3.1. Definisi ruang metrik.

Definisi 3.1.1.

Misal $(X,\mathcal{T})$ adalah ruang topologi.

$X \neq 0$.

Fungsi $d : X \times X \longrightarrow X$.

d dikatakan fungsi jarak atau metrik di X apabila memenuhi untuk setiap $a,b,c \in X$ berlaku :

(i). $d(a,b) \geqslant 0$ dan $d(a,a) = 0$.

(ii). $d(a,b) = d(b,a)$.

(iii). $d(a,c) \leqslant d(a,b) + d(b,c)$.

(iv). Jika $a \neq b$ maka $d(a,b) > 0$.

Contoh.

1. Fungsi didefinisikan sebagai berikut :

   $d(a,b) = |a - b|$, dimana a dan b adalah bilangan riil.

   Maka fungsi d adalah metrik , (X,d) adalah ruang metrik.

2. Fungsi d didefinisikan sebagai berikut :

   $$d(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{jika } a \neq b \\ 0 & \text{jika } a = b \end{cases}$$

   Maka fungsi d adalah metrik dan (X,d) adalah ruang metrik.

3. Fungsi e didefinisikan sebagai berikut :

   $e(a,b) = \min(1, d(a,b))$, dengan d adalah metrik .

   Maka fungsi e adalah metrik juga.

3.2. Himpunan kompak .

Definisi 3.2.1.

Misal X adalah suatu himpunan dan $A \subset X$.

$\{U_i\}_{i \in I}$ adalah koleksi himpunan bagian dari X .

U_i dikatakan sebagai tutupan (cover) dari A , bila dan hanya bila $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

Jika I berhingga maka dikatakan tutupan diatas adalah berhingga .

Contoh.

1. Misal (X,σ) adalah suatu ruang topologi.
   $A \subset X$ dan untuk setiap $x \in A$ ada $V_x \in \mathcal{N}_x$, maka $\{V_x\}_{x \in X}$ adalah tutupan dari A .
2. Untuk setiap $n \in N$, ada $U_n = (-n,n)$.
   Maka $\{U_n\}_{n \in N}$ adalah tutupan dari $\mathbb{R}$, Atau dengan pernyataan lain $R \subset \bigcup_n U_n$.

Definisi 3.2.2.

Misal (X,σ) adalah suatu ruang topologi .
(X,σ) dikatakan terpisah, bila untuk setiap x dan $y \in X$, $x \neq y$ ada $V_x \in \mathcal{N}_x$, dan $V_y \in \mathcal{N}_y$ yang memenuhi $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Contoh .

1. Misal : $X = \{a,b,c\}$ dan
   $\sigma = \{\emptyset, \{a,b\}, \{c\}, X\}$.
   Maka σ bukan topologi terpisah .
2. Misal (R,U) adalah ruang topologi biasa.
   Maka U adalah topologi terpisah .

Definisi 3.2.3.

Ruang topologi yang terpisah (X,σ) dikatakan kompak , bila untuk setiap tutupan terbuka $\{U_i\}_{i \in I}$ dari X , ada himpunan berhingga $F \subset I$, sedemikian hingga $\{U_i\}_{i \in F}$, masih merupakan tutupan dari X .
Jadi (X,σ) disebut kompak , bila dan hanya bila untuk setiap tutupan terbuka dari X memuat tutupan yang berhingga (dapat direducir).

Definisi 3.2.4.

Himpunan $A \subset X$ disebut kompak , bila dan hanya bila untuk setiap tutupan $\{U_i\}_{i \in I}$ dari A , selalu terdiri dari himpunan - himpunan yang ada didalam σ , dan $F \subset I$ (F himpunan berhingga) , sedemikian hingga $\{U_i\}_{i \in F}$ masih merupakan tutupan dari A .

Contoh .

1. Misal $a \in R$, $b \in R$, $a < b$.
   Maka $[a,b]$ adalah himpunan kompak di R .
2. Ruang topologi (R,U) tidak kompak .
3. $(0,1]$ R tidak kompak di R .

Theorema 3.2.1.

Misal $(X,\mathcal{T})$ adalah suatu ruang topologi .
$A \subset X$ dan $B \subset X$ adalah dua himpunan bagian yang kompak dari X.
Maka $A \cup B$ adalah himpunan yang kompak .

Bukti .

