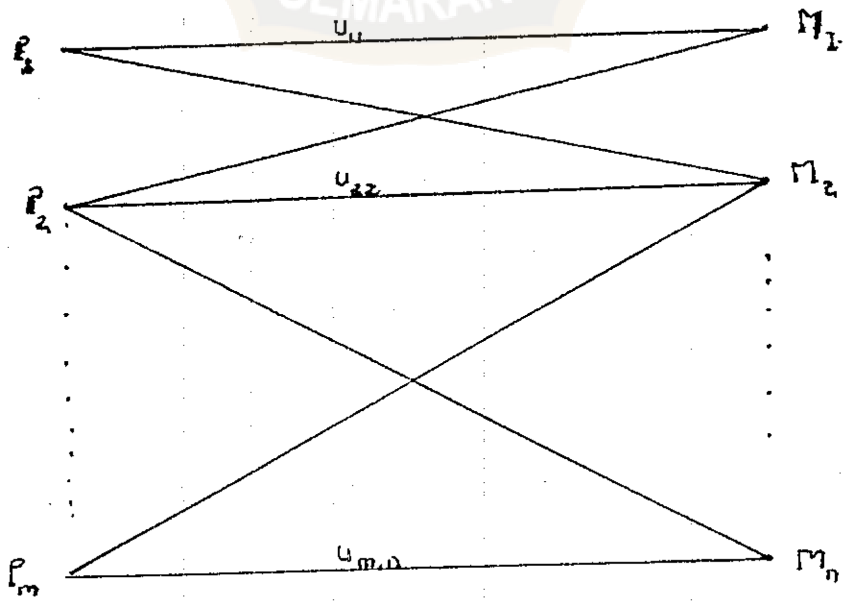
B A B II

SISTEM ALIRAN DALAM JARINGAN.

Seperti yang telah disebutkan pada pendahuluan bahwa suatu permasalahan transportasi dalam kehidupan sehari-hari yang komplek,untuk mempermudah dalam pembahasannya ditransportasikan dahulu ke dalam perumusan transportasi, dalam hal ini dibawa ke dalam sistem jaringan untuk kemudian dianalisa dan dicari jalan penyelesaiannya, Untuk itu maka dalam hal ini akan diambil contoh - permasalahan transportasi dalam kehidupan sehari-hari.

Misalkan diambil sejumlah m pabrik yang memproduksi suatu jenis barang dengan notasi $P_1, P_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, P_m$ dan sejumlah n pasar yang membutuhkan hasil produksi dari masing-masing pabrik diatas dengan notasi $M_1, M_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, M_n$, Hubungan dari setiap pabrik P_i dengan setiap pasar M_j dapat disajikan kedalam sistem jaringan ini sebagai berikut :

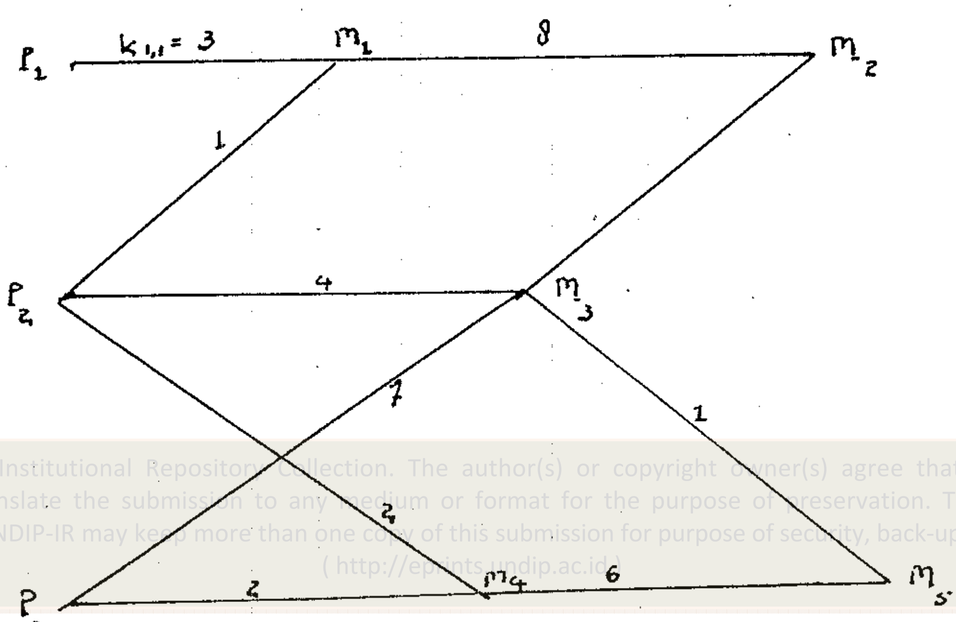


GAMBAR 2.1.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

Suatu pasangan titik-titik (P_i, M_j) dihubungkan dengan - ujung-ujungnya secara langsung dari $P_i \longrightarrow M_j$ dengan ongkos angkutan sebesar u_{ij}.Dalam kenyataannya sangatlah setiap pabrik P_i ($i=1,2,\ldots,m$) ke setiap pasar M_j, hal ini menunjukkan bahwa tidak setiap ujung-ujung pasangan (P_i,M_j) menjadi bagian dari gambar 2.1.

