dda menjangan sebagai bahan makanan mereka, sedakan menjangan dapat hidup,karena alam memberikan keadaan yang memungkinkan bagi tumbuh-tumbuhan utuk hidup dengan subur. Faktor-faktor alam itu misalnya curah hujan, suhu , udara ,dan lain sebagainya.

Secara singkat hubungan-hubungan tersebut terjadi karena adanya rangkainn-rangkaian sebagai berikut : faktor alam,tumbuh-tumbuhan,menjangan dan harimau.

3.1 SATU SPESIES

Tingkat kelahiran dari populasi mahluk biasa dinyatakan dengan istilah angka kelahiran per 1000 dalam satu tahun. Angka 1000 hanya digunakan untuk menghindari temdosimal. Misalkan tingkat kelahiran 17/1000 boleh dinyatakan 0,017 per individu. Periode dalam satu tahun dapat juga diganti dengan satu minggu,satu hari,satu detik atau setiap unit waktu yang lain.
Hal ini dapat juga digunakan untuk tingkat kematian dan tingkat pertumbuhan.

Tingkat pertumbuhan adalah pertambhahan populasi per unit waktu dibagi jumlah populasi pada awal periode.

Misal populasi $y(t)$ pada waktu t berubah menjadi $y(t) + \Delta y$ dalam interval waktu $[t, t+\Delta t]$, maka tingkat pertumbuhan(perkembangan) rata-rata adalah

$$\frac{\Delta y(t)}{y(t).\Delta t} = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.1)$$

Asumsikan $y(t)$ mempunyai derivatif kontinu,dan kita ambil limitnya,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y(t)}{y(t).\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{y(t)} = \frac{y'(t)}{y(t)} \quad \ldots\ldots\ldots (3.1.2)$$

persamaan(3.1.2) fungsi dari t adalah tingkat pertumbuhan(perkembangan) dari populasi pada saat t.

Asumsi yang sederhana adalah tingkat pertumbuhan yang konstan . Dalam hal ini jika angka kelahiran dan angka kematian dalam periode Δt yang kecil, mempunyai perbandingan tetap terhadap jumlah populasi.

Perbandingan-perbandinganini merupakan fungsi linier dari Δt, tetapi tidak tergantung dari besar populasi.

Jadi pertambahannya menjadi $\alpha . y . \Delta t$, dimana α adalah sebuah konstan, oleh karena itu

$$\alpha = \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{d \ln y(t)}{dt} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.3)$$

(3.1.3) mempunyai penyelesaian(solusi) sebagai berikut

$$\alpha = \frac{d \ln y(t)}{dt}$$

$$d \ln y(t) = \alpha \, dt$$

ambil integralnya

$$\int d \ln y(t) = \int \alpha \, dt$$

$$\ln y(t) = \alpha t + c \qquad c = \text{konstante sembarang}$$

$$y(t) = e^{\alpha t + c}$$

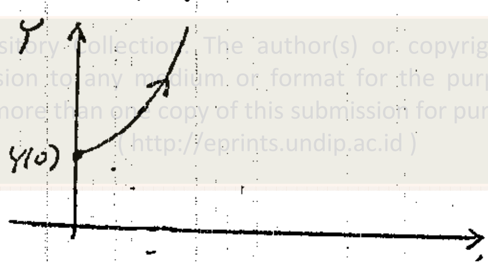
untuk t = 0 diperoleh $y(0) = e^{c}$, jadi

$$y(t) = e^{\alpha t} y(0) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.4)$$

(3.1.4) adalah rumus pertumbuhan tak terbatas.

Jika (3.1.4) diambil limitnya untuk $t \to \infty$ diperoleh

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} e^{\alpha t} y(0) = +\infty$$



Tingkat pertumbuhan dapat tergantung banyak hal, misalnya tergantung pada persediaan makanan σ, dan σ adalah konstan positip.

Dan ada σ_0 minimum untuk menahan jumlah populasi agar tidak punah. Hal ini ada tiga kemungkinan:

1. Jika $\sigma > \sigma_0$,maka tingkat pertumbuhan positip,be r arti bahwa ada pertambahan(perubahan naik)populasi
2. Jika $\sigma = \sigma_0$,maka tingkat pertumbuhannya nol,berarti bahwa jumlah populasi tetap konstan.
3. Jika $\sigma < \sigma_0$,maka tingkat pertumbuhan nya negatif, berarti bahwa jumlah populasi makin berkurang.

Dengan ketiga kemungkinan diatas,maka tingkat pertumbuhan $\sigma - \sigma_0$ adalah

$$\alpha = a(\sigma - \sigma_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.5)$$

dimana $a > 0$

Dengan (3.1.5),persamaan(3.1.3) menjadi

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = a(\sigma - \sigma_0)$$

$$y'(t) = a(\sigma - \sigma_0)y(t)$$

$$\frac{d\,y(t)}{dt} = a(\sigma - \sigma_0)y(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.6)$$

dimana a dan σ_0 konstan,dan σ adalah sebuah parameter, tergantung pada lingkungan yang khusus tetapi konstan untuk lingkungan pada umumnya.

Penyelesaian dari (3.1.6) sesuai dengan (3.1.4),diperoleh

$$y(t) = e^{a(\sigma - \sigma_0)t}.y(0) \quad \ldots\ldots\ldots(3.1.7)$$

Jadi populasi bertambah tanpa batas,tetap, atau mendekati nol, ini tergantung dari $\sigma > \sigma_o$, $\sigma = \sigma_o$, atau $\sigma < \sigma_o$.

Jika $y(t) \dashrightarrow 0$ ini dimaksud populasimati dalam waktu tertentu.

Pada hakekatnya, sebuah populasi tak dapat bertambah tanpa batas. Untuk lebih jelasnya, diasumsikan bahwa jika nilai populasi melampauiharga tertentu η , tingkat pertumbuhan adalah negatip. Harga η disebut batas populasi, dimana tidak perlu batas atas dari pobulasi. Sebab-sebab dari tingkat pertumbuhan yang negatip antara lain berkurangnya supplai makanan.

Adakan asumsi sederhana, dan misalkan tingkat pertumbuhan sama dengan $\eta - y$

$$\alpha = c(\eta - y) \qquad c > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.8)$$

Dari(3.1.3) dan (3.1.8) diperoleh

$$\frac{d\,y(t)}{dt} = c(\eta - y).y(t) \qquad \eta > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.9)$$

yang mempunyai penyelesaian

$$\frac{d\,y(t)}{dt} = c\eta y - cy^2$$

$$\frac{d\,y(t)}{\eta y - y^2} = c\ dt$$

masing-masing ruas diambil integralnya, diperoleh

$$\int \frac{d\,y}{\eta y - y^2} = c\int dt$$

$$-\int \frac{d\,y}{y^2 - \eta y} = c\int dt$$

$$-\int \frac{d\,y}{y^2 - \eta y + (-\frac{1}{2}\eta)^2 - \frac{1}{4}\eta^2} = c\int dt$$

$$-\int \frac{d\,y}{(y - \frac{1}{2}\eta)^2 - (\frac{1}{2}\eta)^2} = c\int dt$$

$$-\frac{1}{\eta}\ln\left|\frac{(y-\frac{1}{2}\eta)-\frac{1}{2}\eta}{(y-\frac{1}{2}\eta)+\frac{1}{2}\eta}\right| = ct + k \quad \text{,dimana } k\text{=konstante}$$

$$-\ln\left|\frac{(y-\eta)}{y}\right| = \eta ct + \eta k$$

$$\left|\frac{y-\eta}{y}\right| = e^{-\eta ct + k'}$$

$$y - \eta = e^{-\eta ct + k'} . y$$

$$y(1 - e^{-\eta ct + k'}) = \eta$$

$$y = \frac{\eta}{1 - e^{-\eta ct + k'}} = \frac{\eta}{1 - e^{-\eta ct} . e^{k'}}$$

untuk $t = 0$, diperoleh $y(0) = \dfrac{\eta}{1 - e^{k'}}$

$$e^{k'} = 1 - \frac{\eta}{y(0)}$$

dengan mensubstitusi $e^{k'}$ ke persamaan diatas, diperoleh

$$y(t) = \frac{\eta}{1 - e^{-\eta ct} . (1 - \frac{\eta}{y(0)})}$$

$$= \frac{\eta}{1 - e^{-\eta ct} + \frac{\eta}{y(0)} e^{-\eta ct}}$$

$$y(t) = \frac{\eta . y(0)}{\eta e^{-\eta ct} + (1 - e^{-\eta ct}) y(0)} \quad \text{.......(3.1.10)}$$

persamaan (3.1.10) adalah rumus dari pertumbuhan terbatas

Akan diselidiki titik kesetimbangan dari (3.1.9)

$$\frac{dy}{dt} = c(\eta - y)y$$

$$0 = c(\eta - y)y$$

$$y_1 = 0 \quad , \quad y_2 = \eta$$

Kesetimbangan pada $y = 0$ adalah tidak stabil, karena turunan $c(\eta - y)y$ pada $y=0$ positip, Sedangkan kesetimbangan pada $y=\eta$ adalah stabil asimptotis, karena turunan

$c(\eta - y)y$ pada $y = \eta$ negatip. Hal ini dapat juga dijelaskan dengan mengambil limitnya dari persamaan(3.1.10)

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\eta y(0)}{\eta e^{-\eta ct} + (1 - e^{-\eta ct})y(0)}$$

$$= \eta$$

3.2 Persamaan Volterra dan Lotka

Pandang spesies parasit adalah y,dan spesies mangsa adalah x.

