BAB II

TEORI DASAR

2.1 Sistim Dinamis

Pandang suatu sistim

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \\ \frac{dy_3}{dt} &= f_3(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(2.1.1)$$

Persamaan (2.1.1) dinamakan sistim dinamis autonomous derajat satu dimensi n

Definisi 2.1.1

Sebuah sistim dinamis akan memuat data sebagai berikut:

1. Himpunan terbuka R diruang Euclidean - n
2. Himpunan n fungsi berharga real $\{ f_1, f_2, \ldots, f_n \}$ terdefinisi pada R.
3. Himpunan persamaan differensial simultan derajat satu.

Definisi 2.1.2

Solusi dari sistim dinamis (2.1.1) adalah himpunan $\{Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_3(t)\}$ fungsi berharga real terdefinisi pada interval $[T_0, T_1]$ dari sumbu real, sehingga :

1. Y (t) didefinisikan melalui $[T_0, T_1]$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,n$
2. Derivatif $\frac{dy_i(t)}{dt}$ didefinisikan melalui interval $[T_0, T_1]$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,n$
3. Fungsi $\{Y_i(t)\}$ memenuhi sistim dinamis (2.1.1) pada setiap titik di R .

2.2 Ada dan tunggalnya solusi.

Jika pada sistim dinamis (2.1.1), diambil n=2 diperoleh

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.2.1)$$

sistim (2.2.1) disebut sistim dinamis derajat satu dimensi dua.

Definisi 2.2.1

Fungsi $f(y_1, y_2)$ didefinisikan dalam daerah R dikatakan memenuhi syarat Lipschitz dalam R, jika ada konstan L_1, L_2 sehingga jika (y_1, y_2) dan (y_1^0, y_2^0) adalah dua titik dalam R, pertidaksamaan

$$|f(y_1, y_2) - f(y_1^0, y_2^0)| \leq L_1 |y_1 - y_1^0| + L_2 |y_2 - y_2^0|$$

dipenuhi.

Teorema 2.2.2

Diketahui sistim dinamis (2.2.1)

Pandang bahwa fungsi-fungsi f_1, f_2 adalah kontinu uniform dan terbatas dalam himpunan terbuka R, serta memenuhi syarat Lipschitz. Misalkan diberikan titik (y_{1o}, y_{2o}) dalam R dan titik t_0. Misalkan M adalah batas atas untuk f_1, f_2 dalam R dan D adalah jarak (y_{10}, y_{20}) dari batas R, maka ada tepat satu solusi $\{Y_1(t), Y_2(t)\}$ sehingga $Y_2(t_o) = y_{2o}$ dan $Y_1(t_o) = y_{1o}$ ada tepat satu trayektori melalui masing-masing titik dari R.

Bukti :

Misalkan $\{Y_1(t), Y_2(t)\}$ dan $\{Y_1^o(t), Y_2^o(t)\}$ adalah dua solusi yang berbeda dari sistim dinamis (2.2.1), maka dari (2.2.1) dapat ditulis secara explisit

$$
\begin{aligned}
Y_1(t) &= \int_{t_0}^{t} f_1(y_1(p), y_2(p))dp + y_1(t_o) \\
Y_2(t) &= \int_{t_0}^{t} f_2(y_1(p), y_2(p))dp + y_2(t_o) \\
Y_1^o(t) &= \int_{t_0}^{t} f_1(y_1^o(p), y_2^o(p))dp + y_1^o(t_o) \\
Y_2^o(t) &= \int_{t_0}^{t} f_2(y_1^o(p), y_2^o(p))dp + y_2^o(t\ )
\end{aligned}
\qquad \ldots\ldots(2.2.2)
$$

Misal solusi-solusi ini bersama waktunya $t = t_o$

$$
\begin{aligned}
y_1(t_o) &= y_1^o(t_o) \\
y_2(t_o) &= y_2^o(t_o)
\end{aligned}
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.3)
$$