Misalkan bahwa ada batas atas dari barang yang dapat dibawa sepanjang ujung yang ada, hal ini sesuai dengan kenyataan bahwa transportasi hanya dapat melayani barang dengan jumlah tertentu dan waktu tertentu pula, Oleh karena itu kapasitas dari ujung $P_i \longrightarrow M_j$ yang dilambangkan dengan simbul k_{ij} adalah bulat positif, Jika kapasitas dari ujung $P_i \longrightarrow M_j$ adalah nol, berarti tidak mungkin untuk menghubungkan dari pabrik P_i menuju - ke pasar M_j. Pada kenyatannya hubungan suatu pabrik P_i menuju ke suatu pasar M_j dapat sekaligus menghubungkan sejumlah pasar-pasar diantaranya, Untuk itu maka dalam - sistem aliran jaringannya diambil asumsi bahwa setiap - titik dari jaringan transportasi belum tentu menjadi pasar atau pabrik saja, mungkin sekaligus menjadi pasar - dan pabrik. hal ini terlihat seperti pada gambar jaringan 2.2. dibawah ini dimana angka-angka pada setiap garis - tersebut menunjukkan kapasitas yang dibawa.



This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

GAMBAR 2.2.

Jadi semua titik dalam sistem jaringan diperlakukan sama, tidak diperinci apakah titik itu sebagai pabrik atau - pasar atau mungkin titik diantaranya.

2.1. Beberapa Definisi.

DEFINISI 1 :

Suatu kapasitas jaringan (N,k) adalah suatu - himpunan berhingga N dari titik-titik yang a- kan dinyatakan dengan huruf-huruf x,y dst,dimana k adalah suatu fungsi yang mengikuti setiap ujung (x,y) sedemikian hingga $k(x,y)$ adalah suatu bilangan bulat positif, dan untuk selanjutnya masalah hubungan fungsi dalam sistem jaringan disebut dengan Aliran.

DEFINISI 2 :

Aliran dalam jaringan (N,k) adalah suatu fungsi f yang menghubungkan bilangan positif $f(x,y)$ kepada garis (x,y) pada suatu sistem jaringan yang memenuhi :

$$* \; f(x,y) = - f(y,x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$* \; f(x,y) \leq k(x,y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

dimana N adalah banyaknya titik-titik dalam sistem jaringan, dan k adalah kapasitas fungsi maksimal yang menghubungkan titik x dan y, arti dari persyaratan (1) menunjukkan bahwa arah dari fungsi tersebut adalah berlawanan (skew symetry), dan arti dari persyaratan (2) menunjukkan bahwa aliran sepanjang garis tidak boleh melampaui - kapasitas dari garis tersebut (feasibility).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Misalkan sesuai dengan jadwal pengiriman, sejumlah

... dan dalam waktu yang

sama sejumlah barang b dikirimkan dari $y \to x$, maka aliran dari $x \to y$ dalam sistem jaringan adalah a-b dan aliran dari $y \to x$ adalah b-a, dengan adanya persyaratan (2) mengizinkan untuk mengganti dua parameter a dan b dengan parameter tunggal (a-b).

Selanjutnya untuk mempersingkat penulisan diperlukan notasi-notasi sbb :

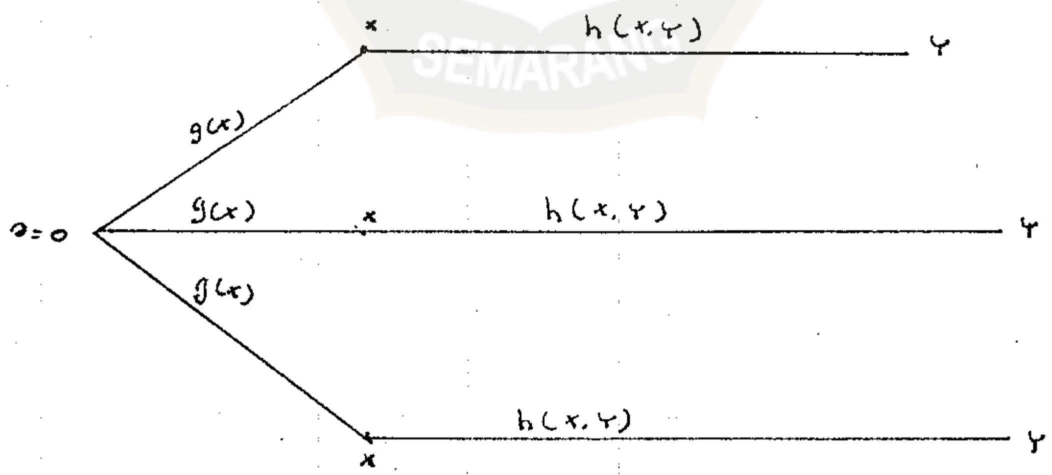
Bila A adalah himpunan bagian dari N ($A \subset N$), dan g adalah fungsi pada N, maka dapat dituliskan sebagai :

$$g(A) = \sum_{x \in A} g(x) \quad , \text{ dengan } A \subset N,\ x \in A$$

Jika h adalah fungsi pada garis (x,y) dan $A,B \subset N$ maka dapat dituliskan sebagai :

$$h(A,B) = \sum_{x \in A,\, y \in B} h(x,y) \quad , \text{ dengan } A,B \subset N.\ x \in A,\ y \in B.$$

atau secara sistem jaringan dapat diilustrasikan sebagai:



GAMBAR 2.3.

