B A B III
S I S T E M P E N G A P A L A N.

Dalam pembahasan pada Bab III ini tidak lepas dari pada apa yang telah dibahas dalam Bab II. pada Bab II hanya dibahas sistem aliran jaringan dari suatu titik/kota $s \longrightarrow s'$ dengan melalui beberapa titik-titik/kota-kota tertentu, dengan anggapan bahwa setiap jarak antara dua titik/kota yang dilalui telah mempunyai batas atas kapasitas tertentu dan disetiap titik/kota yang dilalui dianggap tidak membutuhkan barang yang dibawa oleh aliran.

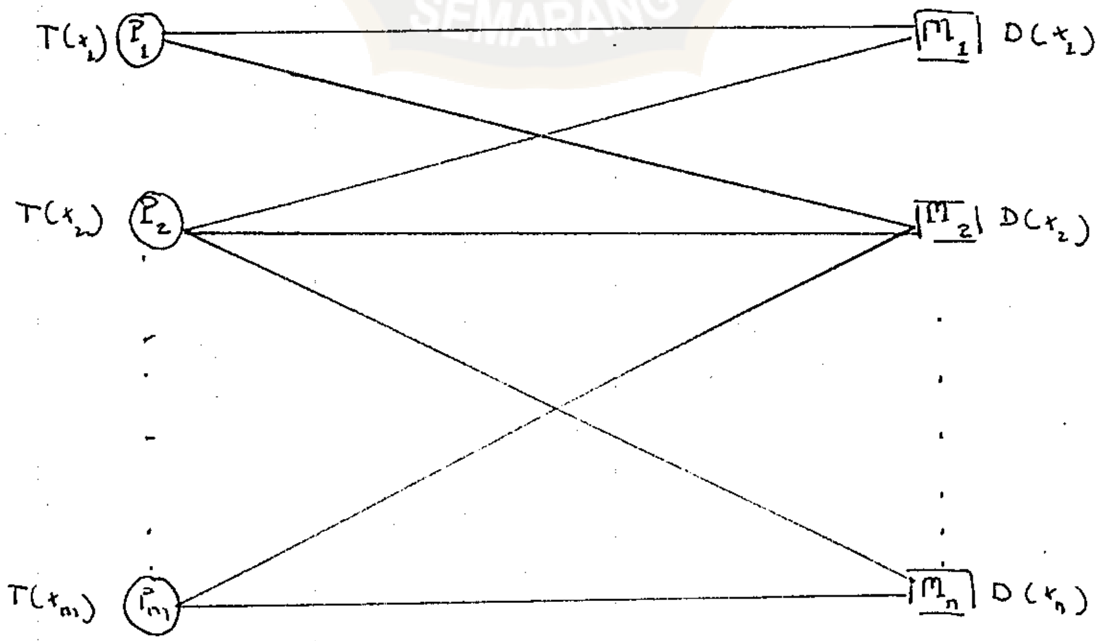
Dalam Bab III ini akan diperinci lebih jauh lagi, dimana pada setiap titil/kota yang dilewati telah mempunyai batas minimal kebutuhan kapasitas yang harus dipenuhi, paling tidak harus sama dengan kebutuhan dari titik tersebut.Batas minimal kebutuhan yang harus dipenuhi untuk $\forall\ x \in N$ dilambangkan dengan $D(x)$ dimana N adalah banyaknya titik dalam jaringan (N,k), Disini mungkin beberapa titik sekaligus menjadi daerah sumber dan daerah konsumen. dan disetiap titik daerah sumber mempunyai batas maksimal kapasitas yang dihasilkan, batas maksimal yang dihasilkan untuk setiap titik $x \in N$ dilambangkan dengan simbul $T(x)$.

3.1. Masalah Pengapalan (Transshipment Problem).

Dalam Masalah Pengapalan ini seperti yang telah diutarakan diatas, membahas masalah hubungan antara beberapa titik/kota dimana tiap-tiap titik/kota yang dilalui

oleh sistem aliran jaringan harus dipenuhi kebutuhannya paling tidak sama dengan kebutuhan yang diperlukan oleh titik/kota yang dilalui.Seperti halnya kapal yang sedang akan mengadakan bongkar-muat barang-barang yang akan diperlukan oleh kota/kapal tersebut.