Misal $\{U_i\}_{i \in I}$ adalah tutupan terbuka dari $A \cup B$, maka
$A \subset A \cup B \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.
Karena A kompak , maka ada himpunan berhingga $F_1 \subset I$ sedemikian hingga $A \subset \bigcup_{i \in F_1} U_i$.
Dengan jalan yang sama seperti diatas , maka ada himpunan berhingga $F_2 \subset I$ sedemikian hingga $B \subset \bigcup_{i \in F_2} U_i$.
Selanjutnya $F = F_1 \cup F_2$, maka F berhingga dan
$A \cup B \subset (\bigcup_{i \in F_1} U_i) \cup (\bigcup_{i \in F_2} U_i) = \bigcup_{i \in F} U_i$.
Dari sini $\{U_i\}_{i \in F}$ adalah tutupan berhingga dari $A \cup B$.
Karena $A \cup B$ dapat ditutup dengan tutupan yang berhingga,maka $A \cup B$ kompak .

Theorema 3.2.2.

Misal $(X,\mathcal{T})$ adalah suatu ruang topologi , dan $A \subset X$, $B \subset X$.
Jika A kompak dan $B = \overline{B} \subset A$, maka B kompak .

Bukti .

Misal $\{U_i\}_{i \in I}$ adalah tutupan sebarang dari B , dan $\alpha \notin I$
$U_\alpha = B^C$ dan $J = I \cup \{\alpha\}$. Maka $\{U_i\}_{i \in J}$ adalah tutupan terbuka dari A. Dari sini maka ada himpunan berhingga $H \subset J$ dengan $H = K \cup \{\alpha\}$, dimana $K \subset I$, sedemikian hingga $A \subset \bigcup_{i \in H} U_i$.
Jika $F = H - \{\alpha\}$, kita menyimpulkan (dengan memperhatikan

$B \cap U_\alpha = \emptyset$) bahwa $B \subset \bigcup_{i \in F} U_i$.

Dari sini $\{U_i\}_{i \in F}$ adalah tutupan berhingga dari B . Karena $\{U_i\}_{i \in I}$ dengan I sebarang maka B kompak .

Contoh .

Misal (R,U) adalah ruang topologi .

$A = [0\ ,\ 2]$ adalah himpunan kompak , maka

$B = [\frac{1}{2}\ ,\ 1\frac{1}{2}]$ adalah himpunan kompak juga .

Theorema 3.2.3.

Misal (X,σ) adalah suatu ruang topologi terpisah , $A \subset X$ himpunan yang kompak . $b \notin A$, maka ada himpunan terbuka U dan V sedemikian hingga $A \subset U$, $b \in V$, $U \cap V = 0$.

Bukti .

Karena (X,σ) adalah terpisah , bisa disimpulkan bahwa untuk se setiap $a \in A$ ada persekitaran terbuka $U_a \in \mathcal{N}_a$ dan $V_a \in \mathcal{N}_b$ yang memenuhi $U_a \cap V_a \neq 0$.

Terlihat bahwa $\{U_a\}_{a \in A}$ adalah tutupan terbuka dari A . Karena A kompak maka ada himpunan berhingga $\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\} \subset A$ sedemikian hingga $A \subset U$. Jika $U = \bigcup_{j=1}^{n} U_{aj}$.

Andaikan $V = \bigcap_{j=1}^{n} V_{aj}$, maka U dan V adalah terbuka , dan terlihat bahwa $A \subset U$ dan $b \in V$. Jika $x \in U$, maka ada j_o sedemikian hingga $1 \leqslant j_o \leqslant n$ dan sedemikian hingga $x \in U_{aj_o}$.

Maka $x \notin V_{aj_o}$. Dari sini $x \notin V$ maka $U \cap V = 0$.

Theorema 3.2.4.

Jika A kompak maka $A = \bar{A}$.

Bukti .

Misal $b \notin A$, maka dengan theorema 3.2.3 , maka ada $V \in \mathcal{N}_b$ sedemikian hingga $V \cap A = \emptyset$. Karena itu $V \cap \bar{A} = \emptyset$, dan $b \in V$.

Dari sini $b \notin \bar{A}$.

$b \notin A$ berlaku $b \notin \bar{A}$, maka $\bar{A} \subset A$.

Jadi $A = \bar{A}$.

Misal $A \subset R$ dengan (R,U) adalah suatu ruang topologi biasa .

Maka pernyataan dibawah ini adalah ekivalen .

(i). A terbatas dan tertutup .

(ii). A kompak .

Bukti .

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Jika A terbatas maka ada α dan $\beta \in R$, sedemikian hingga $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ untuk semua $x \in A$. Dari sini $A \subset [\alpha,\beta]$. Dengan memakai contoh no : 1 , pada definisi 3.2.4., $[\alpha,\beta]$ kompak .

Selanjutnya karena A tertutup dan dengan memakai theorema 3.2.2. maka A kompak .

(ii) $\Longrightarrow$ (i) .

Jika A kompak , maka dengan memakai theorema 3.2.4. ,terlihat $A = \overline{A}$. Jadi sudah terbukti A tertutup .

Ambil $U_n = (-n,n)$ untuk semua $n \in N$.

