BAB II

RUANG TOPOLOGI.

2.1. Definisi ruang topologi

Jika $X \neq \emptyset$ dan $\sigma \subset 2^X$ (kumpulan dari semua himpunan bagian dari X), sedemikian hingga memenuhi axioma-axioma sebagai berikut :

1. $\emptyset \in \sigma$ dan $X \in \sigma$
2. Gabungan sebarang (berhingga atau tak berhingga) dari anggota-anggota σ adalah anggota σ lagi.
3. Setiap irisan berhingga dari anggota-anggota σ adalah anggota σ lagi.

Contoh-contoh ruang topologi.

A. Ambil $X = \{a,b,c\}$.

Maka $2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$

1. $\sigma_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$, adalah suatu topologi pada X .
2. $\sigma_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, X\}$, adalah suatu topologi pada X.
3. $\sigma_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, X\}$, adalah suatu topologi pada X.

B. Ambil sebarang $X \neq \emptyset$, maka :

4. $\sigma_4 = \{\emptyset, X\}$ disebut Indiscrete Topology (topologi terkecil) pada X dan
5. $\sigma_5 = 2^X$ disebut Discrete Topology (topologi terbesar) pada X .

C. Ambil $X = \{a,b,c\}$ maka :

6. $\sigma_6 = \{\{a\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$ bukan suatu topologi pada X (karena $\emptyset \notin \sigma_6$) dan
7. $\sigma_7 = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b\}\}$ juga bukan suatu topologi pada X (karena $X \notin \sigma$).

Gabungan dari 2 (dua) topologi belum tentu topologi. Hal ini bisa diambil contoh , misal $\sigma_8 = \sigma_2 \cup \sigma_3$ dengan σ_2 dan σ_3 adlah topologi-topologi pada X , seperti pada contoh A diatas :

$\sigma_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, X\}$ dan

$= \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, X\}$ maka

$= \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b\}, X\}$ bukan suatu topologi, karena jika diambil :

$G_1 = \{b,c\}$ dan

$G_2 = \{a,b\}$ maka

$G_1 \cap G_2 = \{b\} \notin \sigma_8$, jadi σ_8 bukan suatu topologi.

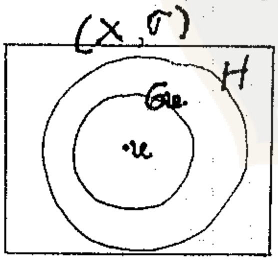
Selanjutnya jika σ topologi maka (X , σ) disebut ruang topologi. Anggota-anggota dari X disebut titik dan anggota-anggota dari σ disebut himpunan terbuka (Open set)

2.2 Himpunan tertutup dan terbuka .

Misal (X, σ) adalah ruang topologi.

Definisi 2.2.1. :

F tertutup bila dan hanya bila F adalah komplemen suatu himnan terbuka , $F = H^C$ dimana H terbuka . H dikatakan terbuka bila dan hanya bila untuk setiap $x \in H$, ada himpunan terbuka G_x sedemikian hingga $x \in G_x \subset H$.



$H \in \sigma \Longleftrightarrow \forall x \in H, \exists G_x \longrightarrow x \in G_x \subset H$

Contoh :

$X = \{a,b,c\}$

$\sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ adalah topologi pada X .

maka : $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$, X adalah himpunan terbuka di(X,σ) dan komplemennya yaitu : X , $\{b,c\}$, $\{a,c\}$, $\{c\}$, $\emptyset$ adalah himpunan tertutup di (X, σ) .

Misalkan : (X, σ) adalah ruang topologi

Definisi 2.2.2 :

F tertutup bila dan hanya bila $F = G^C$, $G \in \sigma$

F tertutup di (X, σ) maka menurut definisi 2.2.2. $F = G^C$, $G \in \sigma$

Karena $(F^C)^C = F$ maka $F^C \in \sigma$

Jadi : F tertutup $\Longrightarrow F^C \in \sigma$

F^C terbuka $\Longrightarrow$ F tertutup

Catatan : Dalam topologi diskrit , setiap himpunan didalamnya adalah sekaligus terbuka dan tertutup.

Check : $X = \{a,b,c\}$

$\sigma = 2^X = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X \}$

Maka : $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X$ adalah himpunan terbuka di (X, σ).

Komplemennya : $X, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{b\}, \{c\}, \{a\}, \emptyset$ adalah himpunan tertutup di (X , σ).

Kalau dilihat himpunan - himpunan yang terbuka dan tertutup diatas , akan menemukan anggota-anggota himpunan yang sama. Jadi terlihat bahwa himpunan-himpunan diatas adalah seka - ligus terbuka dan tertutup di (X, σ) yang merupakan topologi diskrit.

<u>Theorema 2.2.1</u>.

Misal (X, σ) adalah ruang topologi , maka

1. $\emptyset$ dan X adalah tertutup.
2. Jika $A_\alpha \subset X$ adlah tertutup maka $\bigcap_\alpha \{ A_\alpha \mid \alpha \in I$, I= sebarang himpunan indeks $\}$ adalah tertutup.
3. Jika $A_i \subset X$ tertutup (i= 1,2,3,....,n) , maka $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ juga tertutup.

Bukti :

1. $\emptyset$ dan X adalah tertutup karena masing-masing merupakan komplemen dari X dan $\emptyset$ ($X = \emptyset^C$ & $\emptyset = X^C$), sedang X dan $\emptyset$ adalah anggota - anggota topologi yang sudah diketahui merupakan himpunan terbuka .
2. Misal $A_\alpha \subset X$ adalah tertutup untuk setiap $\alpha \in I$, I= sebarang himpunan indeks , maka $\bigcap_\alpha A_\alpha$ tertutup karena A_α^C terbuka dan $\bigcup_\alpha A_\alpha^C = (\bigcap_\alpha A_\alpha)^C \in X$.