DEFINISI 3 :

Jika $A,B,C \subset N$ dan $A \cap B = \emptyset$, maka jika g adalah fungsi pada N dan h adalah fungsi pada garis - (x,y) maka diperoleh :

- $g(A \cup B) = g(A) + g(B)$ ....(i)
- $h(A \cup B,C) = h(A,C) + h(B,C)$ .... (ii)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

- $h(C,A \cup B) = h(C,A) + h(C,B)$ .... (iii)

Dari persyaratan (i) , (ii) dan (iii) maka dapat ditentukan :

- $f(A,A) = 0$, untuk semua $A \subset N$ .... (1')
- $f(A,B) \leq k(A,B)$, untuk semua $A,B \subset N$ ..... (2')

Fungsi $f(A,B)$ mewakili aliran jaringan dari himpunan bagian A menuju himpunan bagian B dan $k(A,B)$ adalah kapasitas total maksimal dari aliran garis yang dimulai dari himpunan bagian A menuju himpunan bagian B.

Misalkan titik s sebagai titik awal dari aliran (source) yang menuju suatu titik akhir s' (sink),misalkan kedua - titik tersebut dapat dihubungkan dengan perantara sistem jaringan yang lebih sulit secara sembarang, sehingga timbul permasalahan bagaimana menentukan berapa nilai aliran maksimum dalam sistem jaringan (N,k) yang dapat dihubungkan dari $s \longrightarrow s'$, Untuk itu masalah ini akan dirumuskan sebagai definisi sebagai berikut :

DEFINISI 4 :

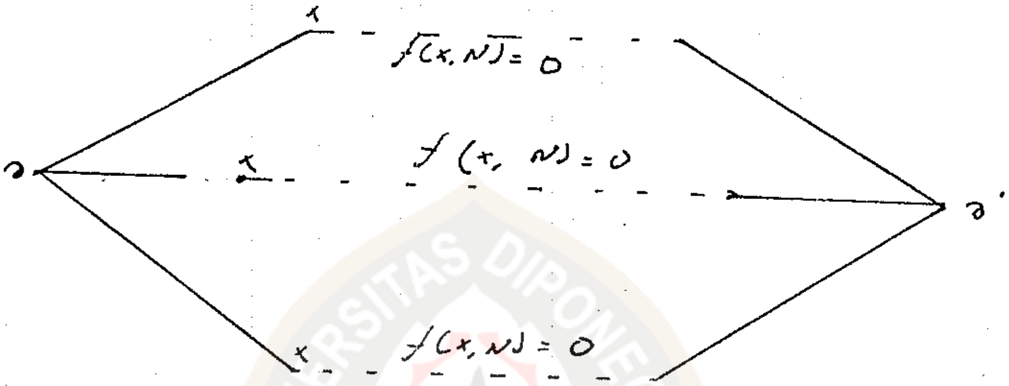
> Titik $s \in N$ disebut dengan titik awal untuk aliran f jika $f(s,N) > 0$ dan Titik s' disebut dengan titik akhir dari suatu aliran jaringan jika $f(s',N) < 0$.

Suatu aliran dalam sistem jaringan dengan titik awal - tunggal s dan titik akhir tunggal s' disebut dengan aliran dari $s \longrightarrow s'$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

Jika f adalah aliran dari $s \longrightarrow s'$, maka $f(x,N) = 0$ untuk $\forall\ x \neq s$ atau $\forall\ x \neq s'$.

$\{ f(s,N) \}$ adalah himpunan semua fungsi-fungsi aliran dalam sistem jaringan (N,k) dari suatu titik pangkal s. $\left\{f(N,s')\right\}$ adalah himpunan semua fungsi-fungsi aliran dalam sistem jaringan (N,k) yang menuju suatu titik akhir s', Dengan demikian $\left\{f(s,N)\right\} = \left\{f(N,s')\right\}$.



GAMBAR 2.4.

Sedangkan nilai dari aliran f adalah jumlahan fungsi-fungsi $f(x,N)$ dari $s \longrightarrow s'$. dan aliran dengan nilai yang sebesar-besarnya disebut dengan aliran maksimal.

DEFINISI 5 :

> Suatu pemotongan dalam sistem jaringan yang disesuaikan dengan s dan s' adalah pemisahan dari titik-titik N menjadi dua himpunan bagian S dan S' dimana $S \cup S' = N$, $S \cap S' = \emptyset$) sedemikian hingga $s \in S$ dan $s' \in S'$.

Suatu pemutongan dalam sistem jaringan (N,k) yang jumlah kapasitasnya mempunyai nilai paling kecil disebut dengan pemotongan kapasitas minimal.