Misalkan terdapat sejumlah m pabrik dengan notasi $P_1, P_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, P_m$ dan sejumlah n pasar dengan notasi $M_1, M_2, \ldots\ldots\ldots, M_n$. Himpunan dari titik pabrik dinyatakan dengan set P dan himpunan dari pasar dinyatakan dengan set M. Misalkan batas maksimal pesediaan dari suatu pabrik $x \in P$ adalah $T(x)$, dan batas minimal kebutuhan dari suatu pasar x M adalah $D(x)$, serta $\left\{ f(x,N) \right\}$ adalah himpunan fungsi-fungsi aliran pada sistem jaringan (N,k), dimana N adalah banyaknya titik-titik dalam sistem jaringan (N,k) dan disini mungkin beberapa titik bisa dianggap sebagai pasar dan pabrik, Sehingga titik-titik pasar dan titik-titik pabrik tersebut dapat disajikan sebagai sistem jaringan sebagai berikut :



GAMBAR 3.1.

Suatu titik netral $x \in N$ dimana tidak termasuk pada daerah sumber maupaun daerah tujuan biasanya dalam sistem jaringan diasumsikan dalam titik-titik dalam himpunan

DEFINISI 6 :

Masalah Pengapalan (Transshipment problem)disebut dengan feasible jika terdapat suatu aliran (flow) sedemikian rupa sehingga :

- $f(N,x) \geqslant D(x)$, untuk $\forall\ x \in M$ ....(i)
- $f(x,N) \leq T(x)$, untuk $\forall\ x \in P$ ....(ii)

Jadi jika terdapat suatu aliran dalam sistem jaringan sedemikian hingga memenuhi (i) dan (ii) maka sistem aliran dalam jaringan (N,k) disebut dengan feasible.

3.1.1. TEOREMA FEASIBILITY.

Suatu Masalah Pengapalan (Transshipment Problem) dikatakan feasible jika dan hanya jika untuk $\forall\ x \in S \subset N$ berlakulah :

$$D(S' \cap M) - T(S' \cap P) \leq k(S,S')$$

BUKTI :

Untuk membuktikan teorema feasibility ini akan ditunjukkan bahwa teorema ini ekivalen dengan definisi 6.

$\Longrightarrow$

Diketahui suatu aliran fungsi yang memenuhi :

- $f(N,x) \geqslant D(x)$, untuk $\forall\ x \in M$.
- $f(x,N) \leq T(x)$, untuk $\forall\ x \in P$.

Dibuktikan bahwa :

$$D(S' \cap M) - T(S' \cap P) \leq k(S,S')$$

Bukti :

$$\sum_{x \in S' \cap M} f(N,x) = f(N, S' \cap M) \geqslant \sum_{x \in S' \cap M} D(x) = D(S' \cap M) \quad \text{...(1)}$$

$$\sum_{x \in S' \cap P} f(x,N) = f(S' \cap P, N) \leq \sum_{x \in S' \cap P} T(x) = T(S' \cap P) \quad \text{...(2)}$$

Sehingga :

......(1).... menjadi : $f(N,S'\cap M) \geqslant D(S'\cap M)$

.......(2)... menjadi : $f(S'\cap P,N) \leq T(S'\cap P)$

$-f(N,S'\cap P) \leq T(S'\cap P)$ $\underline{X(-1)}$

$f(N,S'\cap P) \geqslant -T(S'\cap P)$

Jika (1) ditambah dengan (2) maka didapat :

$$D(S'\cap M) - T(S'\cap P) \leq f(N,S'\cap M) + f(N,S'\cap P)$$

$$\leq f(N,S'\cap (P\cup M)) \quad , \text{Krn } M\cup P=N$$

$$\leq f(N,S'\cap N)$$

$$\leq f(N,S') = f(S,S') + f(S',S')$$

Jadi : $D(S'\cap M) - T(S'\cap P) \leq k(S,S')$

$\Longleftarrow$

Diketahui : $D(S'\cap M) - T(S'\cap P) \leq k(S,S')$

Dibuktikan : Terdapatlah suatu aliran fungsi sedemikian hingga memenuhi :