Jadi $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ tertutup (karena $(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha)^C$ terbuka).

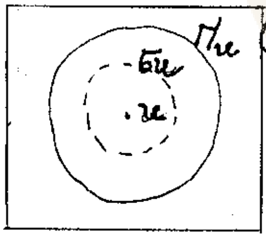
3. Selanjutnya jika A_i tertutup untuk $i = 1,2,3,\ldots,n$,maka $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ tertutup , karena $A_i^C \subset X$, $i= 1,2,3,\ldots,n$ dan berlakulah
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^C \subset X$$
, maka $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ tertutup (karena $(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i)^C$ terbuka) .

Sedangkan gabungan tak berhingga dari himpunan-himpunan tertutup adalah belum tentu tertutup. Ini bisa dilihat dari contoh :
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a- \frac{1}{n} , b + \frac{1}{n}\right] = (a,b)$$
$\left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right]$ tertutup dan (a,b) adalah terbuka.

2.3. Persekitaran dan titik limit.

Pada bagian ini akan dibahas lebih dahulu tentang persekitaran di suatu titik . Setelah kami rasakan cukup membahas masalah persekitaran disuatu titik maka kami baru akan membahas titik limit. Karena hubungan antara keduanya yaitu persekitaran dan titik limit erat sekali.

Definisi 2.3.1.



(X,σ) Misal (X,σ) suatu ruang topologi,maka suatu persekitaran N dari titik x (ditulis Nx) adalah jika ada himpunan terbuka G yang memuat x (ditulis Gx) dan termuat didalam Nx.

Untuk selanjutnya $\mathcal{N}x$ adalah koleksi himpunan terbuka.

Theorema 2.3.1.

E terbuka bila dan hanya bila E merupakan persekitaran dari setiap titik didalamnya.

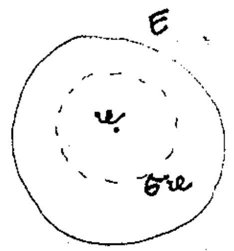
$$E \text{ terbuka} \Longleftrightarrow x \in Gx \subseteq E$$

Bukti:$(\Longrightarrow)$

Jika E terbuka maka E merupakan persekitaran dari setiap titik didalamnya.

Misal x sebarang titik didalam E , maka dapat diambil Gx = E. Oleh karena itu E sendiri merupakan persekitaran dari x.

($\Longleftarrow$)



Jika E merupakan persekitaran dari setiap titik didalamnya , maka E terbuka sebab :

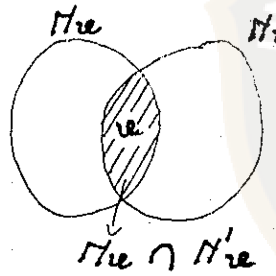
$E = \bigcup\{x \mid x \in E\} \subseteq \bigcup\{Gx \mid x \in E\} \subseteq E$

Menurut axioma 2 maka E terbuka (karena E merupakan gabunga dari berhingga Gx dan Gx sendiri terbuka).

S I F A T - S I F A T .

Dalam suatu ruang topologi (X, σ) berlaku bahwa :

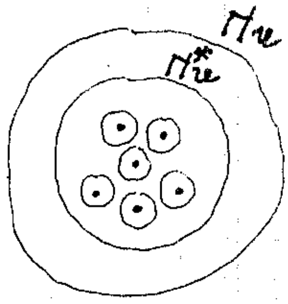
1. Setiap persekitaran x memuat x , dan setiap titik mempunyai sekurang-kurangnya satu persekitaran yaitu (X, σ) sendiri.
2. Suatu himpunan yang memuat suatu persekitaran adalah persekitaran dari x .
3. Irisan dari dua persekitaran x adalah persekitaran dari x .



$$x \in Gx \subseteq Nx$$
$$x \in Gx' \subseteq Nx'$$
$$\overline{}$$
$$x \in Gx \cap Gx' \subseteq Nx \cap Nx'$$

$Gx \cap Gx'$ adalah terbuka (karena irisan dari berhingga himpunan terbuka adalah terbuka), maka $Gx \cap Gx'$ merupakan persekitaran dari x .

4. Apabila Nx persekitaran dari x maka pasti ada himpunan terbuka $Nx^* \subseteq Nx$, sedemikian hingga Nx merupakan persekitaran dari setiap titik di Nx^*



Karena Nx persekitaran dari x , maka ada himpunan terbuka Gx yang memuat x dan termuat di Nx . Menurut theorema 2.3.1., karena Nx^* terbuka maka Nx^* merupakan persekitaran dari setiap titik didalamnya.

Untuk setiap $y \in Nx^*$ dapat dibuat Gy sedemikian hingga $y \in Gy \subset Nx^* \subset Nx$.

Jadi Nx persekitaran dari setiap titik di Nx^*

Setelah pengertian persekitaran kami anggap cukup dan sudah jelas maka , marilah kita melangkah untuk menerangkan titik - limit.

Definisi 2.3.2.

Jika A adalah himpunan bagian dari (X, σ) dimana (X, σ) adalah ruang topologi, dan jika x adalah titik didalam X , maka x dikatakan titik limit dari A , jika untuk setiap persekitaran dari x yaitu Nx berlaku : ($Nx - \{x\}) \cap A \neq 0$

Contoh.

Pikirkanlah didalam garis R = riil , dan ruang topologi biasa (R,U).