Jika f adalah suatu fungsi aliran dalam sistem jaringan (N,k) dari $s \longrightarrow s'$ dan (S,S') adalah suatu pemotongan dari sistem jaringan tersebut, maka nilai dari f paling banyak adalah $k(S,S')$, dimana $k(S,S')$ adalah kapasitas pemotongan minimal dari kapasitas dari sistem jaringan (N,k),

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:

luar dari titik pangkal $s \longrightarrow s'$ paling banyak adalah $k(S,S')$.

$$
\begin{aligned}
f(s,N) &= f(s,N) + f(S-s,N) \text{ , dimana } f(S-s,N) = 0 \\
&= f(s \cup S-s,N) = f(S,N) \\
&= f(S,S \cup S') = f(S,S') + f(S,S) \\
&= f(S,S') \leq k(S,S') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)
\end{aligned}
$$

Jadi $f(s,N)$ mempunyai nilai paling banyak sama dengan pemotongan kapasitas minimal dari sistem jaringan (N,k) atau $k(S,S')$.

2.2. Teorema.

Nilai dari aliran maksimal yang keluar dari sumber $s \longrightarrow s'$ dalam sistem jaringan (N,k) adalah sama dengan kapasitas dari pemotongan minimal dalam jaringan (N,k). Sebelumnya akan diketengahkan bagaimana dapat terjadinya suatu pemotongan minimal dengan titik-titik $x \in S$ dan $x=s$ sedemikian hingga garis (x,y) yang dipotong mempunyai kapasitas paling kecil dari jalur yang belum jenuh yang dapat dicapai dari $s \longrightarrow s'$, dimana $y \in S'$, Yaitu jika terdapat suatu jalur yang tidak jenuh dari $s \longrightarrow x$, dimana jalur tersebut merupakan suatu deret titik-titik (s,x_1), $(x_1,x_2), \ldots\ldots\ldots, (x_k,x)$ yang semuanya tidak jenuh, yaitu semua titik-titik dari jalur tersebut berada dalam S. Sedangkan set S' adalah komplemen dari set S, Untuk menunjukkan bahwa (S,S') suatu pemotongan yang minimal, maka harus dibentuk set S dan S' sedemikian hingga $s \in S$ dan $s' \in S'$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

BUKTI :

$\Longrightarrow$

Diketahui : $\bar{f}$ adalah fungsi aliran maksimal, hal ini pasti ada karena didalam sistem jaringan (N,k) terdapat banyak sekali aliran yang terbatas dan aliran dihitung secara integral.

Akan dibuktikan bahwa : $\bar{f}(S,S') = k(S,S')$.

Misalkan bahwa pada garis (x,y) alirannya maksimal,maka:

$$\bar{f}(x,y) = k(x,y)$$

Andaikan $k(S,S')$ bukanlah pemotongan kapasitas minimal, Berarti $s' \in S$, Sehingga terdapatlah jalur yang belum jenuh P dari $s \longrightarrow s'$,yaitu untuk $\forall$ garis $(x,y) \in P$ maka

$$\bar{f}(x,y) < k(x,y).$$

Misalkan δ = minim $k(x,y)-\bar{f}(x,y)$,maka jelas terdapatlah aliran baru :

$$f'(x,y) = \bar{f}(x,y) + \delta \text{ , untuk } (X,y) \quad P.$$

Sehingga $f'(x,y) > \bar{f}(x,y)$, Kontradiksi dengan yang diketahui,sehingga pengandaiannya salah (harus diingkar).

$\Longleftarrow$

Diketahui $k(S,S')$ adalah kapasitas pemotongan dari sistem jaringan (N,k),dan berpangkal pada pertidaksamaan (3)

