Bab II. LANDASAN THEORY.

II.1. PENGANTAR.

Didalam praktek shari-hari, sering kali untuk mendapatkan maksimum atau minimum suatu fungsi dari beberapa perubah, yang tidak bebas, tetapi terikat pada syarat - syarat tertentu, misalnya syarat harus memenuhi suatu - fungsi tertentu.

- Kalau akan membuat kotak dengan panjang p, lebar l tinggi t dan luas a, sehingga volume kotak maksimum, maka harus dicari maksimumnya fungsi

  $V = p.l.t.$

  dengan syarat $a = 2pl + 2pt + 2lt$.

- Contoh dalam ekonomi, misalnya memaksimumkan labar sambil terikat pada fungsi produksi, ataupun memaksimumkan utilitas (kepuasan) dengan tidak melampaui anggaran. Syarat yang harus dipenuhi itu dapat berupa lebih dari satu kesamaan ataupun ketidaksamaan.

Suatu cara yang lazim dalam menghitung ekstrim suatu fungsi yang bersyarat dari suatu persamaan ialah cara Lagrange. Misal akan dicari ekstrim-ekstrim fungsi dengan harus memenuhi syarat, maka syarat tersebut dikalikan dengan suatu pengganda λ yang ditambahkan dengan fungsi tersebut untuk menjadi fungsi LAGRANGE.

Dengan menga-nggap λ sebagai perubah, maka ekstrim bebas fungsi ini dapat dicari.

II. 2. MAKSIMAL dan MINIMAL.

1. SYARAT PERLU dan CUKUP UNTUK MEMAKSIMALKAN atau MEMI - NIMALKAN PADA SATU VARIABEL.

Jika fungsi $f(x)$ dapat diturunkan (dideferensialkan) dalam selang $a \leq x \leq b$, maka syarat perlu untuk menda patkan harga ekstrim pada suatu titik $x = c$ (dimana $a \leq c \leq b$), adalah $f'(c) = 0$.
Apabila fungsi $f(x)$ dapat dideferensialkan dua kali dalam selang $a \leq x \leq b$, maka <u>syarat cukup</u> untuk men - dapatkan suatu harga ekstrim pada titik $x = c$ ada- lah $f'(c) = 0$ dan $f''(x) \neq 0$ disekitar $x = c$.
Apabila $f''(c) < 0$ didapat harga maksimal sedang apabi- la $f''(c) > 0$ didapat harga minimal.
Dengan menggunakan deret Taylor, apabila fungsi $f(x)$ dalam selang $a \leq x \leq b$, dapat dideferensialkan cukup banyak dan seandainya untuk $x = c$ berlaku hubungan :

$$f'(c) = 0,\ f''(c) = 0, \ldots\ldots\ldots f^{(n-1)}(c) = 0 \qquad \ldots.(1)$$

akan tetapi $f^{(n)}(c) \neq 0$.

Selanjutnya dimisalkan $f^{(n)}(x)$ kontinyu disekitar ti- tik $x = c$, maka $f(x)$ dapat diuraikan menjadi deret- Taylor disekitar $x = c$.

$$f(c+h) = f(c) + \frac{h^{(n)}}{n!} f^{(n)}(c + \theta h) \qquad \ldots\ldots\ldots.(2).$$

dimana $0 < \theta < 1$, sehingga :

$$f(c+h) - f(c) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c+\theta h) \qquad \ldots\ldots\ldots.(3).$$

Sehubungan dengan kekontinyuitasan $f^{(n)}(x)$, dapat ditentukan suatu interval disekitar $x = c$, sehingga dalam interval tersebut, tanda $f^{(n)}(c+\theta h)$ sama dengan tanda $f^{(n)}(c)$. Bila n ganjil , maka tanda $f(c+h) - f(c)$ berubah. Bila h berubah sehubungan dengan (3). Dalam hal ini f(c) tidak mempunyai harga ekstrim.

Bila n genap dan tanda $f(c+h)$ sama dengan tanda $f^{(n)}(c)$ disebelah kiri atau disebelah kanannya titik $x = c$, maka dalam hal ini f(c) me mpunyai harga ekstrim, yaitu harga maksimal bila $f^{(n)}(c) < 0$ dan harga minimal bila $f^{(n)}(c) > 0$.