- $f(N,x) \geqslant D(x)$, untuk $\forall$ $x \in M$ ....(i)
- $f(x,N) \leq T(x)$, untuk $\forall x \in P$ .... (ii)

Bukti :

Syarat perlu : Haruslah terdapat suatu aliran fungsi. Jelas didalam suatu masalah pengapalan dijamin adanya aliran, karena masalah pengapalan sendiri membahas masalah sistem aliran didalam jaringan, jadi syarat perlu jelas terpenuhi.

Syarat Cukup : Syarat perlu diatas harus memenuhi ketentuan (i) dan (ii).

Menurut pertidaksamaan (3) dari definisi 5 yang menyatakan bahwa aliran fungsi f yang keluar dari sumber s' dalam sistem jaringan (N,k), Nilainya paling banyak adalah sama dengan kapasitas pemotongan minimal, maka :

$$k(S,S') \geq f(S,S')$$

$$k(S,S') \geq f(S,S') + f(S',S').$$

Karena $f(S',S') = 0$ dan $S \cup S' = N$, serta $k(S,S')$ adalah himpunan fungsi kapasitas pemotongan garis, sedemikian hingga kapasitas pemotongannya adalah minimal, maka :

$$\begin{aligned} k(S,S') &\geq f(N,S') \\ &\geq f(N,S' \cap N) \\ &\geq f(N,S' \cap (P \cup M)) \\ &\geq f(N,S' \cap P) + f(N,S' \cap M) \end{aligned}$$

Jika diambil f adalah fungsi aliran yang maksimal maka :

$$\begin{aligned} k(S,S') &= f(N,S' \cap P) + f(N,S' \cap M) \\ &= \sum_{x \in S' \cap P} f(N,x) + \sum_{x \in S' \cap M} f(N,x) \\ &= -\sum_{x \in S' \cap P} f(x,N) + \sum_{x \in S' \cap M} f(N,x) \end{aligned}$$

Padahal diketahui :

$$D(S' \cap M) - T(S' \cap P) \leq k(S,S')$$

Oleh karena itu :

$$D(S' \cap M) - T(S' \cap P) \leq -\sum_{x \in S' \cap P} f(x,N) + \sum_{x \in S' \cap M} f(N,x)$$

Sehingga jika diambil sembarang $x \in S' \cap M$ dan $x \in S' \cap P$ maka :

$$D(x) - T(x) \leq f(N,x) - f(x,N)$$

Sehingga dari pertidaksamaan ini dapat disimpulkan :

$$f(N,x) \geq D(x) \quad , \text{untuk } \forall x \in M$$

dan

$$-f(x,N) \geq -T(x) \quad , \text{untuk } \forall x \in P$$

$$f(x,N) \leq T(x) \quad , \text{untuk } \forall\ x \in P$$

Jadi syarat cukup juga terpenuhi, Sehingga terbuktilah teorema feasibility.

3.2. Hubungan Antara Titik s Dan Titik s' Dengan Titik-titik Lainnya Dalam Sistem Jaringan.

DEFINISI 7 :

Didefinisikan bahwa kapasitas $\bar{k}$ pada perluasan jaringan (N,k) adalah sbb :

$$\bar{k}(x,y) = k(x,y) \quad , \text{untuk } \forall\ x,y \in N$$

$$\bar{k}(s,x) = T(x) \quad , \text{untuk } \forall\ x \in P$$

$$\bar{k}(x,s') = D(x) \quad , \text{untuk } \forall\ x \in M$$

$$\bar{k}(x,y) = 0 \quad , \text{untuk } x,y \notin N$$

Misalkan pemotongan minimal dari perluasan jaringan (N,k) adalah $(N \cup s, s')$, dimana banyaknya titik-titik pada perluasan jaringan (N,k) adalah (N + s + s'). Misalkan S adalah sembarang himpunan bagian dari jaringan $(\bar{N},\bar{k})$ dan $(S \cup s, S' \cup s')$ adalah suatu pemotongan yang berhubungan dengan jaringan $(\bar{N},\bar{k})$, dimana $\bar{N} = N + s + s'$, maka :

$$\bar{k}(S \cup s, S' \cup s') = \bar{k}(S,S') + \bar{k}(S,s') + \bar{k}(s,S') + \bar{k}(s,s')$$

dimana $\bar{k}$ adalah kapasitas pada perluasan jaringan (N,k), dan $s,s' \notin N$, maka $\bar{k}(s,s') = 0$.