$$f(s,N) = f(S,S') \leq k(S,S')$$

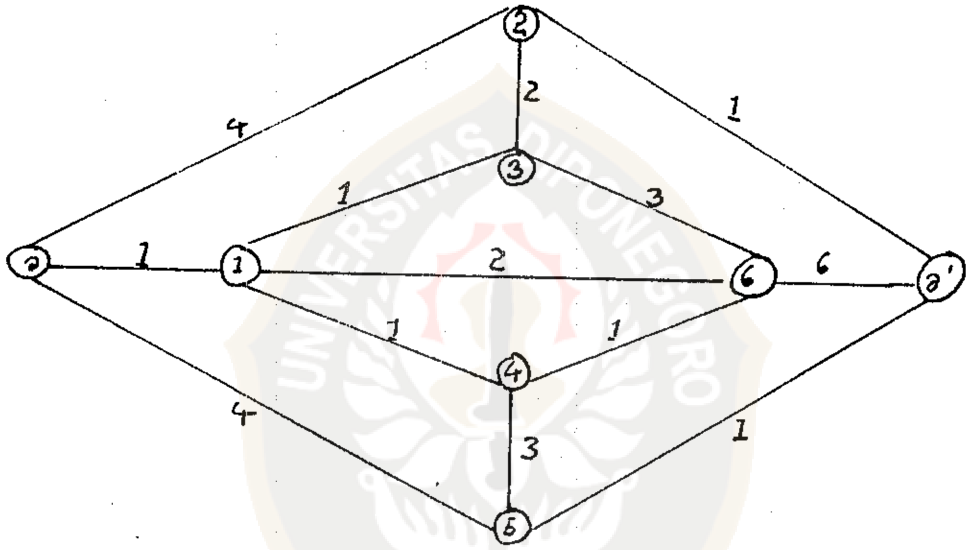
Andaikan $f(S,S')$ bukanlah aliran yang maksimal,maka pertidaksamaan diatas yang terjadi adalah $f(S,S') < k(S,S')$ Sehingga untuk $\forall$ garis $(x,y) \Longrightarrow \bar{f}(x,y) < k(x,y)$, untuk $\forall$ $x \in S$ dan $y \in S'$, Sehingga menurut analisa diatas terdapatlah jalur yang tidak jenuh P dari $s \longrightarrow s'$, dimana jalur tersebut merupakan suatu deretan titik-titik (s,x_1), (x_1,x_2),..........,(x_k,s')yang semuanya belum jenuh,yaitu semua titik-titik dari jalur tersebut berada dalam S. yang berarti $s' \in S$ dan $k(S,S')$ bukanlah pemotongan minimal,kontradiksi dengan yang diketahui sehingga $f(S,S')$ haruslah maksimal,Dengan demikian kejadian $f(S,S') < k(S,S')$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

kejadian $f(S,S') = k(S,S')$.

2.3. Contoh Permasalahan.

Perhatikan sistem aliran jaringan dibawah ini, dimana sistem aliran aliran jaringannya diambil dari Buku The Theory Of Linier Economic Model, Oleh DVID GALE : New York Mc Graw-Hill Book Company 1960.



GAMBAR 2.5.

Angka-angka yang dilingkari menunjukkan titik/kota yang akan dialiri oleh aliran, sedangkan angka-angka pada setiap garis menyatakan kapasitas maksimal yang dibawa oleh $\forall$ garis yang diasumsikan nilainya sama untuk ke dua arah. Seperti pada pembahasan teorema diatas, untuk mendapatkan aliran yang maksimal pada sistem aliran jaringan(N,k), pertama-tama dibentuklah himpunan bagian S_1 dari semua titik-titik yang dapat dicapai dari titik $s \longrightarrow s'$ dengan jalur yang tidak jenuh, dengan dimualai menentukan aliran awal, misalkan f_1. Jika $s' \in S_1$ maka masih $\exists$ jalur yang belum jenuh dari $s \longrightarrow s'$ atau $\exists$ aliran tambahan misalnya f_1', sedemikian hingga terdapat aliran baru $f_2 = f_1 + f_1'$. tetapi jika $s' \notin S_1 \Longrightarrow f_1$ sudah mencapai maksimal dan pemotongan kapasitas (S,S') ada-

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

Untuk mempermudah langkah perhitungan,sistem aliran jaringan diatas secara keseluruhan sistem jaringan pada gambar 2.5. diatas ditransformasikan kedalam bentuk sistem tabel kapasitas matrik yang berukuran n x n, dimana n adalah banyaknya titik/kota yang akan dilalui oleh aliran,Jadi setiap titik/kota dipandang mempunyai relasi terhadap semua titik-titik yang ada dalam sistem jaringan.Oleh karena itu matrik kapasotasnya berukuran 8 x 8, karena sistem aliran jaringan diatas terdiri dari 8 titik,Sehingga tabel matrik kapasitasnya merupakan tabel sistem aliran,maka didalam sistem tabelnya terdapat banyak sekali kemungkinan jalur garis yang akan timbul, disini titik-titik dari jaringan menjadi indek kolom dan indek baris dalam sistem tabel kapasitas matrik, maka banyaknya kemungkinan aliran garis didalam tabel ini adalah n^2, misalkan jalur dari baris ke i ——o——> kolom ke j, sedangkan elemen-elemen dalam tabel merupakan kapasitas yang dibawa oleh masing-masing aliran garis.

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	1	4	0	0	4	0	0
1	1	0	0	1	1	0	2	0
2	4	0	0	2	0	0	0	1
3	0	1	2	0	0	0	3	0
4	0	1	0	0	0	3	1	0
5	4	0	0	0	3	0	0	1
6	0	2	0	3	1	0	0	6
s'	0	0	1	0	0	1	6	0

k(s,s) = 0
k(s,1) = 1
k(s,4) = 4
k(s,5) = 5
k(1,6) = 2
k(2,s) = 4
k(5,4) = 3
k(s',5) = 1
dll

TABEL KAPASITAS MATRIK k

Dari tabel matrik diatas,maka dapat terlihat banyaknya kapasitas yang dibawa dari baris s ——o——> kolom 2 adalah

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Untuk dapat dimulainya perhitungan,pertama-tama ditentukannya tabel aliran awal f_1, dimana tabel aliran f_1 diperoleh dengan menentukan satu unit jaringan bagian awal, satu unit jaringan bagian akhir dan satu unit jaringan bagian tengah.Satu unit jaringan bagian awal meliputi semua titik-titik dalam sistem jaringan yang dapat berhubungan langsung dengan titik s,Satu unit jaringan bagian akhir yang meliputi semua titik-titik yang dapat berhubungan langsung dengan titik s' dan satu unit jaringan bagian tengah yang meliputi semua titik-titik yang dapat berhubungan langsung dengan titik s atau s'. Tampak pada tabel f_1 dapat dilihat satu unit jaringan bagian awal meliputi jalur garis pada baris s dan satu unit jaringan bagian akhir meliputi jalur garis pada baris s' serta satu unit jaringan bagian tengah meliputi jalur garis pada kolom s, kolom 1, kolom 6 serta kolom s'.