1. Jika A = $(0,1]$, maka 0 adalah titik limit dari A. Demikian juga titik $\frac{1}{2}$ (karena kalau dari titik 0 dan $\frac{1}{2}$ dibuat persekitaran sebarang, pasti akan memuat anggota lain yang bukan 0 maupun $\frac{1}{2}$). Jadi kalau diamati lebih lanjut maka setiap titik yang terletak di interval $(0,1]$ adalah titik limit dari $(0,1]$ sendiri. Tetapi tidak setiap titik dari R adalah titik limit dari A = $(0,1]$.
2. Jika $B=\{\frac{1}{n} \mid n \in Z$, Z= himpunan bilangan bulat positip$\}$, maka satu-satunya titik limit dari B adalah 0 (nol).
3. Jika Q adalah himpunan bilangan rasional , maka setiap titik dari R = riil adalah titik limit dari Q.
4. Jika Z = himpunan bilangan bulat positip , maka tidak ada titik dari R yang menjadi titik limit dari Z.
5. Jika R_+ adalah himpunan dari bilangan riil positip , maka setitik dari $\{0\} \cup R_+$ adalah titik limit dari R_+ .

2.4. Penutup dari suatu himpunan (Closure of set).

Definisi 2.4.1.

Misalkan (X, σ) adalah suatu ruang topologi, dan $A \subset X$.

Maka penutup dari himpunan A yang dinyatakan dengan $\bar{A}$ adalah irisan dari semua himpunan tertutup yang memuat A . Atau de -

ngan pernyataan lain , jika $\{F_\alpha\}$ adalah koleksi dari semua himpunan bagian yang tertutup dari X yang memuat A , maka $\overline{A} = \bigcap_\alpha F_\alpha$.

Jadi $\overline{A}$ adalah himpunan yang tertutup karena merupakan irisan dari sebarang himpunan yang tertutup. Atau dengan pernyataan lain yang merupakan akibat dari atas adlah ., $\overline{A}$ merupakan himpunan tertutup terkecil didalam (X, σ) yang memuat A .

$A \subset \overline{A} \subset F$.

Contoh : Misal ($\overset{\circ}{X}$, σ) adalah suatu ruang topologi .

1. X = $\{a,b,c,d,e\}$ maka $\sigma = \{\emptyset , \{a\} , \{c,d\} , \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\},$ dan $\{0, \{b,c,d,e\} , \{a,b,e\}, \{b,e\} , \{a\} , X\}$ adalah himpunan bagian yang tertutup dari X .

   Maka : $\overline{\{b\}} = \{b,e\}$.

   $\overline{\{a,c\}}$ = X .

   $\overline{\{b,d\}} = \{b,c,d,e\}$.

2. Misal (R, U) adalah ruang topologi biasa , dengan R= riil . Maka $\overline{Q}$ = R , dimana Q = himpunan bilangan rasional.

<u>Theorema 2.4.1.</u>

Dalam theorema ini akan diterangkan tentang kaitan antara penutup suatu himpunan dengan himpunan itu sendiri.

Misal (X, σ) adalah suatu ruang topologi , dan $A \subset X$, maka A tertutup bila dan hanya bila A = $\overline{A}$.

Bukti : ($\Longrightarrow$)

Jika A tertutup maka A = $\overline{A}$.

Karena A tertutup maka A juga bisa menjadi penutup terkecil untuk dirinya sendiri. Maka A tertutup bila A = $\overline{A}$

($\Longleftarrow$)

Sebaliknya , jika A = $\overline{A}$ maka A tertutup .

Karena sudah diketahui bahwa A = $\overline{A}$ sedangkan $\overline{A}$ adalah tertutup (lihat definisi2.4.1. , bahwa penutup himpunan harus tertutup) . Jelas bahwa bila A = $\overline{A}$ maka A tertutup .

Theorema 2.4.2.

Dalam theorema ini akan diterangkan kaitan antara penutup suatu himpunan dengan titik limitnya.

Misal (X, τ) adalah suatu ruang topologi dan $A \subset X$.

Maka penutup dari suatu himpunan A adalah gabungan dari A sendiri dengan himpunan titik limit - titik limitnya (ditulis A') $\overline{A} = A \cup A'$.

Bukti :

Pandang himpunan $A \cup A'$.

Disini terlihat bahwa himpunan $A \cup A'$ adalah himpunan tertutup (karena semua titik limitnya terletak pada himpunan itu sendiri) , dan $A \cup A'$ merupakan himpunan tertutup terkecil yang memuat A.

Definisi 2.4.2.

Misal (X, τ) adalah suatu ruang topologi, dan $A \subset X$.

$p \in X$ dikatakan titik penutup (Closure point) dari A, jika $p \in \overline{A}$. Atau sesuai dengantheorema 2.4.2.,titik $p \in X$ dikatakan titik penutupdari $A \subset X$ jika $p \in A$ atau p merupakan titik limlimit dari A ($p \in A'$) .

Ketentuan - ketentuan yang bisa dipakai sebagai pegangan uraian diatas adalah :

(i) $\overline{O} = O$

(ii) $\overline{\overline{A}} = A$

(iii) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

(iv) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$

(v) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(vi) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ dengan $A, B \subset X$.

Dari kelima ketentuan diatas yang perlu kami buktikan adalah ketentuan yang ke : (iii),(v), (vi), karena ketentuan-ketentuan yang lain kami anggap sudah jelas.

Bukti (iii).

$A \subset B \Longrightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

$\bar{A} = \bigcap_{\alpha} \{ F_\alpha \mid F_\alpha \subset A \text{ , } F_\alpha \text{ tertutup} \}$,

$\bar{B} = \bigcap_{\beta} \{ E_\beta \mid E_\beta \subset B \text{ , } E \text{ tertutup} \}$, maka

$\bar{A} \subset \bigcap_{\beta} \{ E_\beta \mid E_\beta \subset B \text{ , } E_\beta \text{ tertutup}$.

Bukti ke (v).

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

$A \subseteq A \cup B \longrightarrow \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$

$B \subseteq A \cup B \longrightarrow \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

$\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ ....(1).