Populasi mangsa adalah jumlah persediaan makanan untuk parasit pada setiap keadaan. Jumlah makanan dikonsumen(dibutuhkan)oleh parasit dalam suatu waktu tertentu adalah xy. Sedangkan persediaan makanan untuk parasit pada waktu t adalah x(t).

Menurut persamaan(3.1.6),maka diperoleh

$$\frac{dy}{dt} = a(\sigma - \sigma_0)y$$

$$\frac{dy}{dt} = a(x - \sigma_0)y \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.1)$$

dimana a, σ_0 adalah konstan yang lebih besar nol.

Persamaan(3.2.1) dapat ditulis

$$\frac{dy}{dt} = axy - a\sigma_0 y$$

dengan mengganti $a = C$, $a\sigma_0 = D$,maka persamaan(3.2.1) menjadi

$$\frac{dy}{dt} = Cxy - Dy \qquad C > 0,\ D > 0 \quad \ldots\ldots\ldots(3.2.2)$$

Sekarang kita tinjau tingkat perkembangan mangsa.

Spesies mangsa diasumsikan mempunyai persediaan makanan yang cukup untuk menambah jumlah populasi dalam ketidak hadiran parasit. Oleh karena itu mangsa tergantung pada persamaan differensial

$$\frac{dx}{dt} = Ax - Byx \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3.2.3)$$

dimana $A > 0$, $B > 0$

Bila persamaan (3.2.2) dan (3.2.3) digabungkan, maka diperoleh

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax - Byx \\ \frac{dy}{dt} &= Cxy - Dy \end{aligned}\right\} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (3.2.4)$$

dimana A adalah tingkat kelahiran mangsa, dan tingkat kematian mangsa tergantung dari besarnya populasi parasit yaitu By, sedangkan D adalah tingkat kematian parasit dan tingkat kelahiran kelahiran parasit tergantung dari besarnya populasi mangsa, yaitu Cx.

Persamaan (3.2.4) disebut persamaan VOLTERRA dan LOTKA.

Sekarang akan diselidiki titik-titik kesetimbangan dari persamaan (3.2.4).

$$\begin{aligned} 0 &= Ax - Byx \\ &= (A - By)x \\ 0 &= Cxy - Dy \\ &= (Cx - D)y \end{aligned}$$

didapatkan titik kestimbangan (0,0) dan (D/C, A/B)

Sekarang kita tinjau dengan linearisasi disekitar (0,0)

$$\frac{dx}{dt} = x\,\frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x} + y\,\frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y} = x.A + 0$$

$$\frac{dy}{dt} = x\,\frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} + y\,\frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} = 0 + (-D)y$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax \\ \frac{dy}{dt} &= -Dy \end{aligned}\right\} 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.5)$$

Persamaan karakteristiknya

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & 0 \\ 0 & -D - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(A - \lambda)(-D - \lambda) = 0$$

$$(A - \lambda)(D - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = A \;,\; \lambda_2 = -D$$

Karena $A > 0$, $D > 0$,maka akar-akar dari persamaan karakteristik real dan berlainan tanda ,hal ini mengakibatkan titik (0,0) tidak stabil dan trayektorinya berupa titik pelana.

Disekitar (D/C,A/B)

$$\frac{dx}{dt} = x\frac{\partial f_1(D/C,A/B)}{\partial x} + y\frac{\partial f_1(D/C,A/B)}{\partial y} = x(A-A) + y(-B.D/C)$$

$$\frac{dy}{dt} = x\frac{\partial f_2(D/C,A/B)}{\partial x} + y\frac{\partial f_2(D/C,A/B)}{\partial y} = x(C.A/B) + y(C.D/C - D)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{BD}{C}y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{AC}{B}x \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.6)$$

Persamaan karakteristiknya

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{BD}{C} \\ \frac{AC}{B} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + AD = 0$$

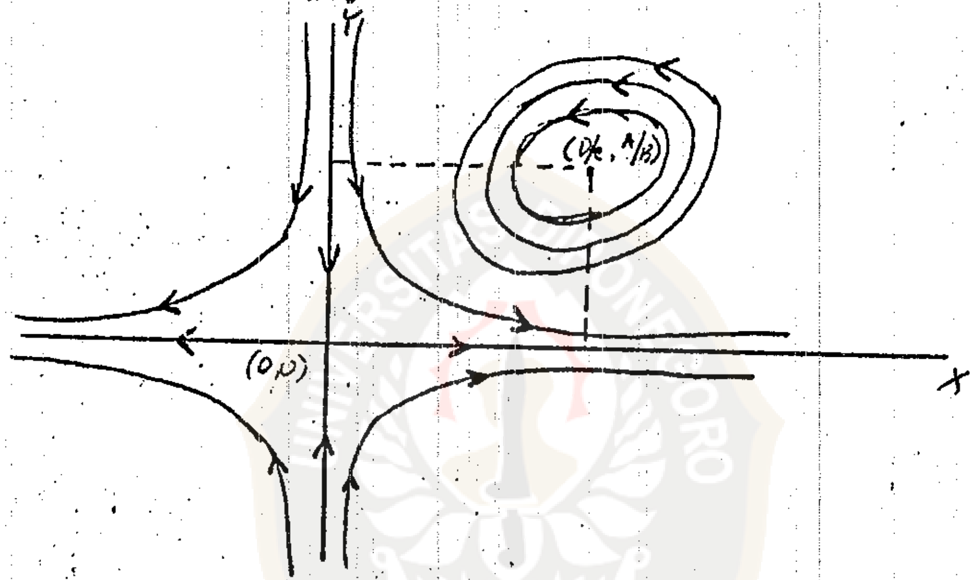
$$\lambda^2 = -AD$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-AD}$$

$A, D > 0$

$$\lambda = \pm\, i\sqrt{AD}$$

Akar-akar dari persamaan karakteristik imajiner murni, maka titik (D/C,A/B) adalah stabil tetapi tidak stabil asimptotis,dengan trayektorinya berupa famili ellips dengan pusat titik tersebut.



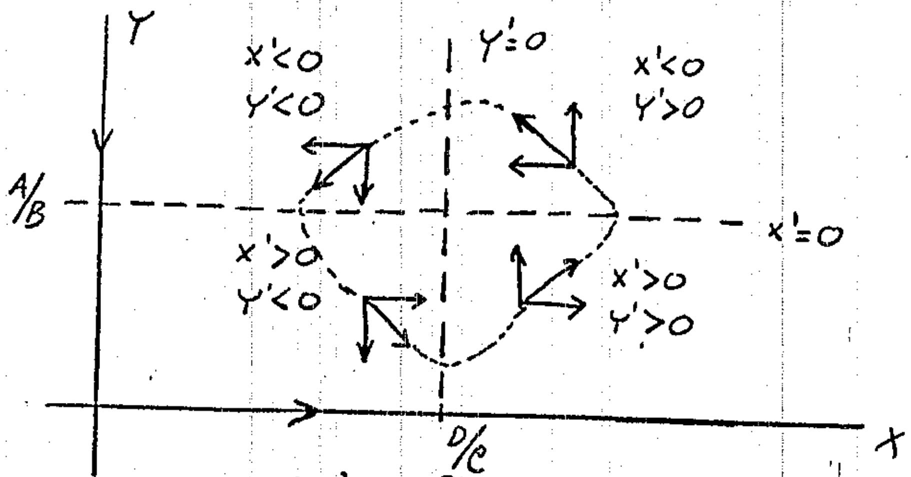
gambar 1

Kita tinjau gambar dari persamaan(3.2.4) dengan

$x' = 0 \qquad y = A/B$

$y' = 0 \qquad x = D/C$

Yang membagi daerah $x > 0$, $y > 0$ menjadi empat kuadran



gambar 2

Sekarang kita tinjau kurve trayektori (x(t),y(t)) pada kuadran I. Misal trayektori (x(t),Y(t)) mulai pada sembarang titik (u,v).

$$\left.\begin{array}{ll} x(0) = u > D/C > 0 & \text{dimana } t = 0 \\ y(0) = v > A/B > 0 & \text{dimana } t = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(3.2.7)$$