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	1	1	0	0	1	0	0
1	-1	0	0	0	0	0	1	0
2	-1	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-1	0	0	0	0	0	0	1
6	0	-0	0	0	0	0	0	1
s'	0	0	-0	0	0	-1	-1	0

TABEL MATRIK SATUAN f_1

Sebelum membentuk set S dengan menentukan suatu jalur yang tidak jenuh, maka matrik kapasitas k dikurangi dengan matrik aliran f_1, sehingga diperoleh matrik k_1 sbb :

Pada tabel matrik kapasitas k_1 ini ditentukan jalur yang

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

tidak jenuh dari $s \longrightarrow s'$, yaitu mencari jalur kapasitas dari $s \longrightarrow s'$ yang relatif positif terhadap tabel matrik kapasitas k_1.

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	0	3	0	0	3	0	0
1	2	0	0	1	1	0	1	0
2	5	0	0	2	0	0	0	0
3	0	1	2	0	0	0	3	0
4	0	1	0	0	0	3	1	0
5	5	0	0	0	3	0	0	0
6	0	0	0	3	1	0	0	5
s'	0	0	2	0	0	2	7	0

$k_1(s,1) = k(s,1) - f_1(s,1)$
$= 1 - 1 = 0$

$k_1(s,5) = k(s,5) - f_1(s,5)$
$= 4 - 1 = 3$

$k_1(s',6) = k(s',6) - f_1(s',6)$
$= 6 - (-1) = 7$

dll

TABEL $k_1 \cong k - f_1$

Dengan mencari terlebih dahulu semua titik-titik yang dapat dicapai dari s pada tabel matrik kapasitas k_1, titik-titik yang dapat dicapai secara langsung dari s adalah titik 2 dan titik 5 (hal ini terlihat pada tabel baris s)

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	0	3	0	0	3	0	0
1	2	0	0	1	1	0	1	0
2	$\boxed{5}$	0	0	2	0	0	0	0
3	0	1	$\boxed{2}$	0	0	0	3	0
4	0	1	0	0	0	3	1	0
5	5	0	0	0	3	0	0	0
6	0	3	0	$\boxed{3}$	1	0	0	5
s'	0	0	2	0	0	2	$\boxed{7}$	0

$k_1(s,1) = 0$

$k_1(2,s') = 0$

$k_1(5,s') = 0$

TABEL KAPASITAS MATRIK k_1

DGN JALUR KPST : $s \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow s'$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dari titik 2 dan 5 inilah dicari jalur-jalur yang tidak jenuh menuju titik s', Pada tabel matrik kapasitas k_1 diatas kemungkinan jalur dari $s \leftarrow\!\!\circ\!\!\rightarrow s'$ yang tidak jenuh yang akan muncul adalah jalur-jalur :

- $k_1(s,2), k_1(2,3), k_1(3,6), k_1(6,s')$.
- $k_1(s,5), k_1(5,4), k_1(4,6), k_1(6,s')$.
- $k_1(s,5), k_1(5,4), k_1(4,1), k_1(1,6), k_1(6,s')$.

Pada tabel diatas diambil jalur dari $s \longrightarrow\!\!\circ\!\!\rightarrow s'$ dengan urutan : $k_1(s,2), k_1(2,3), k_1(3,6), k_1(6,s')$, Pada jalur ini kapasitas yang dibawa untuk arah positif diberi tanda dengan lingkaran pada tabel k_1 dan kapasitas yang dibawa dengan arah negatif diberi tanda kotak-kotak. Ternyata nilai minimal dari masing-masing kapasitas yang dibawa dari jalur tersebut adalah 2. yaitu jalur kapasitas $k_1(2,3)$ yang mempunyai nilai kapasitas 2 unit, Sehingga pada jalur ini dapat mengirimkan suatu aliran dengan kapasitas masing-masing sejumlah 2 unit. Langkah selanjutnya adalah menentukan matrik kapasitas baru k_2 dengan cara mengurangi masukan kapasitas pada jalur k_1 diatas dengan 2 unit untuk arah positif dan menambahkan dengan masukan 2 unit dari jalur pada k_1 diatas untuk arah negatif, Jadi tabel $k \simeq k_1 \simeq k_2$, Karena kapasitas yang dibawa $\forall$ jalur garis untuk arah yang berlawanan diasumsikan sama. Tabel berikut ini adalah tabel matrik kapasitas k_2 sebagai hasil analisa diatas, Dari semua langkah-langkah diatas ternyata nilai kapasitas $k_1(s,1) = 0$, $k_1(2,s') = 0$, $k_1(5,s') = 0$ dan $k_2(2,3) = 0$, Kapasitas-kapasitas pada garis ini yang nantinya akan menjadi anggauta dari $k(S,S')$. Untuk selanjutnya pada tabel matrik kapasotas k_2 ini ditentukannya jalur yang tidak jenuh lagi, yaitu jalur yang masing-masing mempunyai kapasitas sebagai berikut :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$k_2(s,5), k_2(5,4), k_2(4,6), k_2(6,s')$.