Sehingga :

$$\bar{k}(S \cup s, S' \cup s') = \bar{k}(s,S') + \bar{k}(S,S') + \bar{k}(S,s')$$

$$= T(S' \cap P) + \bar{k}(S,S') + D(S \cap M) \quad \ldots\ldots(3)$$

Tetapi karena $\bar{k}(N \cup s, s')$ adalah himpunan fungsi pemotongan kapasitas antara himpunan bagian $N \cup s$ dengan titik s'

$$\bar{k}(N \cup s, s') = D(M) = D(M \cap N) \quad , \text{karena } M \quad N$$

$$= D(M \cap (S \cup S'))$$

$$= D(M \cap S) + D(M \cap S') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Sehingga jika persamaan (3) dikurangi (4) diperolehlah :

$$\bar{k}(S \cup s, S' \cup s') - \bar{k}(N \cup s, s') = k(S,S') + T(S' \cap P) - D(S' \cap M)$$

Hal ini merupakan hipotesa dari teorema feasibility dan dari pernyataan diatas jelas positif.

3.3. Hubungan Antara Teorema Aliran Maksimal Dengan Teorema Feasibility.

Teorema aliran maksimal (pemotongan kapasitas minimal pada jaringan (N,k) juga dapat untuk menunjukkan bahwa suatu aliran dalam sistem pengapalan adalah feasible.

Misalkan $\bar{f}$ adalah suatu fungsi aliran pada perluasan jaringan (N,k), yang mempunyai nilai pemotongan kapasitas minimal adalah $\bar{k}(N \cup s, s') = D(M)$, Berarti fungsi $\bar{f}$ mempunyai nilai aliran maksimal sebesar :

$$D(M) = \bar{f}(N,s') = \sum_{x \in N} \bar{f}(x,s') = \sum D(x), \text{ sehingga untuk}$$

$$\forall \; x \in M \text{ maka berlakulah } \bar{f}(x,s') = D(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Misalkan f adalah $\bar{f}$, dimana f merupakan suatu fungsi aliran dalam sistem jaringan (N,k), kemudian akan ditunjukkan bahwa fungsi aliran f adalah feasible.

Karena $\bar{f}$ adalah aliran fungsi dari $s \longrightarrow s'$, maka untuk

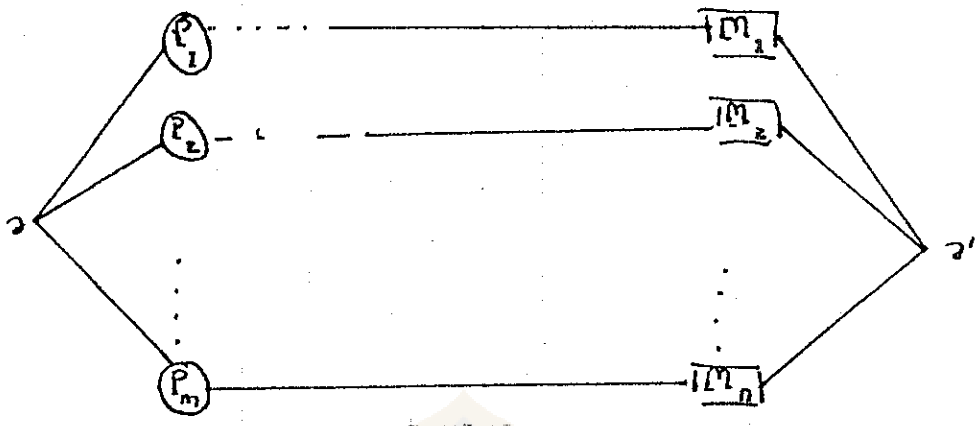
$$\forall \; x \in N \text{ berlakulah } \bar{f}(\bar{N},x) = 0, \text{ Sehingga :}$$

$$0 = \bar{f}(\bar{N},x) = f(N,x) + \bar{f}(s,x) + \bar{f}(s',x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Jika dipandang titik-titik untuk $\forall \; x \in M$, maka $\bar{f}(s,x) = 0$,

Sehingga persamaan (6) dengan persamaan (5) menjadi :

$f(N,x) = \bar{f}(x,s') = D(x)$, syarat (i) terpenuhi.