Sedangkan $\bar{A}$ adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat A, demikian juga $\bar{B}$ adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat B . Maka $\bar{A} \cup \bar{B}$ adalah himpunan tertutup yang memuat A maupun B atau memuat $A \cup B$.

Padahal himpunan tertutup terkecil yang memuat $A \cup B$ adalah $\overline{A \cup B}$

Jadi $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$............(2).

Dari (1) dan (2) bisa disimpulkan bahwa

$\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.......(1).

$\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.......(2).

$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$

Bukti ke (vi).

$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

$A \cap B \subset A \longrightarrow \overline{A \cap B} \subset \bar{A}$

$A \cap B \subset B \longrightarrow \overline{A \cap B} \subset \bar{B}$

$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

Perhatian : $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, dapat dilihat pada contoh diatas.

2.5. Interior suatu himpunan

Definisi 2.5.1.

Misalkan $(X, \mathcal{T})$ adalah suatu ruang topologi dan $A \subset X$.
Maka gabungan dari semua himpunan bagian yang terbuka dari A dinyatakan dengan A° disebut interior dari A.

$A^\circ = \bigcup_{\alpha} \{ G_\alpha \mid G_\alpha \subset A \text{ , } G_\alpha \text{ terbuka} \}$.

Sifat - sifat :

(i). A° terbuka .

(ii). A° adalah himpunan bagian yang terbesar dan terbuka dari A (jika ada himpunan bagian terbuka $G \subset A$ maka berlaku $G \subset A^{\circ} \subset A$).

(iii). A terbuka bila dan hanya bila $A = A^{\circ}$.

Keterangan :

(i). $A^{\circ} = \bigcup_i G_i$ adalah himpunan terbuka , karena merupakan gabungan dari himpunan- himpunan terbuka .

(ii). Jika G adalah himpunan bagian yang terbuka dari A , maka $G \in G_i$ dan selanjutnya $G \subset \bigcup_i G_i = A^{\circ} \subset A$.

(iii). Jika A adalah himpunan terbuka maka $A \subset A^{\circ} \subset A$. Jika $A = A^{\circ}$ maka A adalah terbuka Karena A° terbuka .

Contoh .

1. Misal $(X,\mathcal{T})$ adalah ruang topologi. Ambil $\mathcal{T} = \{0, X\}$ topologi dalam X dan $A \subset X$ dengan $A \neq 0$ serta $A \neq X$. Maka $A = \emptyset$ (karena didalam $\mathcal{T}$ hanya ada himpunan bagian yang terbuka $\emptyset$ dan X , padahal $A \neq X$).
2. Misal (R,T) adalah suatu ruang topologi , dengan R = riil dan T = himpunan dari O , R , dan semua interval terbuka - yang tak berhingga $E_a = (a,\infty)$ dimana a R. Jika diambil $A = [6,\infty)$ maka $A = (6,\infty)$ (karena A merupakan himpunan bagian yang terbesar dan terbuka dari A).

Theorema 2.5.1.

Misal $(X,\mathcal{T})$ adalah suatu ruang topologi dan $A \subset X$.

Maka :

(i). $A^{\circ} \subseteq A$.

(ii). $\emptyset^{\circ} = \emptyset$.

(iii). $(A^{\circ})^{\circ} = A^{\circ}$.

(iv). $A \subset B \longrightarrow A^\circ \subset B^\circ$.

(v). $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$.

(vi). $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

Bukti .

Karena (i) , (ii) , (iii) sudah jelas maka akan dibuktikan yg ke (iv) , (v) , (vi) .

ke (iv) :

$A \subset B \longrightarrow A^\circ \subset B^\circ$.

$A^\circ = \bigcup_\alpha \{F_\alpha \mid F_\alpha \subset A$, F terbuka$\}$.

$B^\circ = \bigcup_\beta \{E_\beta \mid E_\beta \subset B$, E terbuka$\}$.

Karena $A \subset B$ maka ,

$A^\circ \subset \bigcup_\alpha \{F_\alpha \mid F_\alpha \subset B$, F terbuka$\}$.

jadi $A^\circ \subset B^\circ$.

ke (v) :

$(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$.

menurut (iv) maka

$A \cup B \supset A \longrightarrow (A \cup B)^\circ \supset A^\circ$.

$A \cup B \supset B \longrightarrow (A \cup B)^\circ \supset B^\circ$.

$(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$.

Perhatian : $(A \cup B)^\circ \neq (A^\circ \cup B^\circ)$. Ini dapat dilihat dari contoh sebagai berikut :

$A = 0 \leq x \leq 1$ maka $A^\circ = 0 < x < 1$.

$B = 1 < x \leq 2$ maka $B^\circ = 1 < x < 2$.

$A \cup B = 0 \leq x \leq 2 \longrightarrow (A \cup B)^\circ = 0 < x < 2$.

$A^\circ \cup B^\circ = 0 < x < 1 \cup 1 < x < 2$.

Terlihat bahwa $A^\circ \cup B^\circ \neq (A \cup B)^\circ$.

ke (vi) :

$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

Menurut (iv) maka

$A \cap B \subseteq A \longrightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$

$A \cap B \subseteq B \longrightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$.

$$(A \cap B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \cap B \ .$$

Padahal kita tahu bahwa himpunan bagian yang terbuka dan terbesar didalam $(A \cap B)$ adalah $(A \cap B)^{\circ}$.

Maka himpunan bagian lain yang terbuka tentu saja didalam atau sama dengan $(A \cap B)^{\circ}$. Jadi :

$$A^{\circ} \cap B^{\circ} \subseteq (A^{\circ} \cap B^{\circ}) \ , \text{ dan}$$
$$(A \cap B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \cap B^{\circ} \ , \text{ maka}$$
$$(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ} .$$

Definisi 2.5.2.

Misal (X, σ) adalah suatu ruang topologi dan $A \subset X$.