Ada interval $[0,\tau) = J$ sehingga ($x(t),y(t)$) $\in$ kuadran I untuk $0 \leqslant t < \tau$. Ambil

$$A - Bv = -r < 0$$

$$Cu - D = s > 0$$

Selama $t \in J$, $x(t)$ menurun dan $y(t)$ bertambah, sebabnya

$$\frac{dx}{dt} = Ax - Byx$$

$$x' = (A - By)x$$

$$\frac{x'}{x} = A - By$$

$$\frac{d \ln x(t)}{dt} = A - By \leqslant -r$$

$$d \ln x(t) \leqslant -rdt$$

diambil integralnya menghasilkan

$$\ln x(t) \leqslant -rt + k$$

$$x(t) \leqslant e^{-rt + k}$$

$$x(t) \leqslant u\, e^{-rt}$$

$$\frac{dy}{dt} = Cxy - Dy$$

$$y' = (Cx - D)y$$

$$\frac{y'}{y} = Cx - D$$

$$\frac{d \ln y(t)}{dt} = Cx - D \geqslant s$$

$$d \ln y(t) \geqslant s\, dt$$

$$\ln y(t) \geqslant st + k \qquad k = \text{konstante}$$

$$y(t) \geqslant e^{st + k}$$

$$y(t) \geqslant ve^{st}$$

Karena itu

$$D/C \leqslant x(t) \leqslant u\, e^{-rt} \quad \ldots\ldots\ldots (3.2.8a)$$
$$A/B \geqslant y(t) \geqslant v\, e^{st} \quad \ldots\ldots\ldots (3.2.8b)$$

untuk $0 \leq t < \tau$. Dari persamaan (3.2.8a) τ adalah finite. Dari (3.2.8a) dan (3.2.8b) untuk $t \in J$, $(x(t), y(t))$ tidak boleh keluar dari daerah

$$\left.\begin{array}{l} D/C \leq x(t) \leqslant u \\ A/B \leq y(t) \leqslant ve^{s\tau} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3.2.9)$$

$(x(\tau), y(\tau))$ didefinisikan dan berada dalam daerah (3.2.9), karena $x(t)$ adalah menurun, $x(\tau) = D/C$. Jadi trayektori $(x(t), y(t))$ masuk dalam kuadran II.

Ambil titik sembarang pada kuadran II ,misal (u_1, v_1)

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = u_1 < D/C > 0 \quad \text{dimana } t = 0 \\ y(0) = v_1 > A/B > 0 \quad \text{dimana } t = 0 \end{array}\right\} \ldots (3.2.10)$$

Ada interval $[0, \tau) = J$ sehingga $(x(t), y(t)) \in$ kuadaran II untuk $0 \leq t < \tau$

Ambil $A - Bv_1 = -p < 0$

$Cu_1 - D = -q < 0$

Selama $t \in J$, $x(t)$ menurun dan $y(t)$ menurun ,karena:

$$\frac{dx}{dt} = Ax - Byx$$

$$\frac{x'}{x} = (A - By)$$

$$\frac{d \ln x(t)}{dt} = A - By \leq -p$$

$$\frac{d \ln x(t)}{dt} \leqslant -p$$

$$d \ln x(t) \leqslant -p\, dt$$

diambil integralnya menghasilkan

$$\ln x(t) \leq -pt + k$$

$$x(t) \leqslant e^{-pt + k}$$

$$x(t) \leqslant e^{-pt}x(0)$$

$$x(t) \leqslant u_1 e^{-pt}$$

$$\frac{dy}{dt} = Cxy - Dy$$

$$\frac{y'}{y} = (Cx - D)$$

$$\frac{d \ln y(t)}{dt} = Cx - D \leqslant -q$$

$$d \ln y(t) \qquad -qdt$$

diambil integralnya menghasilkan

$$\ln y(t) \leqslant -qt + k$$

$$y(t) \leqslant e^{-qt+k}$$

$$y(t) \leqslant e^{-qt}y(0)$$

$$y(t) \leqslant v_1 e^{-qt}$$

Karena itu

$$D/C \leqslant x(t) \leqslant u_1 e^{-pt} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.11a)$$

$$A/B \leqslant y(t) \leqslant v_1 e^{-qt} \qquad \ldots\ldots\ldots(3.2.11b)$$

Untuk $0 \leqslant t < \tau$ dari (3.2.11a) dan (3.2.11b) dapat diketahui bahwa trayektori ($x(t), y(t)$) tidak boleh keluar dari daerah

$$\begin{array}{l} D/C \geqslant x(t) \geqslant u_1 \\ A/B \leqslant y(t) \leqslant v_1 \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.12)$$

Karena itu ($x(t)$, $y(\tau)$) didefinisikan dan berada dalam daerah(3.2.12),akibatnya $y(t)$ adalah menurun $y(\tau) = A/B$
Jadi trayektori ($x(t)$, $y(t)$) masuk ke kuadran III

Ambil titik sembarang pada kuadran III ,yaitu(u_2, v_2)

$$\begin{array}{l} x(0) = u_2 < D/C > 0 \\ y(0) = v_2 < A/B > 0 \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.13)$$

Ada interval $[0,\tau) = J$ sehingga ($x(t)$, $y(t)$) $\in$ kuadran III untuk $0 \leqslant t < \tau$

Ambil $\quad A - Bv_2 = a > 0$

$\qquad Cu_2 - D = -b < 0$

Selama $t \in J$, $x(t)$ bertambah dan $y(t)$ menurun, karena

$$\frac{dx}{dt} = Ax - Byx$$

$$\frac{x'}{x} = A - By$$

$$\frac{d \ln x(t)}{dt} = A - By \geqslant a$$

$$\frac{d \ln x(t)}{dt} \geqslant a$$

$$d \ln x(t) \geqslant a\, dt$$

diambil integralnya diperoleh

$$\ln x(t) \geqslant at + k$$

$$x(t) \geqslant e^{at + k}$$

$$x(t) \geqslant e^{at}\, x(0)$$

$$x(t) \geqslant u_2 e^{at}$$

$$\frac{dy}{dt} = Cxy - Dy$$

$$\frac{y'}{y} = Cx - D$$

$$\frac{d \ln y(t)}{dt} = Cx - D \leqslant -b$$

$$\frac{d \ln y(t)}{dt} \leqslant -b$$

$$d \ln y(t) \leqslant -b\, dt$$

diambil integralnya diperoleh

$$\ln y(t) \leqslant -bt + k$$

$$y(t) \leqslant e^{-bt + k}$$

$$y(t) \leqslant e^{-bt} y(0)$$

$$y(t) \leqslant v_2 e^{-bt}$$

Karena itu

$$D/C \geqslant x(t) \geqslant u_2 e^{at} \qquad \text{...........}(3.2.14a)$$

$$A/B \leqslant y(t) \leqslant v_2 e^{-bt} \qquad \text{...........}(3.2.14b)$$

Untuk $0 \leqslant t < \tau$, dari (3.2.14a) dan (3.2.14b) dapat diketahui bahwa trayektori ($x(t), y(t)$) tidak keluar dari daerah

$$\left.\begin{aligned} D/C \geqslant x(t) \geqslant u_2 e^{a\tau} \\ A/B \geqslant y(t) \geqslant v_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{...........}(3.2.15)$$

Karena itu ($x(\tau), y(\tau)$) didefinisikan dan berada dalam daerah (3.2.15), akibatnya $x(t)$ bertambah, $x(\tau) = D/C$

Jadi trayektori ($x(t), y(t)$) masuk kedalam kuadran IV

Ambil titik (u_3, v_3) sebarang pada kuadran IV, sehingga untuk $t = 0$ dipenuhi

$$x(0) = u_3 > D/C > 0$$

$$y(0) = v_3 < A/B > 0$$

Ada interval $[0, \tau) = J$, sehingga $(x(t), y(t)) \in$ kuadran IV untuk $0 \leqslant t < \tau$.

Ambil $\quad A - Bv_3 = c > 0$

$\qquad\quad Cu_3 - D = d > 0$

Selama $t \in J$, $x(t)$ bertambah dan $y(t)$ bertambah, karena

$$\frac{dx}{dt} = Ax - Byx$$

$$\frac{x'}{x} = A - By$$

$$\frac{d \ln x(t)}{dt} = A - By \geqslant c$$

$$\frac{d \ln x(t)}{dt} \geqslant c$$

$$d \ln x(t) \geqslant c\,dt$$

dengan mengintegralkan diperoleh

$$\ln x(t) \geqslant ct + k$$

$$x(t) \geqslant e^{ct + k}$$

$$x(t) \geqslant e^{ct}x(0)$$

$$x(t) \geqslant u_3e^{ct}$$

$$\frac{dy}{dt} = Cxy - Dy$$

$$\frac{y'}{y} = Cx - D$$

$$\frac{d \ln y(t)}{dt} = Cx - D \geqslant d$$

$$d \ln y(t) \geqslant d\ dt$$

dengan mengintegralkan diperoleh

$$\ln y(t) \geqslant dt + k$$

$$y(t) \geqslant e^{dt + k}$$

$$y(t) \geqslant e^{dt}y(0)$$

$$y(t) \geqslant v_3e^{dt}$$

Karena itu

$$D/C \geqslant x(t) \geqslant u_3e^{ct} \qquad \text{.........(3.2.16a)}$$

$$A/B \geqslant y(t) \geqslant v_3e^{dt} \qquad \text{.........(3.2.16b)}$$

Untuk $0 \leqslant t < \tau$, dari (3.2.16b) didapatkan τ finite.