Karena $\bigcup_{n \in N} U_n = R$, maka $U_{n \in N}$ adalah tutupan dari A .

Karena A kompak maka ada bagian yang berhingga $F \subset N$ sedemikian hingga $\{U_n\}_{n \in F}$ adalah tutupan dari A.

Ambil $p = \sup F$, maka $U_n \subset U_p = (-p,p)$.

Dari sini pula $-p \leqslant x \leqslant p$ untuk semua $x \in A$, dan terlihat bahwa A terbatas .

3.3. Ruang kompak lokal .

Definisi 3.3.1.

Misal (X,σ) adalah suatu ruang topologi terpisah .

(X,σ) dikatakan kompak lokal , jika untuk setiap $x \in X$, termuat dalam persekitaran x yang penutupnya kompak .

Contoh .

1.Misal $X = \{a,b,c\}$.

Maka $\sigma = \{0 , \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} , X\}$ adalah topologi di X .

Dan himpunan - himpunan anggota dari σ diatas adalah terbuka dan sekaligus tertutup , karena masing - masing apabila diingkar akan menghasilkan himpunan - himpunan yang sama dengan himpunan diatas .

Maka $a \subset \{a\}$ dimana $\overline{\{a\}}$ adalah $\{a\}$.

$b \subset \{b\}$ dimana $\overline{\{b\}}$ adalah $\{b\}$.

$c \subset \{c\}$ dimana $\overline{\{c\}}$ adalah $\{c\}$.

Terlihat bahwa (X,σ) adalah kompak lokal karena setiap titiknya termuat dalam persekitaran yang penutupnya tertutup dan terbatas , atau penutupnya kompak .

2. (R,U) adalah ruang topologi biasa .

   Maka Q = himpunan bilangan rasional , adalah himpunan yang tidak kompak lokal , karena Q apabila dibuat persekitaran dari masing-masing titiknya , maka penutup dari masing - masing persekitaran titik-titik itu hanya R . Padahal sudah diketahui bahwa R tidak kompak .

3. (R,U) adalah ruang topologi biasa , dan kompak lokal.

   Bukti .

   Misal $p \in R$.

   Ambil $(p-\varepsilon , p+\varepsilon)$ adalah persekitaran dari p dengan $\varepsilon > 0$.

   Maka pasti ada himpunan $[p-\varepsilon , p+\varepsilon]$ sebagai penutup dari $(p-\varepsilon , p+\varepsilon)$, dan $[p-\varepsilon , p+\varepsilon]$ adalah kompak , karena tertutup dan terbatas .

<u>Theorema 3.3.1.</u>

Setiap ruang topologi yang kompak pasti kompak lokal , tetapi belum tentu ruang topologi yang kompak lokal pasti kompak .

Bukti .

Misal (X,σ) adalah ruang topologi yang kompak .

Maka setiap persekitaran yang dibuat dari setiap titiknya , pasti ada penutupnya yang kompak , karena ruang topologi itu sendiri bisa menjadi penutup dari setiap himpunan terbuka didalamnya .

Untuk membuktikan bahwa yang kompak lokal belum tentu kompak cukup menunjukkan bahwa ada ruang topologi yang kompak lokal tetapi tidak kompak .

Misal (R,U) adalah ruang topologi biasa , yang mana (R,U) ada lah kompak lokal tetapi tidak kompak , karena tidak ada himpun an bagian yang berhingga $F \subset N$ sedemikian hingga $\{U_n\}_{n \in F}$ yang masih merupakan tutupan dari R.

Bukti.

Misal ada himpunan bagian yang berhingga $F \subset N$, dan $R \subset \{U_n\}_{n \in F}$

Ambil p = sup F , maka $U_n \subset U_p = (-p,p)$ untuk setiap $n \in N$, yang menyebabkan $R \subset (-p,p)$ (tidak mungkin).

Jadi terlihat bahwa (R,U) adalah tidak kompak karena tutupan dari R tidak dapat direducir.

3.4. Ruang topologi metrizabel .

Definisi 3.4.1.

Misal (X,σ) adalah suatu ruang topologi .

(X,σ) dikatakan metrizabel apabila ada metrik d yang dapat diimbas dari X .

Contoh .

A. Ada 3 (tiga) cara untuk mengimbas d dari X di R^2 .

1. Mendefinisikan $S_d(p,\delta) = \{x \in R^2 \mid d(p,x) < \delta\}$.

   Misal : setiap ruang topologi diskrit (X,σ) adalah metrizabel.

   $X = \{a,b,c\}$.

   Definisikan $d(a,b) = 2$ jika $a \neq b$.

   $= 0$ jika $a = b$.

   Maka $S_d(a,1) = \{a\}$ dan $\{a\} \in \sigma$.