Dari (2.2.2) dan (2.2.3) diperoleh :

$$Y_1(t) - Y_1^o(t) = \int_{t_0}^{t} \{f_1(y_1(p), y_2(p)) - f_1(y_1^o(p), y_2^o(p))\} dp$$

$$Y_2(t) - Y_2^o(t) = \int_{t_0}^{t} \{f_2(y_1(p), y_2(p)) - f_2(y_1^o(p), y_2^o(p))\} dp$$

diambil harga mutlaknya, maka diperoleh:

$$\left| Y_1(t) - Y_1^{\rho}(t) \right| \leqslant \int_{t_0}^{t} \left| f_1(y_1, y_2) - f_1(y_1^{\rho}, y_2^{\rho}) \right| dp$$

$$\left| Y_2(t) - Y_2^{\rho}(t) \right| \leqslant \int_{t_0}^{t} \left| f_2(y_1, y_2) - f_2(y_1^{\rho}, y_2^{\rho}) \right| dp$$

Memenuhi syarat Lipschitz (definisi 2.2.1)

$$\left.\begin{aligned} \left| Y_1(t) - Y_1^{\rho}(t) \right| &\leqslant L_1 \int_{t_0}^{t} \left| y_1 - y_1^{\rho} \right| dp + L_2 \int_{t_0}^{t} \left| y_2 - y_2^{\rho} \right| dp \\ \left| Y_2(t) - Y_2^{\rho}(t) \right| &\leqslant L_1^{\rho} \int_{t_0}^{t} \left| y_1 - y_1^{\rho} \right| dp + L_2^{\rho} \int_{t_0}^{t} \left| y_2 - y_2^{\rho} \right| dp \end{aligned}\right\} \quad (2.2.4)$$

hubungan tersebut dipe nuhi untuk semua t dalam interval $[T_0, T_1]$ sehingga

$$t_0 - \frac{D}{M\sqrt{2}} \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{D}{M\sqrt{2}}$$

dapat dipilih konstan L sedemikian besar sehingga

a. $L > \max(L_1, L_2, L_1^{\rho}, L_2^{\rho})$

b. $\frac{1}{4L} \leqslant \frac{D}{M\sqrt{2}}$

maka dari (2.2.4) akan dipenuhi untuk semua t, sehingga

$$t_0 - \frac{1}{4L} \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{1}{4L} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.2.5)$$

Pe rsamaan (2.2.4) adalah pernyataan untuk solusi-solusi berbeda $\{Y_1, Y_2\}$ dan $\{Y_1^{\rho}, Y_2^{\rho}\}$ yang divergen dalam interval $[T_0, T_1]$ dan pernyataan tersebut adalah fungsi kontinu dari t pada interval tertutup terbatas. Oleh karena itu asumsikan harga max dalam interval $[T_0, T_1]$.

Ambil $Q = \max\left(\left| Y_1(t) - Y_1^{\rho}(t) \right| , \left| Y_2(t) - Y_2^{\rho}(t) \right| \right)$

untuk t dalam interval

$$t_0 - \frac{1}{4L} \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{1}{4L}$$

Dapat diperoleh untuk t^* memenuhi interval(2.2.5) sehingga

$$Q = \left| Y_1(t^*) - Y_1^{\rho}(t^*) \right|$$

$$\left|Y_1(t) - Y_1^o(t)\right| \leqslant L_1\int_{t_0}^{t}\left|y_1 - y_1^o\right| dp + L_2\int_{t_0}^{t}\left|y_2 - y_2^o\right| dp$$

menjadi

$$0 \leqslant Q = \left|Y_1(t^*) - Y_1^o(t^*)\right| \leqslant L\int_{t_0}^{t}\left\{\left|y_1-y_1^o\right| + \left|y_2-y_2^o\right|\right\} dp$$

$$L\int_{t_0}^{t} 2Q dp = 2LQ\left|t^* - t_0\right|$$

karena t* memenuhi interval (2.2.5)

$$0 \leqslant Q \leqslant 2LQ(t_0 + \frac{1}{4L} - t_0)$$

$$\leqslant 2LQ(\frac{1}{4L}) = \frac{2LQ}{4L} = \frac{Q}{2}$$

hal ini dipenuhi hanya untuk $Q = 0$

Jadi divergen max dari dua solusi berbeda dalam interval (2.2.5) adalah nol. Oleh karena dua solusi diatas bersama-sama melalui interval (2.2.5), akibatnya hanya ada sebuah solusi yang memlalui interval tersebut. Terbuktilah teorema diatas.

2.3 Kestabilan Solusi

Definisi 2.3.1

Suatu lengkungan yang dinyatkan oleh $C(t)=\{Y_1(t), Y_2(t)\}$ yang merupakan solusi dari (2.2.1) disebut trayektori dari sistim dinamis (2.2.1).