Dari (3.2.16a) dan (3.2.16b), $t \in J$, ($x(t), y(t)$) berada dalam daerah

$$D/C \leqslant x(t) \leqslant u_3e^{c\tau}$$

$$A/B \geqslant y(t) \geqslant v_3e^{d\tau} \qquad \text{..........(3.2.17)}$$

Oleh karena itu , ($x(\tau), y(\tau)$) didefinisikan dan berada dalam daerah (3.2.17), akibatnya $y(t)$ berbambah, $y(\tau)=A/B$ jadi trayektori masuk menuju ke kuadran I, demikian juga seterusnya.

3.2.1 Fungsi Liapunov dari persamaan Voltorra & Lotka

Dalam sub ini akan diperlihatkan fungsi Liapunov untuk menentukan sifat suatu trayektori disekitar titik kritis dari persamaan Volterra & Lokka.

Dengan pertolongan separasi variabel dari persamaan differensial parsiel kita akan mencari fungsi yang berbentuk

$$H(x,y) = F(x) + G(y)$$

$$H'(x,y) = \frac{d\,H(x,y)}{dt}$$

$$= \frac{d\,(\,F(x) + G(y)\,)}{dt}$$

$$H'(x,y) = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dG}{dy}\frac{dy}{dt}$$

Dari persamaan (3.2.4),diperoleh

$$H'(x,y) = \frac{dF}{dx}(Ax - Byx) + \frac{dG}{dy}(Cxy - Dy)$$

$$H'(x,y) = x\frac{dF}{dx}(A - By) + y\frac{dG}{dy}(Cx - D)$$

Didapatkan $H' \equiv 0$,sehingga memberikan

$$\frac{x\,dF/dx}{Cx - D} = \frac{y\,dG/dy}{By - A}$$

Karena x dan y independent variabel,hal ini terjadi jika dan hanya jika

$$\frac{x\,dF/dx}{Cx - D} = \frac{y\,dG/dy}{By - A} = \text{konstan}$$

Dengan mengambil konstan = 1 ,diperoleh

$$\frac{dF}{dx} = C - \frac{D}{x}$$

$$\frac{dG}{dy} = B - \frac{A}{y}$$

$$\frac{dF}{dx} = C - \frac{D}{x}$$

$$\int dF = \int Cdx - \int \frac{D}{x}\, dx$$

Dengan integral didapat

$$F(x) = Cx - D\ \ln x$$

$$\frac{dG}{dy} = B - \frac{A}{y}$$

$$\int dG = \int Bdy - \int \frac{A}{y} dy$$

Dengan integral didapat

$$G(y) = By - A\ln y$$

$$H(x,y) = F(x) + G(y)$$

$$H(x,y) = Cx - D\ \ln x + By - A\ \ln y \qquad \text{......(3.2.18)}$$

Didefinisikan untuk $x > 0,\ y > 0$ persamaan (3.2.18) konstan pada trayektori dari (3.2.4)

Persamaan (3.2.18) disebut fungsi Liapunov.

Untuk mengetahui sifat titik kesetimbanganya dapat dicari dengan ketentuan-ketentuan berikut ini:

Jika fungsi $H(x,y)$ didefinisikan dalam domainyang memuat titik asal sehingga

1. $H(0,0) = 0 \qquad H(x,y) > 0$
2. $\dfrac{d\ H(0,0)}{dt} = 0 \qquad \dfrac{d\ H(x,y)}{dt} \leq 0$

   untuk $(x,y) \neq (0,0)$ titik asal adalah titik stabil.

   Jika dipenuhi

1. $H(0,0) = 0$; $H(x,y) > 0$ untuk $(x,y) \neq (0,0)$
2. $\dfrac{dH(0,0)}{dt} = 0$; $\dfrac{dH(x,y)}{dt} < 0$ untuk $(x,y) \neq (0,0)$

   maka titik asal adalah stabil asimptotis, dan jika dipenuhi

1. $H(0,0) = 0$; $H(x,y) > 0$ untuk $(x,y) \neq (0,0)$
2. $\dfrac{dH(0,0)}{dt} = 0$; $\dfrac{dH(x,y)}{dt} > 0$ untuk $(x,y) \neq (0,0)$

maka titik asal adalah tidak stabil.

Teorema 3.2.1

Setiap trayektori dari persamaan Volterra - Lotka (3.2.4) adalah sebuah lengkungan tertutup.(kecuali di z dan titik asal)

Bukti:

Pandang sebuah titik $w = (u,v)$, $u > 0$, $v > 0$, $w \neq z$ dimana $z = (D/C, A/B)$, maka ada barisan infinite $\ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots$ sehingga $\phi_{t_n}(w)$ pada garis $x = D/C$

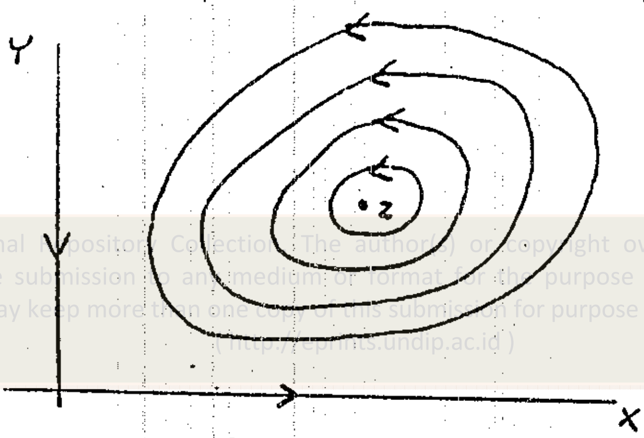
dan $t_n \longrightarrow \infty$ untuk $n \longrightarrow \infty$

$t_n \longrightarrow -\infty$ untuk $n \longrightarrow -\infty$

Jika w tidak berada dalam lengkungan tertutup, titik-titik $\phi_{t_n}(w)$ adalah monotone along garis $x = D/C$. Oleh karena itu tidak ada limit cycle, baik $\phi_{t_n}(w) \longrightarrow z$ untuk $n \longrightarrow \infty$, maupun $t_n(w) \longrightarrow z$ untuk $n \longrightarrow \infty$

Karena H adalah konstan pada trayektori w ,maka $H(w) = H(z)$,tetapi paling tidak berlainan dari $H(w)$.

Dengan adanya teorema 3.2.1 kita dapatkan bahwa setiap syaratawal populasi diberikan ($x(0),y(0)$) dengan $x(0) \neq 0$ dan $y(0) \neq 0$,demikian juga lain dari pada z ,populasi dari parasit dan mangsa akan bergerak secara melingkar.



gambar 3

3.2.2 Persamaan Volterra - Lotka dengan pertumbuhan terbatas

Pandang sistim

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (A - By - \lambda x) x \\ \frac{dy}{dt} &= (Cx - D - \mu y) y\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3.2.19)$$

Konstan A ,B,C,D, λ dan μ semua positip

Kuadran I (x >0, y >0) dibagi menjadi daerah-daerah oleh dua garis lurus :

$$k : \quad A - By - \lambda x = 0$$

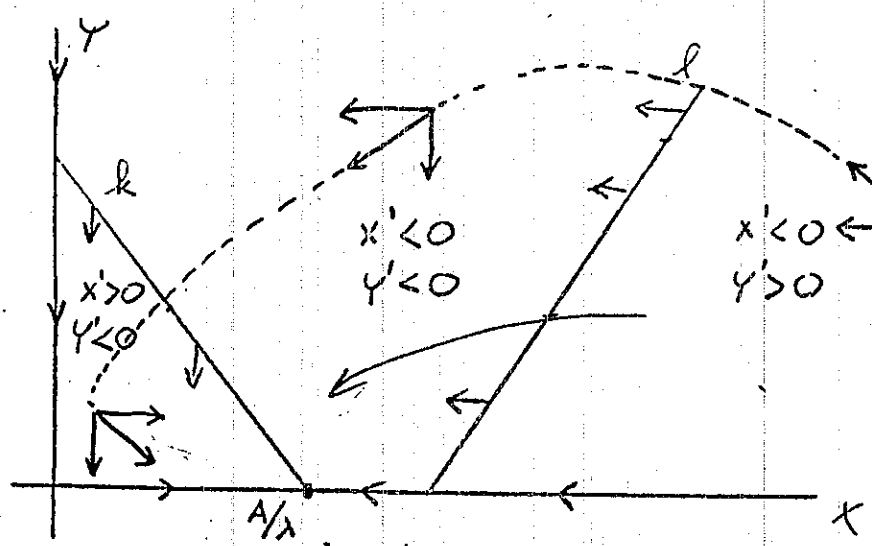
$$l : \quad Cx - D - \mu y = 0$$

dimana k sepanjang garis $x' = 0$ dan l sepanjang garis $y' = 0$.

Ada dua kemungkinan,apakah garis-garis tersebutberpotongan atau tidak.

Misalkan garis k dan l tidak berpotongan.