GAMBAR 3.2.

Jika dipandang untuk $\forall\ x \in P$ maka $\bar{f}(s',x) = 0$, sehingga dari persamaan (6) diperoleh :

$$0 = -\ f(x,N) + \bar{f}(s,x)$$

$$f(x,N) = \bar{f}(s,x) \leq \bar{k}(s,x) = T(x)$$

Jadi syarat (ii) juga terpenuhi, sehingga f merupakan sistem pengapalanyang feasible.

Dengan dapat ditunjukkan bahwa f merupakan sistem aliran pengapalan yang feasible, maka untuk menunjukkan masalah pengapalan agar memenuhi teorema feasibility masalah pengapalan tersebut dapat dipecahkan dengan menentukan aliran maksimal, selanjutnya akan dibicarakan cara memecahkan masalah pengapalan dengan membentuk dahulu ke dalam sistem aliran maksimal, dengan menggunakan contoh permasalahan.

Data dibawah ini diperoleh dari suatu keluarga yang mempunyai 7 anak, dimana anak ke I, ke II dan ke III sudah lepas dari tanggungan kedua orang tuanya, sebaliknya ketiga anak tersebut bersedia membantu kebutuhan sekolah adik-adiknya, dimana data ini diperoleh pada saat kebutuhan bulan Januari tahun 1985 dan pada bulan tersebut untuk memenuhi kebutuhannya, masing-masing sumber dengan notasi P mampu menyediakan sumber sebagai berikut: P_1=10 unit satuan, P_2 = 8 unit satuan, P_3 = 4 unit satuan dan P_4 = 3 unit satuan. Sedangkan set yang harus dipenuhi kebutuhannya dengan notasi M masing-masing mempunyai kebutuhan minimal sebagai berikut :M_1= 9 unit satuan, M_2=7 unit satuan, M_3= 5 unit dan M_4= 4 unit satuan. Dengan menganggap kapasitas antar himpunan bagian P dan kapasitas pengiriman antar himpunan bagian M adalah nol, dan dengan dasar kapasitas pengiriman pada bulan-bulan sebelumnya , maka akan ditunjukkan bahwa sistem pengapalan ini feasible, dan data tersebut adalah sbb :

Keb		M_1	M_2	M_3	M_4
Sumber		9	7	5	4
P_1	10	3	3	2	2
P_2	8	3	3	3	1
P_3	4	2	2	2	1
P_4	3	1	1	1	1

Dimana elemen-elemen dalam tabel matrik diatas yaitu $k(P_i,M_j)$ merupakan kapasitas pengiriman pada bulan-bulan sebelumnya, dimana i,j = 1,2,...,4.

Untuk memulai menganalisa, pertama dibuat tabel, dimana semua kapasitas dari setiap sumber menuju masing-masing kebutuhan dituliskan dalam suatu tabel yang lebih besar, juga kapasitas dari masing-masing kebutuhan ke masing - masing sumber, tentu saja mula-mula semua kapasitas ini adalah nol dan tabel tersebut adalah sbb :

Pada tabel ini diambil langkah-langkah yang terdiri dari beberapa tahap langkah aliran fungsi,misalkan langngiriman k_{ij} dan kapasitas pengiriman dari $M_j \longrightarrow P_i$ juga sebesar k_{ij}.