$p \in A$ dikatakan titik interior dari A apabila adahimpunan terbuka G didalam A sedemikian hingga $a \in G \subset A$.

Himpunan titik - titik interior dari suatu himpunan A disebut interior himpunan A .

Contoh .

1. Pada ruangtopologi (R,U) dimana R=riil dan U = topologi biasa .

   Diketahui himpunan yang dilukiskan sebagai berikut :

   $A = \{1\} \cup \{x \mid 2 < x < 3\} \cup \{x \mid 3 < x \leq 4\}$.

   Maka titik interior dari himpunan A adalah titik x dimana $2 < x < 3$ dan $3 < x < 4$.

2. Misal $X = \{a,b,c,d,e\}$.

   Dan $\sigma = \{\emptyset , \{a\} , \{a,b\} , \{a,c,d\} , \{a,b,c,d\} , \{a,b,e\} , X\}$, adalah topologi di X , dan $A = \{a,b,c\}$ di X

   Maka titik interior A adalah a dan b , karena $a,b \in \{a,b\} \subset A$.

2.6. Titik exterior dan titik boundary

Definisi 2.6.1.

Misal (X, σ)adalah suatu ruang topologi dan $A \subset X$.

Exterior dari A yang dinyatakan dengan ext (A) , adalah interior dari komplemen A $(\text{int } (A^C))$.

Definisi 2.6.2.

Boundary dari A yang dinyatakan dengan $b(A)$ adalah himpunan titik -titik yang tidak termasuk titik interior maupun titik exterior.

Sekarang akan dibicarakan suatu theorema yang menerangkan pentingnya hubungan antara interior,boundary, dan penutup dari suatu himpunan.

Theorema 2.6.1.

Misal (X,σ) adalah suatu ruang topologi dan $A \subset X$.

Maka penutup sebuah himpunan dari A adalah gabungan dari interior dan boundary dari A . $\overline{A} = A \cup b(A)$.

Bukti.

$X = A^{\circ} \cup b(A) \cup ext(A)$.

$(A^{\circ} \cup b(A)^{C} = ext(A)$).

Misal $p \in ext(A)$, maka terdapat himpunan terbuka G sedemikian hingga $p \in G \subset A^{C}$. atau $G \cap A = \emptyset$.

Maka $p \notin A'$ dan $p \notin A' \cup A = \overline{A}$, dengan kata lain $ext(A) \subset \overline{(A)}^{C}$:

Ambil $p \in \overline{(A)}^{C} = (A \cup A')^{C}$, maka $p \notin A'$, dan terdapatlah G himpunan terbuka sedemikian hingga $p \in G$ dan $(G - \{p\}) \cap A = \emptyset$.

Tetapi juga $p \notin A$, jadi $G \cap A = \emptyset$ dan $p \in G \subset A^{C}$. Maka $p \in ext(A)$ dan terlihat $\overline{(A)}^{C} = ext\ (A)$.

$\overline{(A)}^{C} = (A^{\circ} \cup b(A))^{C} \longrightarrow \overline{A} = A^{\circ} \cup b(A)$.

Contoh.

1. Misal (R,U) adalah suatu ruang topologi dengan R=riil dan U=topologi biasa .

   Perhatikan empat interval dibawah ini

   $[a,b]$, (a,b) , $[a,b)$, $(a,b]$, dimana $a,b \in R$ dan $a<b$.

   Maka interior masing-masing interval diatas adalah interval terbuka (a,b),dan boundary dari masing-masing diatas adalah $\{a,b\}$. Padahal kalau kita gabungkan antara interior dan boundary dari masing-masing interval diatas akan terdapat $[a,b]$. Dan kita tahu bahwa $[a,b]$ adalah penutup suatu himpunan dari keempat interval diatas.

2. Misalkan $X = \{a,b,c,d,e\}$.

$= \{\emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}, X\}$.

Dan $A \subset X$, dengan $A = \{b,c,d\}$

Maka titik-titik c dan d adalah titik interior dari A, karena $c,d \in \{c,d\} \subset A$. $\{c,d\}$ himpunan terbuka(karena $\in \sigma$) sedangkan b bukan titik interior dari A karena tidak ada himpunan terbuka yang memuat b dan termuat didalam A.

Selanjutnya hanya titik a sajalah yang menjadi exterior dari A (karena $A^C = \{a,e\}$, sedangkan exterior adalah interior (A^C)), dan $a \in \{a\} \subset A^C$.

Jadi boundary dari A adalah selain titik-titik diatas yaitu titik b dan c .

3. Misalkan (R,U) adalah suatu ruang topologi biasa.

Q = himpunan bilangan rasional ($\frac{a}{b}$, b = 0).

Setiap himpunan bagian yang terbuka dari R , memuat himpunan titik-titik rasional dan himpunan titik-titik yang tidak rasional . Dimana kedua himpunan itu bukan merupakan himpunnan titik interior maupun himpunan titik exteriordari Q , (karena tidak mungkin himpunan bagian dari R ada didalam Q.

Jadi int(Q) = 0 dan

ext(Q) = 0 maka

b(Q) = R .

<u>2.7. Himpunan yang rapat (dense) dengan himpunan lain .</u>

Definisi 2.7.1.

Misal (X,σ) adalah ruang topologi , dan $A \subset X$, $B \subset X$.

Himpunan A dikatakan rapat dalam himpunan B , apabila B termuat didalam $\bar{A}$. Jadi kalau seperti diatas $A \subset X$, dikatakan rapat apabila $\bar{A} = X$ (demikian pula dengan B).

Contoh .

1. Perhatikan pada contoh no : 1 , pada 2.4. dimana :

$\overline{\{a,c\}} = X$ dan

$\overline{\{b,d\}} = \{b,c,d,e\}$.