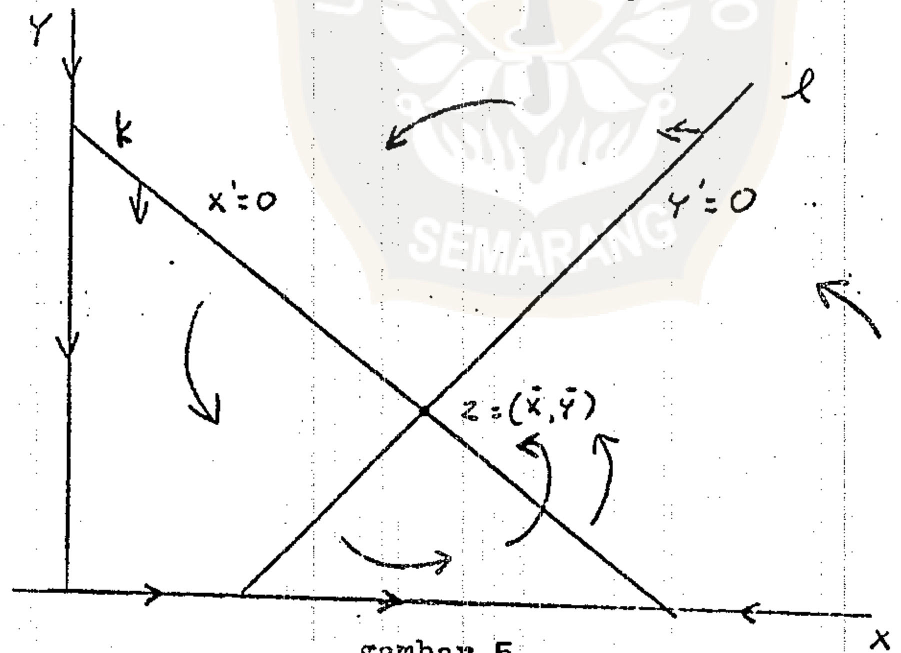
Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut:



gambar 4

Seperti kita ketahui keadaan yang tidak mungkin terjadi adalah antara parasit dan mangsa bertambah pada saat yang sama. Jika mangsa berada diatas batas populasinya maka pasti populasinya menurun dan setelah itu populasi parasit juga mulai menurun (yaitu pada saat trayektori memotong garis l). Setelah titik tersebut populasi mangsa tidak dapat naik melewati A/λ dan demikian juga populasi parasit bertambah turun. Jika trayektori memotong garis k, populasi mangsa naik lagi, tetapi tidak melewati harga A/λ, sedangkan populasi parasit makin bertambah turun. Sehingga pada akhirnya populasi parasit tidak ada (parasit $\longrightarrow$ 0) dan populasi mangsa stabil pada A/λ (mangsa $\longrightarrow$ A/λ).

Sekarang kita pandang garis k dan l berpotongan di $z = (\bar{x}, \bar{y})$ dalam kuadran I $(x > 0, y > 0)$. Seperti kita ketahui bahwa z adalah titik kesetimbangan.



gambar 5

Sekarang akan kita tinjau titik kesetimbangan z, yang mempunyai titik koordinat sebagai berikut:

$$\lambda x + By = A$$

$$Cx - \mu y = D$$

sistim persamaan linier ini kita selesaikan dengan cara matriks

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A & B \\ D & -\mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & B \\ C & -\mu \end{vmatrix}} = \frac{-\mu A - BD}{-\lambda\mu - BC} = \frac{\mu A + BD}{\lambda\mu + BC}$$

$$\bar{y} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & A \\ C & D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & B \\ C & -\mu \end{vmatrix}} = \frac{\lambda D - AC}{-\mu\lambda - BC} = \frac{AC - \lambda D}{\mu\lambda + BC}$$

Pandang sistim(3.2.19)

$$\frac{dx}{dt} = (A - By - x)\,x = Ax - Byx - x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = (Cx - D - y)\,y = Cxy - Dy - y^2$$

Dengan melinierisasi sistim (3.2.19) disekitar titik z diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = x\frac{\partial f_1(\bar{x},\bar{y})}{\partial x} + y\frac{\partial f_1(\bar{x},\bar{y})}{\partial y}$$

$$= x\,(A - B\bar{y} - 2\lambda\bar{x}) + y\,(-B\bar{x})$$

$$= (A - B\bar{y} - \lambda\bar{x} - \lambda\bar{x})\,x + (-B\bar{x})\,y$$

$$\frac{dx}{dt} = -(\lambda\bar{x})\,x - (B\bar{x})\,y$$

$$\frac{dy}{dt} = x\frac{\partial f_2(\bar{x},\bar{y})}{\partial x} + y\frac{\partial f_2(\bar{x},\bar{y})}{\partial y}$$

$$= x\,(C\bar{y}) + y\,(C\bar{x} - D - 2\mu\bar{y})$$

$$= (C\bar{y})\,x + (C\bar{x} - D - \mu\bar{y} - \mu\bar{y})\,y$$

$$\frac{dy}{dt} = (C\bar{y})\,x + (-\mu\bar{y})\,y$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -(\lambda\bar{x})\,x - (B\bar{x})\,y \\ \frac{dy}{dt} &= (C\bar{y})\,x + (-\mu\bar{y})\,y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.20)$$

Persamaan karakteristik dari sistim(3.2.20)

$$\begin{vmatrix} -\lambda\bar{x} - p & -B\bar{x} \\ C\bar{y} & -\mu\bar{y} - p \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda\bar{x} + p)(\mu\bar{y} + p) + BC\bar{x}\bar{y} = 0$$

$$p^2 + (\lambda\bar{x} + \mu\bar{y})p + \lambda\mu\bar{x}\bar{y} + BC\bar{x}\bar{y} = 0$$

p_1 dan p_2 adalha akar-akar dari persamaan kuadrat diatas.

$$p_{12} = \frac{-(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}) \pm \sqrt{(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y})^2 - 4(\lambda\mu\bar{x}\bar{y} + BC\bar{x}\bar{y})}}{2}$$

dimana

$$\bar{x} = \frac{\mu A + BD}{\mu\lambda + BC}$$

$$\bar{y} = \frac{AC - \lambda D}{\mu\lambda + BC}$$

Karena A,B,C,D,μ dan λ adalah positip,maka $p_{1.2}$ mempunyai akar-akak yang bagian rielnya negatip.

3.3 Interaksi antar dua spesies.

Pandang dua spesies x dan y yang saling bersaing untuk mendapatkan persediaan makanan.

Persamaan pertumbuhan dari dua spesies ditulis dalam bentuk:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= M(x,y).x \\ \frac{dy}{dt} &= N(x,y).y \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.311)$$

dimana tingkat pertumbuhan M dan N adalah fungsi C^1 dari variabel nonnegatip x,y .

Adakan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Jika salah satu populasi spesies naik, maka tingkat pertumbuhan yang lain turun. Oleh karena itu

$$\frac{\partial M}{\partial y} < 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N}{\partial x} < 0$$

2. Jika salah satu populasi adalah sangat besar, kedua-dua nya tidak dapat berkembang biak. Oleh karena itu, ada $K > 0$ sehingga

$M(x,y) \leq 0$ dan $N(x,y) \leq 0$, jika $x \geq K$ atau $y \geq K$

3. Jika salah satu spesies tidak ada, spesies yang lain mempunyai tingkat pertumbuhan yang positip menuju populasi tertentu dan mempunyai tingkat pertumbuhan yang negatip untuk yang lain. Oleh karena itu ada konstan $a > 0$, $b > 0$ sehingga

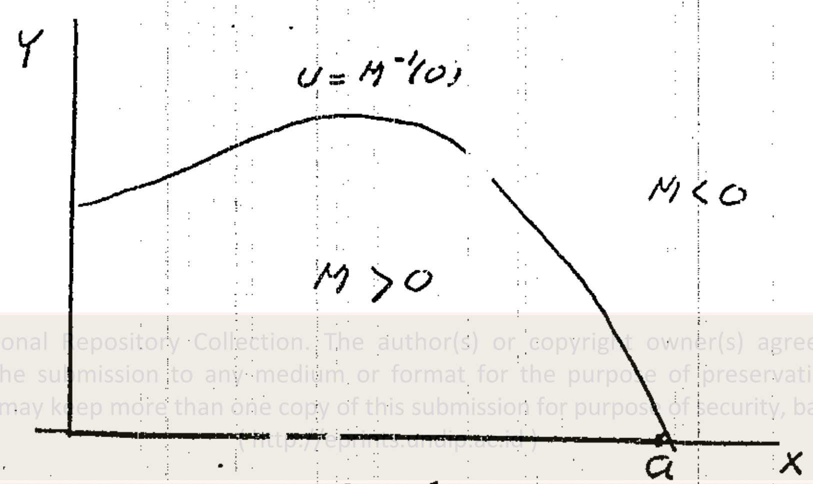
$M(x,0) > 0$ untuk $x < a$ dan $M(x,0) < 0$ untuk $x > a$

$N(0,y) > 0$ untuk $y < b$ dan $N(0,y) < 0$ untuk $y > b$

Dengan asumsi-asumsi diatas, selanjutnya kita buat kurve u dan v.