Definisi 2.3.2

$C(0) = \{Y_1(0), Y_2(0)\}$ disebut titik setimbang dari sistim dinamis (2.2.1), jika C(0) memenuhi

$f_i(y_1, y_2) = 0$ untuk $i = 1, 2$

Definisi 2.3.3

a. C(t) adalah terbatas jika untuk setiap $\delta > 0$ yang diberikan ada bilangan positip M sehingga

$$\left|Y_i(0) - \bar{Y}_i(0)\right| < \delta \longrightarrow \left|Y_i(t) - \bar{Y}_i(t)\right| < M$$

untuk semua $t \geqslant 0$ dan untuk $i = 1, 2$

C(t

b. C(t) stabil lemah, jika setiap diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $|Y_i(0) - \bar{Y}_i(0)| < \delta \dashrightarrow |Y_i(t) - \bar{Y}_i(t)| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$, $i = 1,2$

c. C(t) Stabil asimptotik, jika ada sebuah $\delta > 0$ sehingga $|Y_i(0) - \bar{Y}_i(0)| < \delta \dashrightarrow \lim_{t \to +\infty} |Y_i(t) - \bar{Y}_i(t)| = 0$, untuk $i = 1,2$.

d. C(t) tidak stabil, jika untuk setiap $\delta > 0$ ada trayektori $\bar{C}(t)$ sedemikian sehingga $|Y_i(0) - \bar{Y}_i(0)| < \delta$ dan $\lim_{t \to +\infty} |Y_i(t) - \bar{Y}_i(t)| = +\infty$ untuk paling sedikit satu dari $i = 1,2$.

Definisi 2.3.3

a. Suatu sekitar dari titik y adalah himpunan $N_r(y)$ yang memuat semua titik y sehingga $|y_1 - y| < r$, dimana r adalah jari-jari dari $N_r(y_1)$.

b. Titik y adalah titik interior dari R, jika ada sekitar N dari y sehingga $N \subset R$.

c. Himpunan R dikatakan terbuka, jika setiap titik dari R adalah titik interior dari R.

d. Himpunan K, dimana $K \subset R$, dikatakan himpunan kompak, jika setiap tutupan terbuka dari K memuat tutupan bagian yang terbatas.

e. Tutupan terbuka dari K, dimana $K \subset R$, adalah koleksi $\{G_\alpha\}$ dari himpunan bagian terbuka dari R sehingga $K \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$

Definisi 2.3.4

Fungsi f dikatakan terbatas pada himpunan terbuka R, jika ada bilangan real M sehingga $|f(y)| \leq M$ untuk semua $y \in R$

Definisi 2.3.5

Fungsi f dikatakan kontinu uniform pada himpunan terbuka R, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat $\delta > 0$ sehingga $|p - q| < \delta \longrightarrow |f(p) - f(q)| < \varepsilon$ untuk semua p dan q dalam R.

Definisi 2.3.6

Misalkan titik-titik $y_0, y_1, y_2, \dots$ adalah barisan finite atau infite pada kurve solusi $C = \{\phi_t(y_0) / 0 \leq t \leq \alpha\}$. $y_0, y_1, y_2, \dots$ dikatakan monoton along pada trayektori, jika $\phi_{t_n}(y_0) = y_n$ dengan $0 \leq t_1 \leq \dots \leq \alpha$.

Definisi 2.3.7

Himpunan P adalah positip invariant untuk sistem dinamis, jika untuk setiap p dalam P, $\phi_t(p)$ didefinisikan dan berada dalam P untuk setiap $t \geq 0$.

Definisi 2.3.8

Jika diketahui $\dfrac{dy}{dt} = Py$ dimana $|P| \neq 0$, dan $|P - pI| = 0$

P merupakan suatu matriks 2x2, maka

Harga karakteristik	Macam Titik settimbang	Stabilitas
1. Berbeda, sama tanda		
- $p_i > 0$	ttk simpul tak wajar	tak stabil
- $p_i < 0$	″	stab asimpt
2. Berbeda, berlainan tanda	ttk pelana	tak stabil
3. sama semua		
- $p_i > 0$	ttk simpul tak wajar	tak stabil
- $p_i < 0$	″	stab asimpt
4. kompleks $p_i = a_i + ib_i$		
- $a_i > 0$	ttk spiral	tak stabil
- $a_i < 0$	″	stab asimpt
5. kompleks sejati ib_i	ttk pusat	stabil

dimana $i = 1,2$