Bisa dilihat disini bahwa himpunan $\{a,c\}$ adalah rapat di X Tetapi himpunan $\{b,d\}$ bukan merupakan himpunan bagian yang rapat di X . Tetapi himpunan $\{b,d\}$ rapat dalam $\{b,c,d,e\}$.

2. Perhatikan pula pada contoh no: 2 pada 2.4. juga , dimana $\overline{Q} = R$. Maka Q adalah himpunan yang rapat di R.

Definisi 2.7.2.

Misal $(X,\mathcal{T})$ adalah suatu ruang topologi , dan $A \subset X$.

Maka A dikatakan rapat dimana-mana di X apabila interior dari penutup himpunan A adalah kosong.

$$\text{int}\overline{(A)} = \emptyset$$

Contoh .

1. Misal (R,U) adalah suatu ruang topologibiasa dan $A \subset R$.

   $A = \{1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \ldots\ldots\}$

   Maka A mempunyai satu titik limit yaitu 0.

   Menurut theorema 2.4.2 yaitu $\overline{A} = A \cup A'$, dengan A' adalah himpunan titik limit dari A .

   Jadi $\overline{A} = \{0 , 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \ldots\ldots\ldots\}$.

   Terlihat bahwa $\overline{A}$ tidak mempunyai titik interior, maka A rapat dimana - mana di R .

2. Misal (R,U) adalah suatu ruang topologi biasa dan $A \subset R$.

   Diberikan $A = \{x \mid 0 < x < 1$, x = himpunan bilangan rasional$\}$.

   Terlihat bahwa interior dari A adalah $\emptyset$, tetapi A tidak rapat dimana-mana di R , karena $\overline{A} = [0,1]$. Dan $\text{int}(\overline{A})$ = int ($[0,1]$) adalah $(0,1) \neq 0$.

2.8. Fungsi kontinyu (Continous function).

Definisi 2.8.1.

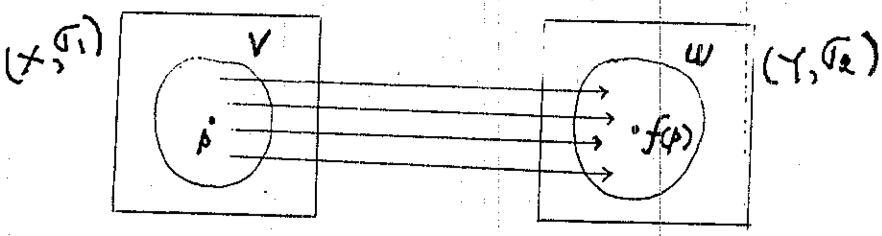
Misal : $(X,\mathcal{T}_1)$ dan $(Y,\mathcal{T}_2)$ adalah dua ruang topologi.

$f : X \longrightarrow Y$ suatu fungsi.

Fungsi f dikatakan kontinyu dititik $p \in X$, bila dan hanya bila untuk setiap himpunan W di Y yang memuat f(p) , terdapat himpunan terbuka V di X yang memuat p sedemikian hingga $f(V) \subset W$

Jadi : $f : X \rightarrow Y$ kontinyu di $p \in X \Longleftrightarrow \forall W \in \sigma_2$, $f(p) \subset W$,

$\exists V \in \sigma_1$ sehingga $p \in V$ dan $f(V) \subset W$.



Fungsi $f : X \longrightarrow Y$ kontinyu di X , bila f kontinyu disetiap titik di X .

Contoh .

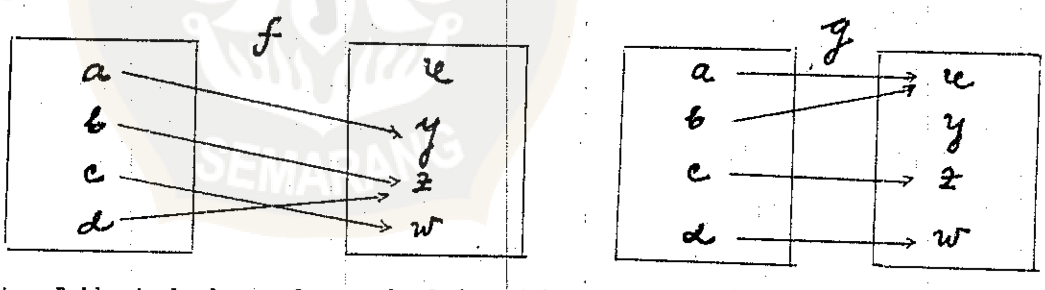
1. Misal $X = \{a,b,c,d\}$ dan

$Y = \{x,y,z,w\}$.

$\sigma_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, X\}$ topologi di X.

$\sigma_2 = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{y,z,w\}, Y\}$ topologi di Y .

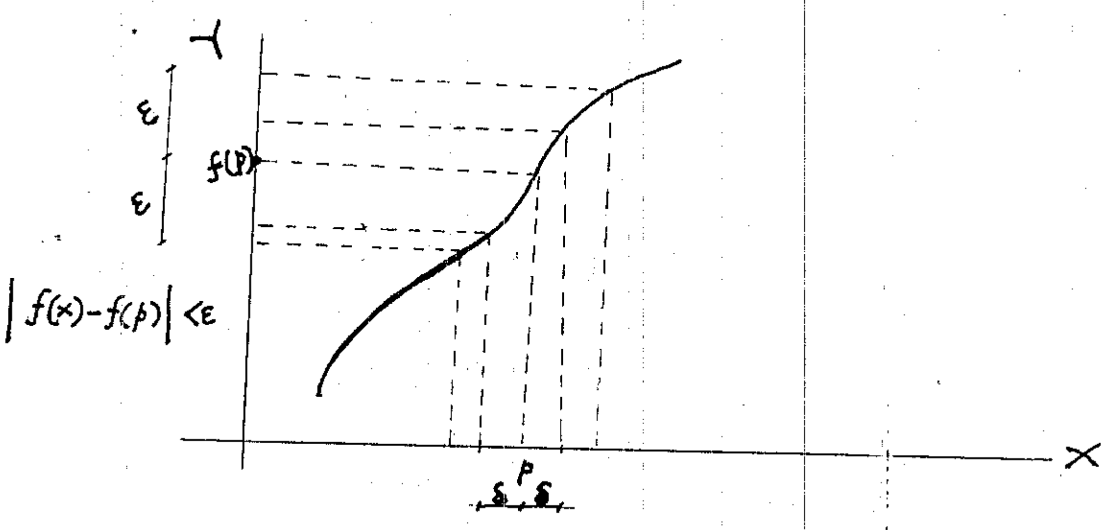
Andaikan fungsi $f : X \longrightarrow Y$ dan $g : X \longrightarrow Y$ didefinisikan dengan diagram dibawah ini :