Kurve u

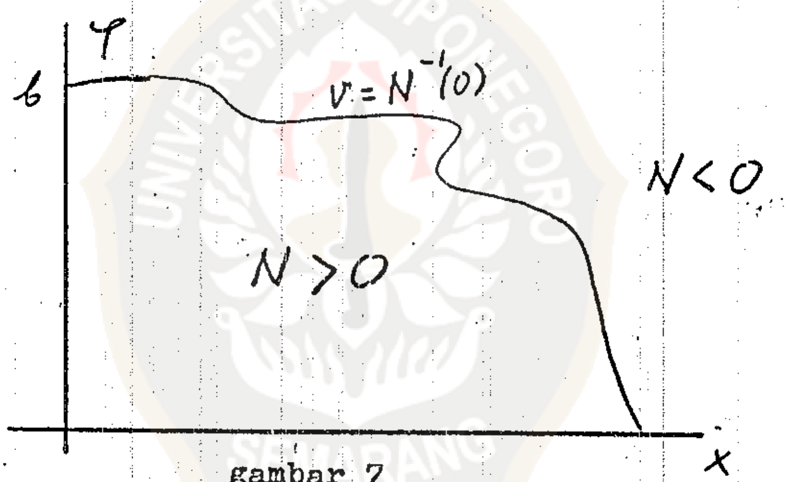
Kurve u dengan bentuk $\{(x,y) \mid y = f(x)\}$ adalah pemetaan $f : [0,a] \longrightarrow R$ sehingga $f^{-1}(0) = a$.
Garis vertikal x x R memotong kurve $u = M^{-1}(0)$ tepat satu kali jika $0 \leq x \leq a$, dan tidak memotong kurve $u = M^{-1}(0)$ untuk $x > a$.
Dengan menggunakan asumsi (3) kita tentukan dibawah kurve untuk $M > 0$ dan diatas kurve u untuk $M < 0$ (gambar 6).



gambar 6

Kurve v

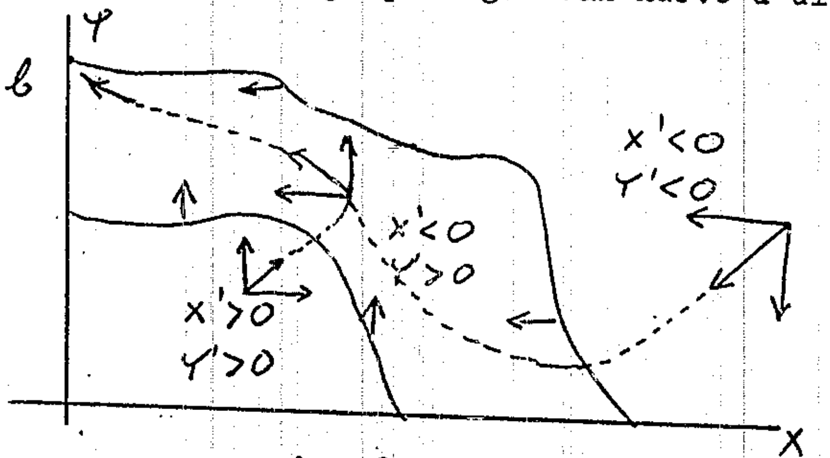
Kurve v dengan bentuk $\{(x,y) \mid x = g(y)\}$ adalah pemetaan $g : [0,b] \dashrightarrow R$ sehingga $g^{-1}(0) = b$.
Garis horisontal y x R memotong kurve $v = N^{-1}(0)$ tepat satu kali jika $0 \leq y \leq b$, dan tidak memotong kurve $v = N^{-1}(0)$ untuk $y > b$
Dengan menggunakan asumsi (3) kita tentukan disebelah kiri kurve untuk $N > 0$ dan disebelah kanan kurve untuk $N < 0$ (gambar 7)



gambar 7

Sekarang kita tinjau kemungkinan kedudukan kurve u dan kurve v

1. Kurve u dan v tidak berpotongan dan kurve u dibawah v



gambar 8

Titik-titik kesetimbangannya adalah (0,0), (a,0) dan (0,b), (gambar 8)

Semua orbit menuju salah satu dari tiga titik kesetimbang

yaitu titik (0,b) sebagai titik stabil asimptotis.
Hal ini dapat diperlihatkan demikian

Pandang sistim(3.3.1)

$$\frac{dx}{dt} = M(x,y).x$$

$$\frac{dy}{dt} = N(x,y).y$$

Dengan linierisasi disekitar titik (0,b), diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = x\frac{\partial M(x,y)}{\partial x}x \quad + x\, M(x,y) \quad + y\,\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\, x$$

$$\frac{dx}{dt} = x\,\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\, y \quad + y\,\frac{\partial N(x,y)}{\partial y}\, y \quad + y\, N(x,y)$$

disekitar titik (0,b)

$$\frac{dx}{dt} = x\,\frac{\partial M(0,b)}{\partial x}.0 \quad + x\, M(0,b) \quad + y\frac{\partial M(0,b)}{\partial y}.0 = M(0,b)\; x$$

$$\frac{dy}{dt} = x\,\frac{\partial N(0,b)}{\partial x}.b \quad + y\,\frac{\partial N(0,b)}{\partial y}.b \quad + y\, N(0,b)$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x}\, bx \quad +(\frac{\partial N}{\partial y}b + N)y$$

Akar -akar sistim diatas

$$\begin{vmatrix} M(0,b)-p & 0 \\ \frac{\partial N}{\partial x}\, b & \frac{\partial N}{\partial y}b + N(0,b) - p \end{vmatrix} = 0$$

$$(M(0,b) - p) (\partial N/\partial y.b + N(0,b) - p) = 0$$

$$p_1 = M(0,b) \quad \text{dan} \quad p_2 = \partial N/\partial y.b + N(0,b)$$

dimana $M(0,b) < 0$ dan $\partial N/\partial y.b + N(0,b) < 0$

Jadi akar-akar $p_{1.2}$ riel dan negatip, akibatnya titik (0,b) stabil asimptotis.

2. Kurve u dan v berpotongan, dan kita asumsikan bahwa perpotongan kurve u dan v dititik p,q,r dan s.

Kurve u dan v serta sumbu x memuat 4 daerah dasar yaitu:

I $x' > 0$, $y' > 0$

II. $x' < 0$, $y' > 0$

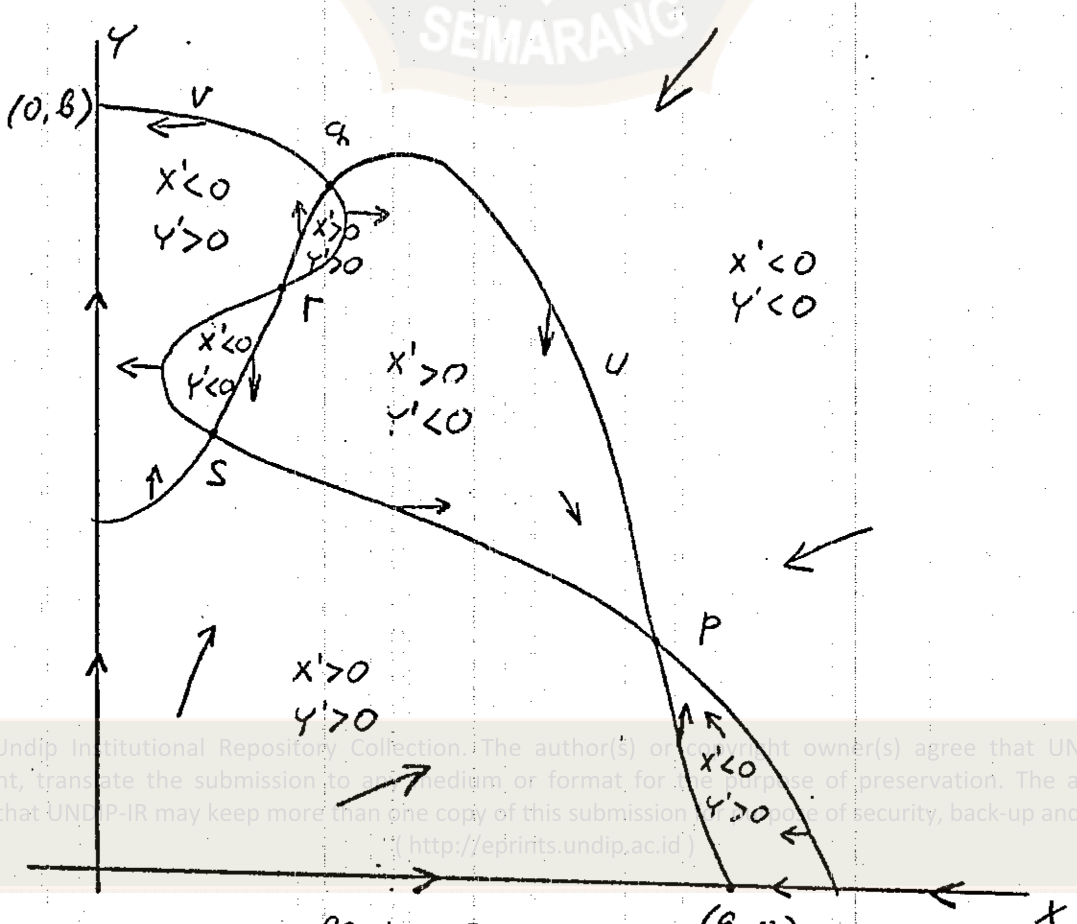
III. $x' < 0$, $y' < 0$

IV $x' > 0$, $y' < 0$

Batas dari daerah dasar B(daerah I,II,III,dan IV) adalah ∂B, yang dibentuk oleh titik dengan type sebagai berikut:

a. Titik ujung(puncak), titik ini dibentuk dari perpotongan kurve u dan v.

b. Titik batas biasa, titik ini dibentuk dari titik pada kurve u atau pada v , tetapi tidak pada sumbu x atau tidak pada kurve u dan v.



gambar 9.