		M_1	9	M_2	7	M_3	5	M_4	4
P_1	10	3	0	3	0	2	0	2	0
P_2	8	3	0	3	0	3	0	1	0
P_3	4	2	0	2	0	2	0	1	0
P_4	3	1	0	1	0	1	0	1	0

Untuk mendapatkan aliran fungsi, mula-mula dengan mengapalkan sebanyak-banyaknya dari sumber $P_1 \longrightarrow M_j$ dimana $j = 1,2,\ldots,4$ tanpa memperbesar kapasitas aliran maupun kapasitas setiap kebutuhan M_j serta tidak melebihi persediaan pada setiap sumber P_i, Pada langkah ini, maka 3 unit dapat dikapalkan menuju M_1, 3 unit dikapalkan menuju M_2, 2 unit dikapalkan $\longrightarrow M_3$ dan 2 unit dapat dikapalkan $\longrightarrow M_4$, Sehingga kapasitas P_1 dan dan M_j sesedah mengalami pengapalan adalah sbb :

		M_1	6	M_2	4	M_3	3	M_4	2
P_1	0	0	3	0	3	0	2	0	2

Dengan metoda cara yang yang sama, maka tabel untuk pengiriman dari P_i M_j adalah sbb :

		M_1	3	M_2	1	M_3	1	M_4	2
P_2	0	0	3	0	3	1	2	1	0

		M_1	1	M_2	0	M_3	0	M_4	2
P_3	0	0	2	1	1	1	1	1	0

		M_1	0	M_2	0	M_3	0	M_4	1
P_4	1	0	1	1	0	1	0	0	1

Pada tabel dari pengiriman $P_2 \longrightarrow M_j$ dimana $j = 1,2,..,4$ terlihat pada pengiriman $P_2 \longrightarrow M_3$ meskipun kapasitas pengiriman yang harus dibawa adalah 3 unit, karena jumlah dari sumber P_2 hanya 8 unit, dan sudah untuk mengirim M_1 dan M_2 sejumlah 6 unit sehingga sisa 2 unit untuk dikirimkan ke M_3 dan M_4, Praktis pengiriman dari $P_2 \longrightarrow M_3$ maksimal hanya dapat 2 unit, dan pengiriman dari $P_2 \longrightarrow M_4$ otomatis nol, walaupun kapasitas pengirimannya yang harus dibawa adalah 1 unit. Dengan menentukan jumlah pengiriman semaksimal mungkin untuk $P_i \longrightarrow M_j$, $(i,j + 1,2,..,4)$ dengan syarat tidak melampaui batas maksimal kapasitas k_{ij}, Sehingga dari semua langkah diatas dapat dihimpun menjadi tabel $k_1(i,j)$ sebagai berikut :

TABEL $k_1(i,j)$

		M_1	0	M_2	0	M_3	0	M_4	0
P_1	0	0	3	0	3	0	2	0	2
P	0	0	3	0	3	1	2	1	0
P_3	0	0	2	1	1	1	1	1	0
P_4	1	0	1	1	0	1	0	0	1

Pada tabel $k_1(i,j)$ diatas, terlihat masing-masing kebutuhan M_j telah terpenuhi kebutuhannya, kecuali kebutuhan pada M_4 masih kurang 1 unit dan masing-masing sumber P_i

pada sumber P_4 masih tersedia 1 unit, akan tetapi aliran fungsi-fungsi pengiriman dari $P_4 \longrightarrow M_4$ kapasitasnya sudah maksimal, Jadi pengiriman langsung dari P_4 menuju M_4 sudah tidak mungkin lagi. Agar kebutuhan pada M_4 dapat terpenuhi, maka dicarilah jalur aliran fungsi untuk memenuhi kebutuhan pada kebutuhan M_4, dan jalur ini misalnya dari $P_4 \longrightarrow M_2 \longrightarrow P_3 \longrightarrow M_4$, sehingga M_4 dapat terpenuhi kebutuhannya, Karena pengiriman dari P_4 menuju M_2 masih memungkinkan untuk mengirimkan sejumlah 1 unit, sehingga pengiriman dari $P_3 \longrightarrow M_4$ dapat diadakan pengiriman secara langsung 1 unit. Dengan demikian masing-masing kebutuhan pada setiap M_i dapat terpenuhi kebutuhannya, dan masalah pengapalan tersebut adalah feasible.