Maka terlihat bahwa fungsi f kontinyu , karena sudah memenuhi definisi diatas , yaitu jika diambil $W = \{y,z,w\}$ dan $p = \{a,b\}$ dimana $f(p) \subset W$, terdapatlah $V = \{a,b,c\} \in \sigma_1$ sehingga $p \subset V$ dan $f(V) = \{y,z,w\} \subset W$.

Tetapi fungsi g tidak kontinyu . Ini bisa ditunjukkan dengan jalan seperti diatas .

Definisi diatas adalah untuk menerangkan fungsi kontinyu secara umum . Dan dibawah ini akan sedikit disinggung tentang fungsi kontinyu di R^1 .



f kontinyu di $p \in A \iff \forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0 \longrightarrow |x-p| < \delta$ $\Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$

Terlihat diatas bahwa diambil $W = \{ f(x) : |f(x) - f(p)| < \varepsilon \}$

$V = \{ x : |x - p| < \delta \}$

Theorema 2.8.1.

Jika $(X, \mathcal{T}_1)$ dan $(Y, \mathcal{T}_2)$ adalah dua ruang topologi dan $f : X \longrightarrow Y$ suatu fungsi , maka f kontinyu pada X bila dan hanya bila $f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_1$ untuk setiap $W \in \mathcal{T}_2$.

Bukti : ($\Longrightarrow$)

Misalkan $f : X \longrightarrow Y$ kontinyu pada X dan $W \in \mathcal{T}_2$ akan ditunjukkan $f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_1$.

Ambil sebarang titik $p \in f^{-1}(W)$, maka $f(p) \in W$, karena f kontinyu di p maka ada $V_p \in \mathcal{T}_1$, $p \in V_p$ sedemikian hingga $f(V_p) \subset W$. Maka dari itu $V_p \subset f^{-1}(f(V_p)) \subset f^{-1}(W)$.

Padahal $V = \bigcup \{ V_p : p \in f^{-1}(W) \}$.

Jelas bahwa V terbuka atau $V \in \mathcal{T}_1$, dan dapat dilihat bahwa $V = f^{-1}(W)$.

Jadi $f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_1$.

($\Longleftarrow$)

Misalkan $f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_1$ untuk setiap $W \in \mathcal{T}_2$.

Akan diperlihatkan bahwa f kontinyu disetiap titik $p \in X$.

Ambil $W \in \mathcal{T}_2$ sehingga $f(p) \in W$ atau $p \in f^{-1}(W)$. Berarti $f^{-1}(W)$ terbuka di X memuat p dan bersifat $f(f^{-1}(W)) \in W$

Jadi untuk setiap $W \in \mathcal{T}_2$, $f(p) \in W$ ada $V = f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_1$

sehingga $p \in V$ dan $f(V) \subset W$. Maka terlihat f kontinyu disetiap titik $p \in X$.

Contoh .

1. Misal (X,σ) adalah topologi diskrit .
(Y,σ^*) sebarang topologi .

Maka : setiap $f : X \longrightarrow Y$ adalah kontinyu , sebab jika H himpunan bagian terbuka sebarang di Y maka inversnya yaitu $f^{-1}[H]$ haruslah himpunan bagian terbuka di X. Padahal setiap himpunan bagian terbuka di X , akan termuat semuanya di (X,σ) , karena (X,σ) topologi diskrit.

2. Misal (R,U) adalah ruang topologi biasa.

Maka : fungsi $f : R \longrightarrow R$ dimana $f(x) = k$ (konstanta) $x \in R$, adalah kontinyu di R . Hal diatas bisa dilihat dari jika G terbuka di R , maka :
$f^{-1}(G) = \emptyset$ untuk $k \notin G$.
$f^{-1}(G) = R$ untuk $k \in G$.

<u>Theorema 2.8.2.</u>

Misal (X,σ_1) dan (Y,σ_2) adalah dua ruang topologi .
Jika $f : (X,\sigma_1) \longrightarrow (Y,\sigma_2)$ adalah fungsi , maka pernyataan - pernyataan dibawah ini adalah ekivalen .

1. $f^{-1}(C)$ adalah tertutup di X , jika C tertutup di Y .
2. $f^{-1}(U) \in \sigma_1$ untuk setiap $U \in \sigma_2$.
3. f kontinyu .
4. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ untuk setiap $A \subset X$.

<u>Bukti</u> .

Akan kami buktikan implikasi sebagai berikut.
$(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (4) \Longrightarrow (1)$.

$(1) \Longrightarrow (2)$.

Misal $U \subset \sigma_2$.
Maka $(Y - U)$ adalah tertutup, maka $f^{-1}(Y - U)$ juga tertutup .
$f^{-1}(Y - U) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(U) = X - f^{-1}(U)$.
Jadi $f^{-1}(U) \in \sigma_1$.

$(2) \Longrightarrow (3)$.

Misal $x \in X$ dan $f(x) \in U \in \mathcal{T}_2$.

Maka $x \in f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ dan $f(f^{-1}(x)) \subset U$.