Perhatikan gambar 9.

Pada titik batas biasa $w \in \partial B$, vektor(x',y') adalah vertikal jika $w \in$ kurve u dan horisontal jika $w \in v$ Titik-titik w masuk atau keluar dari B ,bilamana u tidak punya arah vertikal dan v tidak punya arah horisontal, titik w disebut titik didalam atau titik diluar dari ∂B

Lemma:

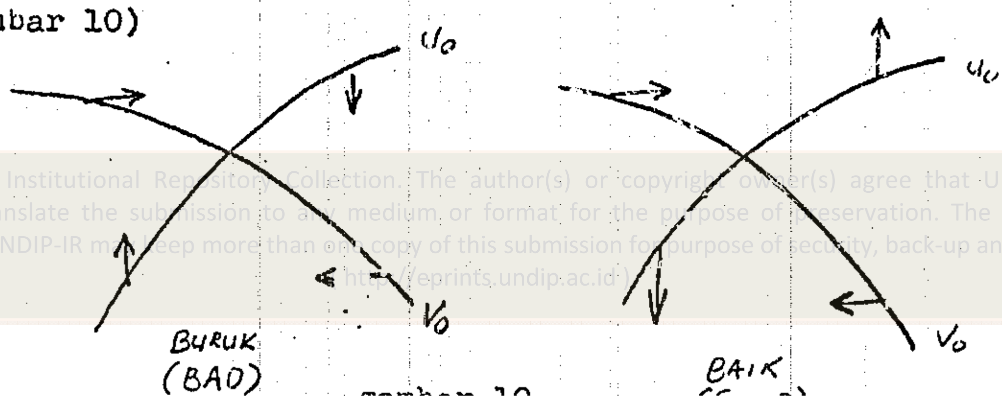
Misal B adalah daerah dasar, maka titik batas biasa dari B adalah salah satu,semua titik didalam atau semua titik diluar.

Bukti

Jika lemma berlaku untuk B, dikatakan B baik(good). Misal p adalah titik puncak dari B dimana kurve u dan v berpotongan,maka p adalah pada batas dari empat daerah dasar,salah satu type dari II dan IV,dan Idan III. Type II dan IV dengan type I dan III adalah saling berlawanan .

Misal $u_o \subset u$ dan kurve $v_o \subset v$ adalah busur terbuka dari titik batas biasa yang mempunyai titik p sebagai titik akhir yang sama .

Jika $u_o \cup v_o$ memuat seluruh dari titik didalam atau seluruh dari titik diluar dari ∂B, disebut p baik(good) untuk B,jika tidak demikian p buruk(bad)untuk B.(lihat gambar 10)

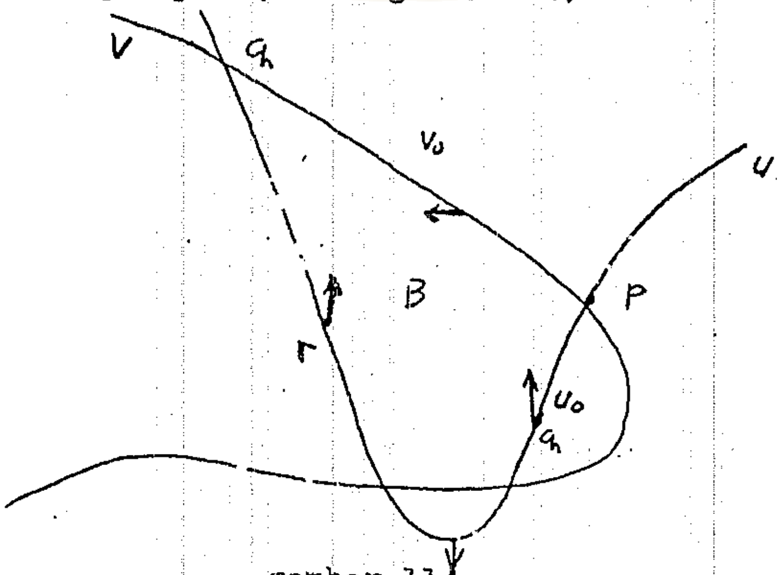


Pandang seluruh daerah B_0 yang mempunyai batas memuat (0,0), typeI($x'>0$, $y'>0$).Jika q adalah titik biasa dari kurve $u \cap \partial B_0$,q dapat dihubungkan dengan sebuah titik dalam B_0 dengan garis yang menjauhi kurve v, sepanjang garis $y'>0$.

Oleh karena titik (x',y') arahnya keatas luar dari B_0 pada q sebab u adalah grafik(kurve). Dengan cara yang sama pada titik r dari $v \cap \partial B_0$,titik (x',y') berarah kanan luardari B_0 pada r. Oleh karena B_0 adalah baik(good)dan untuk setiap titik puncak dari B_0 adalah baik.

Sekarang akan ditunjukan bahwa jika B adalah sebuah daerah dasar dan ∂B memuat salah satu titik puncak baik p dari $u \cap v$,maka Badalah baik .

Asumsikan sekitar dekat p , vektor sepanajang titik ∂B masuk B, Asumsikan bahwa dalam B $x'<0$, dan $y'>0$. Misalkan $u_0 \subset u$, $v_0 \subset v$ busur dari titik biasa dari B berdekatan dengan p . (lihat gambar 11)



gambar 11

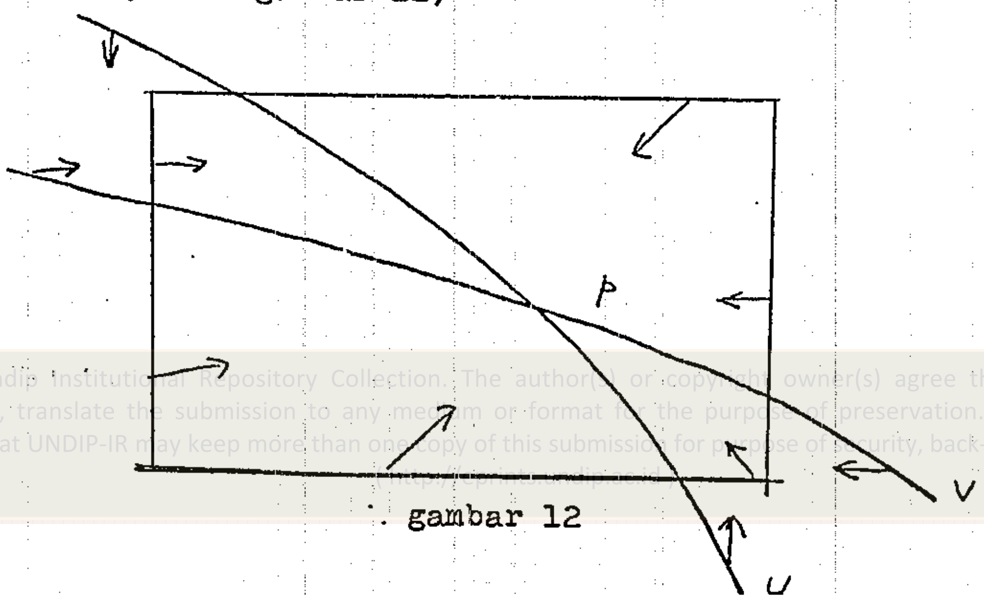
Misal r adalah sembarang titik biasa dari $\partial B \cap u$, dan q sembararang titik biasa dari u_0. Maka $y'>0$ pada q, jika bergerak sepanjang u dari q ke r tanda dari y' berubah setiap kali memotong v . q dan r berada disisi yang sama dari v, oleh karena itu u memotong v menurut bilangan genap .Karena itu $y' > 0$ pada r hal ini berarti (x',y') bergerak keatas.

Dengan cara yang sama $x' < 0$ pada setiap titik biasa dari $v \cap \partial B$.

Oleh karena sepanjang u(x',y') bergerak keatas dan sepanjang v, (x',y') bergerak kekiri, maka B berada diatas u dan sebelah kiri dari v. Jadi B adalah baik(good). Terbuktilah lemma diatas.