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	0	1	0	0	3	0	0
1	2	0	0	1	1	0	1	0
2	7	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	4	0	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	3	1	0
5	5	0	0	0	3	0	0	0
6	0	3	0	5	1	0	0	3
s'	0	0	2	0	0	2	9	0

<u>Arah Pos.</u>

$k_2(s,2) = k_1(s,2) - 2 =$
$= 3 - 2 = 1$

$k_2(2,3) = k_1(2,3) - 2 =$
$= 2 - 2 = 0$

dll.

<u>Arah Neg.</u>

$k_2(2,s) = k_1(2,s) + 2 =$
$= 5 + 2 = 7$

dll.

TABEL KAPASITAS MATRIK k_2

Seperti pada metoda diatas, maka kapasitas masukan jalur dengan arah positif dilingkari dan untuk arah negatif diberi tanda dengan kotak-kotak, tabel matrik kapasitas k_2 dengan jalur tersebut adalah sbb :

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	0	1	0	0	3	0	0
1	2	0	0	1	1	0	1	0
2	7	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	4	0	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	3	1	0
5	$\boxed{5}$	0	0	0	3	0	0	0
6	0	3	0	5	$\boxed{1}$	0	0	3
s'	0	0	2	0	0	2	$\boxed{9}$	0

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

TABEL KAPASITAS MATRIK k_2

DGN JALUR KAPASITAS : (s,5),(5,4),(4,6),(6,s')

Karena nilai minimal kapasitas pada jalur tabel k_2 diatas adalah 1,yaitu $k_2(4,6) = 1$, maka pada jalur tabel matrik k_2 ini dapat dikirimkan masing-masing jalur garisnya sejumlah 1 unit, Dengan demikian kapasitas aliran pada tabel matrik k_2 dikurangi dengan 1 unit untuk arah yang positif dan ditambah dengan 1 unit untuk arah yang negatif pada jalur tabel k_2 diatas. Sehingga didapat tabel kapasitas matrik k_3 yang ekivalen dengan tabel kapasitas matrik k_2.

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	0	1	0	0	2	0	0
1	2	0	0	1	1	0	1	0
2	7	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	4	0	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	4	0	0
5	6	0	0	0	2	0	0	0
6	0	3	0	5	2	0	0	2
s'	0	0	2	0	0	2	10	0

Arah Pos.

$k_3(s,5)=k_2(s,5)-1 =$

$= 3 - 1 = 2$

$k_3(4,6)=k_2(4,6) - 1=$

$= 1 - 1 = 0$

dll.

Arah Neg.

$k_3(5,s)=k_2(5,s) + 1 =$

$= 5 + 1 = 6$

dll.

TABEL KAPASITAS MATRIK k_3

$$k \simeq k_1 \simeq k_2 \simeq k_3$$

Selanjutnya pada tabel matrik kapasitas k_3 diatas ditentukan lagi jalur yang tidak jenuh dari $s \longrightarrow s'$.

Kemungkinan terdapatnya jalur yang tidak jenuh lagi dari $s \longrightarrow s'$ adalah tinggal jalur (s,5),(5,4),(4,1),(1,6),(6,s'). Pada jalur ini ternyata nilai kapasitas yang paling kecil adalah 1, jadi pada jalur tabel kapasitas matrik k_3 ini memungkinkan untuk mengirimkan aliran sejumlah 1 unit, sehingga deperoleh tabel kapasitas matrik k_4

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

k_3 berturut-turut adalah sebagai berikut :

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	0	1	0	0	2	0	0
1	2	0	0	1	$\boxed{1}$	0	1	0
2	7	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	4	0	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	4	0	0
5	$\boxed{6}$	0	0	0	2	0	0	0
6	0	$\boxed{3}$	0	5	2	0	0	2
s'	0	0	2	0	0	2	$\boxed{10}$	0

TABEL KAPASITAS MATRIK k_3

DGN JALUR KPST : s $\longrightarrow$ 5 $\longrightarrow$ 4 $\longrightarrow$ 1 $\longrightarrow$ 6 $\longrightarrow$ s'

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	0	1	0	0	1	0	0
1	2	0	0	1	2	0	0	0
2	7	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	4	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	5	0	0
5	7	0	0	0	1	0	0	0
6	0	4	0	5	2	0	0	1
s'	0	0	2	0	0	2	11	0

TABEL KAPASITAS MATRIK k_4

<u>Arah Pos.</u>

$k_4(s,5)=k_3(s,5)-1=$

$= 2 - 1 = 1$

$k_4(5,4)=k_3(5,4)-1=$

$= 2 - 1 = 1$

dll.