Jadi f adalah kontinyu di x dengan x sebarang titik di X.

$(3) \Longrightarrow (4)$.

Misal $A \subset X$.

Jika $y \in f(\overline{A})$ dan $y \in U \in \mathcal{T}_2$, maka $y = f(x)$ untuk $x \in \overline{A}$.

Karena f kontinyu maka $\exists V_1 \in \mathcal{T}_1$ sedemikian hingga $x \in V$ dan $f(V) \subset U$.

Ambil $p \in V \cap A$ maka $f(p) \in f(V) \cap f(A) \subset U \cap f(A)$.

Jadi $y \in f(\overline{A})$ dan $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

$(4) \Longrightarrow (1)$.

Misal C adalah himpunan bagian terbuka dari Y . Maka $f(\overline{f^{-1}(C)}) \subset \overline{f(f^{-1}(C))} \subset \overline{C} = C$.

Karena $\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C)$ maka $f^{-1}(C)$ tertutup.

2.9. Batas atas terkecil dan batas bawah terbesar .

(Suprimum dan Infimum)

Definisi 2.9.1.

Misal (R,U) suatu ruang topologi biasa.

Titik $p \in R$ dinamakan batas atas terkecil dari A atau p = suprimum A , dengan notasi p = sup A ,jika memenuhi ketentuan sebagai berikut :

1. p merupakan batas atas A.
2. Jika q merupakan batas atas lain dari A maka berlaku $p \leq q$.

Contoh.

Misal (R,U) suatu ruang topologi biasa .

$A = \{x \mid x < 0\}$, maka 0 merupakan batas atas terkecil dari A atau 0 = sup A . Sedang bilangan lain yang lebih besar 0 juga merupakan batas atas lain dari A.

Definisi 2.9.2

Misal (R,U) adalah topologi biasa .

Titik $r \in R$ dinamakan batas bawah terbesar dari A atau r = infimum A , dengan notasi r = inf A , jika memenuhi :

1. r batas bawah dari A .
2. Jika s batas bawah lain dari A, maka berlaku $r \geqslant s$.

Contoh .

Misal (R,U) suatu ruang topologi biasa dan $A = \{x \mid 3 < x \leqslant 4\}$.

Maka 3 merupakan batas bawah terbesar dari A atau 3 infimum dari A . Sedangkan bilangan yang lain yang lebih kecil dari 3 juga merupakan batas bawah dari A .

Theorema 2.9.1.

Batas atas terkecil dari suatu himpunan adalah tunggal , jika batas atas suatu himpunan itu ada . Demikian juga batas bawah terbesar dari suatu himpunan adalah tunggal , jika batas bawah itu ada .

Bukti .

Misalkan p_1 = sup A , dan p_2 = sup A juga.

Pandanglah p_1 sebagai batas atas terkecil dari A dan p_2 sebagai batas atas yang lain dari A . Maka menurut definisi 2.9.1. berlaku $p_1 \leqslant p_2$.

Dengan jalan yang sama , dengan mengganti p_2 sebagai batas atas terkecil dari A dan memandang p_2 batas atas yang lain dari A, maka menurut definisi 2.9.1. juga berlaku $p_2 \leqslant p_1$.

Jadi dari kedua uraian diatas bisa ditulis sebagai berikut :

$$p_1 \leqslant p_2$$

$$p_2 \leqslant p_1$$

maka $p_1 = p_2$.

Terbukti bahwa batas atas terkecil dari suatu himpunan adalah tunggal , jika batas atas suatu himpunan itu ada .

Untuk membuktikan yang selanjutnya yaitu batas bawah terbesar dari suatu himpunan itu tunggal , jika batas bawah itu ada , tidak sulit dengan memakai jalan yang sama seperti diatas .

<u>Theorema 2.9.2.</u>

Misal (R,U) adalah suatu ruang topologi biasa .

Serta $A \subsetneq R$.

Setiap himpunan bagian yang tidak kosong dari A dan terbatas kebawah mempunyai batas bawah terbesar.

Bukti .

$A \subsetneq R$ dan $A \neq \emptyset$.

A terbatas kebawah maka ada $b \in R$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in A$ berlaku $x \geqslant b$.

Definisikan $B = \{-x \,;\, x \in A\}$.

Maka $B \neq \emptyset$.

Dari $x \geqslant b$ bila $x \in A$ diperolah $-x \leqslant -b$. Ini berarti $-b$ merupakan batas atas B . Karena B terbatas keatas maka pasti ada batas atas terkecil dari B .

Definisikan $-p = \sup B$, maka $-x \leqslant -p$ bila $x \in A$ dan bila ada $-q$ batas atas lain dari B , maka berlaku $-q \geqslant -p$.

Ini berarti $x \geqslant p$ dan q batas bawah A dan $q \leqslant p$.

Terbuktilah bahwa p adalah batas bawah terbesar dari A , atau $p = \inf A$.

Adapun theorema yang menerangkan hubungan antara batas atas terkecil atau suprimum dengan batas bawah terbesar atau infimum adalah sebagai berikut :

<u>Theorema 2.9.3.</u>

Misal (R,U) adalah suatu ruang topologi biasa .

$A \subsetneq R$, maka $\inf A = -\sup(-A)$.

Bukti.

Misalkan $a = \inf A$, maka berlaku :

(i). $x \geqslant a$, bila $x \in A$.

(ii). Bila b batas bawah A maka berlaku $a > b$.

Dari (i) : $-x \leqslant -a$, jadi $-a$ batas atas dari $-A$.

Dari (ii): $-b$ batas bawah A maka berlaku $-b \geqslant -a$.

Jadi $-a = \sup(-A)$, atau $a = -\sup(-A)$.

Padahal $a = \inf A$.

Maka terbukti $a = \inf A = -\sup(-A)$.