Akan kita selidiki kestabilan dititik setimbang.hal ini dijelaskan sebagai berikut:

Titik puncak A dimana u dan v masing-masing mempunyai koeffisien arah yang negatip, adalah stabil asimptotis Hal ini dapat diperlihatkan dengan menggambarkan sebuah empat persegi panjang kecil yang sisinya sejajar dengan sumbu-sumbu disekitar titik kesetimbangan, ambil satu sudut masing-masing dari 4 daerah yang berdekatan. Sehingga empat persegi panjang tersebutadalah positip invarian,empat persegi panjang tersebut dapat diperkecil sekehengdak,maka titik kesestimbangan adalah stabil asim ptotis. (lihat gambar 12)



gambar 12

Sekarang kita pandang gambar 9.

Titik q pada gambar 9 adalah tidak stabil karena sembarang sekitar titik tersebut menuju kekiri ($x' < 0$), trayektori menuju ke (0,b), jadi titik (0,b) dan p adalah stabil asimptotis, sedangkan titik q, r, s dan (a,0) adalah tidak stabil.

Ada paling sedikit satu titik kesetimbangan yang stabil asimptotis .

Jika titik (0,b) tidak stabil asimptotis ,maka (0,b) berada dibawah kurve u dan jika titik (a,0) tidak stabil asimptotis,maka titik (a,0) berada diluar kurve u.

Dalam hal ini kurve u dan v berpotongan dan perpotongan pertamanya menuju kekiridari (a,0) adalah stabil asimptotis.

Setiap trayektori menuju ke sebuah titik kesetimbangan.

Misalkan titik q adalah titik pelana,maka dapat diperlihatkan bahwa tepat dua trayektori α, α' mendekati titik q yang demikian dmsebut Stabil manifold dari titik q atau kadang-kadang disebut separatrice dari titik q.

Ambil satu trayektori dalam daerah dasar tak terbatas B_∞ yang diberi nama α (gambar 13) .

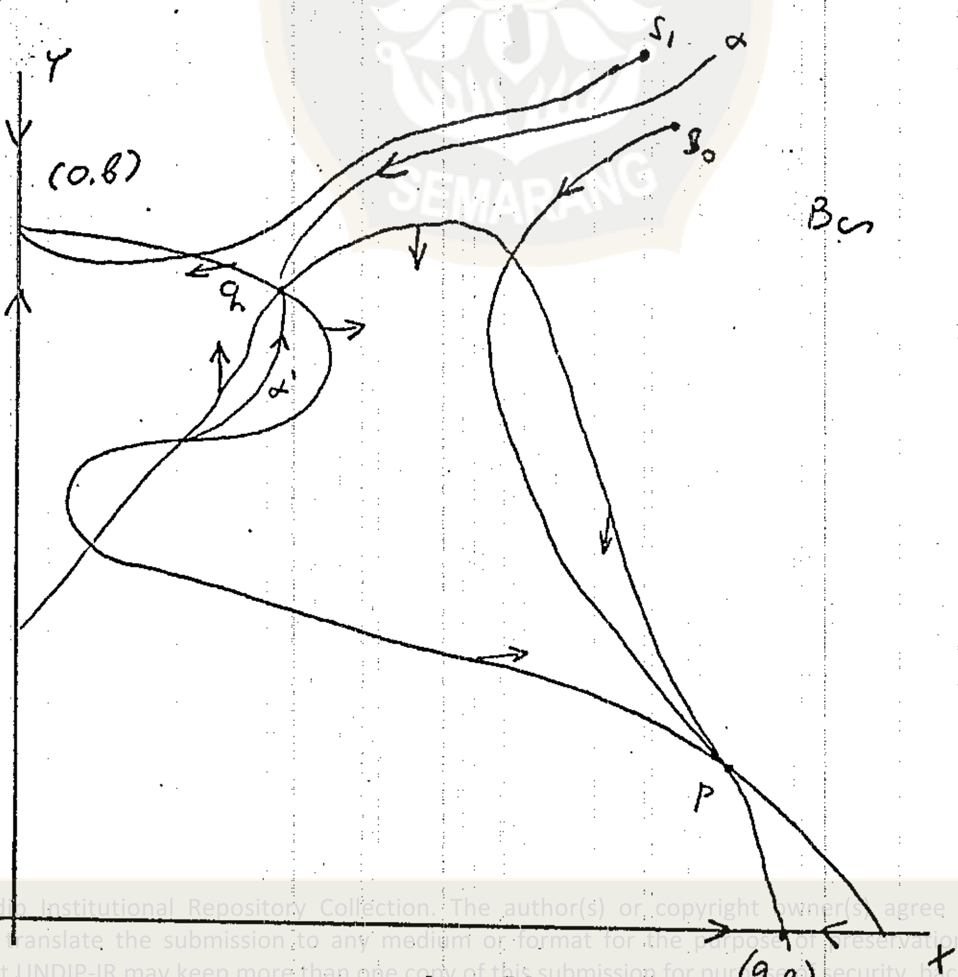
Semua titik dari B_∞ sebelah kiri dari α berakhir pada titik (0,b) sedangkan semua titik-titik sebelah kanan menuju ke titik p.

Ambil titik-titik s_0, s_1 dalam B_0 ,adalah titik yang saling berdekatan tetapi dipisahkan oleh α

Misalkan trayektori dari s_0 menuju ketitik p sedangkan titik s_1 menuju ketitik (0,b).

Titik $s_0=(x_0,y_0)$ menggambarkan sebuah ekologi dari interaksi dari dùa spesies yang akhirnya akan stabil pada titik p, dengan catatan bahwa kedua populasi adalah positip di titik p.

Misalkan ada beberapa hal-hal yang luar biasa,contohnya penambahan satu anggaota yang mengakibatkan perusakan, kebakaran hutan dan lain sebagainya,hal ini tidak dibahas. tetapi secara matematik kejadian tersebut(hal-hal tersebut)mengakibatkan perubahan penyelesaian dari titik p ke titik (0,b).Perubahan ini walaupun sangat kecil mengakibatkan bencana. Untuk trayektori v_1 sangat berlainan keadaannya dengan v_0 hal ini karena v_1 menuju titik (0,b) yang artinya spesies x hilang.



gambar 13

3.4 Model Persamaan Kelahiran.

Misalkan tingkat kelahiran suatu mahluk α, dimana ukuran populasinya y. Misalkan juga tingkat kelahiran tiap individu adalah perkalian terhadap banyak nya populasi . Ini berarti bahwa penambahan tiap individu dalam waktu Δt adalah $\alpha y \Delta t$.

Sesuai dengan penambahan populasi adalah $\alpha y^2 \Delta t$, yang persamaan differensialnya

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.1)$$

Persamaan (3.4.1) mempunyai penyelesaian sebagai berikut

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = \alpha dt$$

diambil integralnya

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \alpha \, dt$$

$$\int y^{-2} dy = \alpha \int dt$$

$$- \frac{1}{y(t)} = \alpha t + k \qquad \text{dimana } k\text{=konstante.}$$

$$\frac{1}{y(t)} = -\alpha t + k$$

$$y(t) = \frac{1}{k - \alpha t} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.2)$$

ambil t = 0 ,sehingga populasi mula-mula y(0) = a

dimana $a > 0$

$$y(0) = \frac{1}{k - 0} = \frac{1}{k}$$

$$y(0) = a$$

$$\frac{1}{k} = a$$

$$k = \frac{1}{a}$$

$k = \frac{1}{a}$ dimasukan kepersamaan (3.4.2)

$$y(t) = \frac{1}{1/a - \alpha t}$$

$$y(t) = \frac{a}{1 - \alpha at} \quad \text{.........} \quad (3.4.3)$$

persamaan (3.4.3) merupakan penyelesaian dari persamaan (3.4.1)

Jika pada persamaan (3.4.3) $t \rightarrow 1/\alpha a$, maka diperoleh $\lim_{t \rightarrow 1/\alpha a} y(t) = \infty$

Sehingga dalam waktu yang terbatas terjadi jumlah popullasi yang tidak terbatas. Dalam praktoknya perkembangan (pertumbuhan) yang seperti ini tidak pernah ada, walaupun model tersebut berguna untuk perkembangan yang cepat dalam waktu tertentu.

3.5 Proses pertumbuhan

Seperti dalam populasi dengan satu spesies ,populasi bertumbuh dengan tingkat pertumbuhan α ,maka populasi akan naik secara exponensial dan besarnya populasi sebagai $y(t) = e^{\alpha t}y(0)$, pada waktu t.

Tetapi jika ada faktor penghambat r ,misalnya kematian maka tingkat pertumbuhannya tidak lagi α melainkan $\alpha - ry$,dengan persamaan differensialnya

$$\frac{dy}{dt} = (\alpha - ry)y \quad \text{...............}(3.5.1)$$

persamaan (3.5.1) mempunyai penyelesaian

$$y(t) = \frac{\alpha}{r + (\alpha/y(0) - r)\, e^{-\alpha t}}$$

persamaan(3.5.1) dapat ditulis

$$\frac{dy}{dt} = \left\{\alpha - h(y)\right\} y$$

dimana α tingkat kelahiran dan h(y) adalah fungsi untuk tingkat kematian, yang mana tergantung dari populasi dan tergantung juga pada lingkungan.