   $S_d(b,1) = \{b\}$ dan $\{b\} \in \sigma$.

   $S_d(c,1) = \{c\}$ dan $\{c\} \in \sigma$.

   $S_d(a,3) = \{a,b,c\}$ dan $\{a,b,c\} \in \sigma$.

   $S_d(x,0) = \emptyset$ dengan $x \in X$ dan $\emptyset \in \sigma$.

   $S_d(a,1) \cup S_d(b,1) = \{a,b\}$ dimana $\{a,b\} \in \sigma$.

$S_d(b,1) \cup S_d(c,1) = \{b,c\}$ dan $\{b,c\} \in \sigma$.

$S_d(a,1) \cup S_d(c,1) = \{a,c\}$ dan $\{a,c\} \in \sigma$.

2. Mendefinisikan $d_1(p,q) = \mathrm{Max}\ (|a_1-b_1|, |a_2-b_2|)$
3. Mendefinisikan $d_2(p,q) = |a_1-b_1| + |a_2-b_2|$.

B. Ada 2 (dua) cara untuk mengimbas d dari X di R^1 .

1. Mendefinisikan $d(a,b) = (a,b)$ untuk $a \neq b$.
   $= 0$ untuk $a = b$.
2. Mendefinisikan $d(a,b) = |a-b|$.

Contoh .

Setiap (R,U) adalah metrizabel .

Bukti , Ambil (R,U) adalah topologi biasa dengan U = interval terbuka dan diambil $d(a,b) = (a,b)$ untuk $a \neq b$.

$= 0$ untuk $a = b$.

Maka hasil dari operasi dua anggota yang tidak sama atau sama pasti ada didalam ruang topologi (R,U) , karena hasilnya pasti interval terbuka atau $\emptyset$, dan interval terbuka atau $\emptyset \in (R,U)$.

C. Misal $X = \{a,b,c\}$.

Maka $\sigma = \{0, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$, adalah ruang topologi di X .

Terlihat bahwa σ tidak metrizabel , karena tidak ada metrik d yang bisa diimbas dari X .

D. Setiap ruang topologi indiskrit (X,σ) tidak metrizabel .

<u>Theorema 3.4.1.</u>

Ruang topologi metrizabel (X,σ) adalah terpisah .

Bukti.

Misal $a \in X$ dan $b \in X$ sedemikian hingga $a \neq b$.

d didalam X .

karena $a \neq b$, maka $r = d(a,b) > 0$,(karena d adalah metrik)

Maka $N_{r/2}(a) \cap N_{r/2}(b) \neq 0$.

Andaikan ada $x \in N_{r/2}(a) \cap N_{r/2}(b)$ maka

$r = d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b)$.

$$r = d(a,b) \leqslant d(a,x) + d(x,b)$$
$$< r/2 + r/2$$
$$r < r \text{ (tidak mungkin)}$$

Maka $N_{r/2}(a) \cap N_{r/2}(b) = \emptyset$.

3.5. Ruang vektor

Definisi 3.5.1.

Suatu ruang vektor X adalah himpunan $X \neq \emptyset$, dan terdiri dari vektor-vektor x,y,z,... yang memenuhi operasi-operasi terhadap penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan sebagai berikut :

A. Terhadap operasi penjumlahan .

$X \times X \longrightarrow X$ maka $(x,y) \longmapsto x+y$, memenuhi sifat-sifat:

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y+z) = (x+y) + z$.
3. $x + (-x) = 0$.
4. $x + 0 = x$.

B. Terhadap operasi perkalian dengan skalar .

$K \times X \longrightarrow X$ maka $(\alpha,x) \longmapsto \alpha x$, dengan $\alpha, \dots \in K$ (konstan).

1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.
2. $1 . x = x$.
3. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$.
4. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Contoh :

1. Ruang R^n adalah ruang vektor .
2. Ruang C^n adalah ruang vektor .
3. Ruang Q^n adalah ruang vektor .

Definisi 3.5.2.

Norm suatu fungsi vektor x , adalah suatu fungsi : $X \longrightarrow R$

dimana norm x nya didalam R ditentukan secara tunggal oleh setiap $x \in X$. Dan norm x dinyatakan dengan $\| x \|$, yang memenuhi axioma-axioma sebagai berikut :

1. $\| x \| \geq 0$.
2. $\| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
3. $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$.
4. $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Dimana $\alpha \in K$ (konstanta) adalah suatu skalar , dan x,y,...... adalah sebarang vektor-vektor di X.

Contoh .

Seperti pada BAB III definisi 3.1.1. , didefinisikan fungsi d atau jarak , maka jika didefinisikan dengan norm adalah

$d(x,y) = \| x - y \|$ dengan x,y X (seperti pada contoh no. 1 , BAB III definisi 3.1.1.) .