<u>Arah Neg.</u>

$k_4(5,s)=k_3(5,s)+1=$

$= 6 + 1 = 7$

dll.

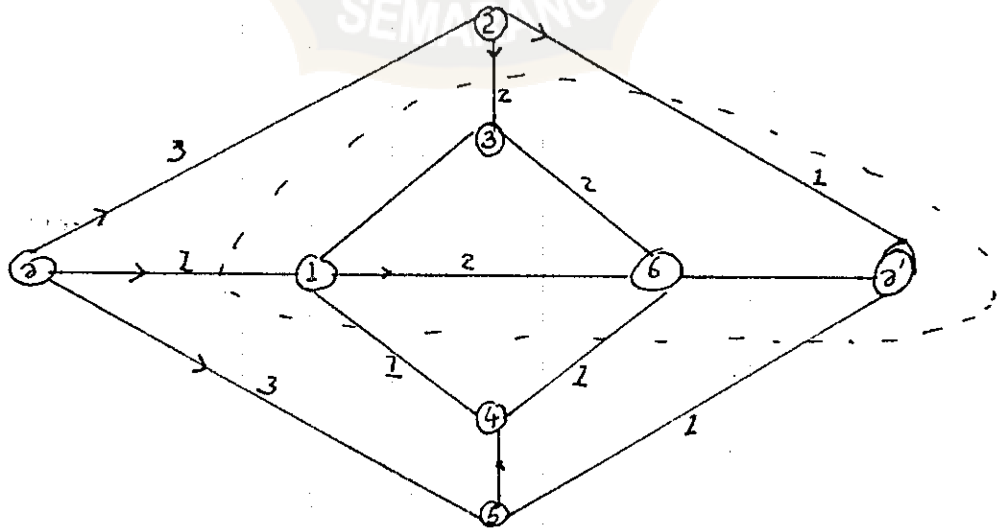
This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dari semua langkah-langkah diatas ternyata semua titik-titik yang dapat dicapai dari s $\longrightarrow$ s' dengan jalur yang tidak jenuh sudah tidak ada lagi,Sehingga dapat terbentuk- ... n bagian S dengan s' $\in$ S,Dari aliran jaringan diatas ternyata hanya terdapat tiga jalur yang tidak jenuh, dan ketiga jalur tersebut setelah mengalami perubahan-perubahan, ternyata titik-titik s,2,4 dan titik 5 membentuk himpunan bagian S, jadi $s,2,4,5 \in S$ dan titik-titik 1,3,6 dan s' menjadi anggauta himpunan bagian S'. Dengan demikian perhitungan sudah selesai, karena sudah terbentuknya pemotongan minimal dari jaringan (N,k) sedemikian hingga $s \in S$ dan $s' \in S'$. Kapasitas pemotongan minimalnya adalah :

$$k(S,S') = k(s,1)+k(2,3)+k(2,s')+k(5,s')+k(4,1)+k(4,6)$$

$$= 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$$

Dengan terbentuknya himpunan bagian S, maka pada sistem aliran jaringan dibawah ini terlihat bahwa titik-titik yang dikelilingi oleh garis putus-putus merupakan himpunan bagian S' dari pemotongan sistem jaringan.



GAMBAR 2.6.

Dari tabel kapasitas matrik k_4 diatas dapat untuk menentukan tabel aliran maksimal, yaitu $f = k(i,j) - k_4(i,j)$, dimana indek (i,j) adalah banyaknya titik didalam sistem aliran jaringan dan f adalah tabel aliran maksimal.

Dari tabel kapasitas matrik f dapat terlihat aliran tot-

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

ka dalam baris s dan akan sama dengan jumlahan angka-angka yang masuk dalam titik s' yang nilainya sama dengan jumlahan angka-angka dalam kolom s', dan nilai dari aliran maksimalnya adalah 7, Jadi nilai dari aliran maksimal sama dengan nilai kapasitas pemotongan minimal, dan hal ini sesuai dengan teorema.

Ternyata dalam tabel matrik aliran maksimal f ini jumlah pemasukan dalam semua baris/kolom kecuali pada baris/kolom s dan s' adalah nol, hal ini sesuai dengan akibat dari definisi 4, yaitu jika f adalah aliran dari $s \xrightarrow{\theta} s'$ maka $f(x,N) = 0$ untuk $\forall\ x \neq s$ dan $x = s'$. Jadi nilai dari kapasitas pemotongan minimal adalah jumlahan dari garis yang dipotong oleh himpunan bagian S dan himpunan bagian S'.

	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	1	3	0	0	3	0	0
1	-1	0	0	0	-1	0	2	0
2	-3	0	0	2	0	0	0	1
3	0	0	-2	0	0	0	2	0
4	0	1	0	0	0	-2	1	0
5	-3	0	0	0	2	0	0	0
6	0	-1	0	-2	-1	0	0	5
s'	0	0	-1	0	0	-1	-5	0

TABEL ALIRAN MAKSIMAL f.

$$f(i,j) = k(i,j) - k_4(i,j)$$

$$i,j = s,1,\ldots,s'$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)