Maka dapat disimpulkan bahwa :

Bila fungsi f(x) dalam interval $a \leq x \leq b$ dapat dideferensialkan n kali dan pada titik $x = c$ memenuhi ;

$$f'(c) = f''(c) = \ldots\ldots = f^{(n-1)}(c) = 0 \text{ dan } f^{(n)}(x) \neq 0.$$

disekitar $x = c$, maka f(c) mempunyai harga ekstrim bila dan hanya bila n genap.

-Bila $f^{(n)}(c) < 0$ maka f(c) mempunyai harga maksimal.

-Bila $f^{(n)}(c) > 0$ maka f(c) mempunyai harga minimal.

III.3. HARGA-HARGA EKSTRIM DENGAN SUATU SYARAT TAMBAHAN.

Bila harus menghitung harga-harga ekstrim untuk suatu fungsi $z = f(x,y)$ dari suatu variabel-variabel x dan y sedang antara x dan y masih terdapat hubungan ;

$$(x,y) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Hubungan tersebut dinamakan syarat tambahan, maka jelas bahwa z menjadi suatu fungsi dari suatu variabel (umpama x) dikarenakan (5).

Jika dari (5) dapat dikatakan y dalam x atau x dalam y, sehingga harga-harga ekstrim dapat dicari dengan jalan yang telah diuraikan.

Akan tetapi sering kali tidak mungkin untuk mengatakan z sebagai suatu fungsi dari satu variabel atau jika mungkin akan didapatkan suatu fungsi z yang berbentuk sangat sukar. Sehingga untuk mendapatkan harga-harga ekstrim tersebut sebagai berikut ;

dari $z = f(x,y)$ didapat $dz = \frac{\delta f}{\delta x}\, dx + \frac{\delta f}{\delta y}\, dy \qquad \ldots(6)$

jadi :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y}\frac{dy}{dx} \ldots\ldots\ldots(7)$$

Syarat perlu untuk mendapatkan suatu harga ekstrim ialah $\frac{dz}{dx} = 0$, sehingga ;

$$\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

Dari (16) didapatkan : $\frac{\delta Q}{\delta x} + \frac{\delta Q}{\delta y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (9)$

Dari kedua persamaan - persamaan tersebut dapat menghitung x dan y yang mungkin memberikan harga-harga ekstrimnya fungsi.

Yang paling mudah ialah dengan jalan menghilangkan $\frac{dy}{dx}$

Persamaan (8) dan (9) hanya akan mempunyai suatu penyelesaian

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} & \frac{\delta f}{\delta y} \\ \frac{\delta Q}{\delta x} & \frac{\delta Q}{\delta y} \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

Maka koordinat-koordinat titik-titik ekstrim terdapat dari (10) dan $Q(x,y) = 0$

Untuk memeriksa lebih lanjut titik^2 tersebut, harus menentukan tandanya $\frac{d^2z}{dx^2}$ pada titik-titik tersebut.

Jelas bahwa ;

$$\frac{d^2z}{dx^2} \equiv \frac{\delta}{x}\left[\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y}\frac{dy}{dx}\right] + \frac{\delta}{\delta y}\left[\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y}\frac{dy}{dx}\right]\frac{dy}{dx} \qquad (11)$$

atau

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + 2\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}\frac{dy}{dx} + \frac{\delta f}{\delta y}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \qquad \ldots.(12)$$

$\frac{dy}{dx}$ didapat dari (8) atau (9) sedangkan $\frac{d^2y}{dx^2}$ didapat dengan mendeferensialkan lagi (9).

II.4. MULTIPLIKATOR-MULTIPLIKATOR LAGRANGE.

Sering digunakan multiplikator-multiplikator Lagrange untuk mendapatkan harga-harga ekstrim (x,y). Pada bab harga ekstrim dengan suatu syarat tambahan, f(x,y) adalah fungsi yang harus dicari harga-harga ekstrimya dengan syarat tambahan ;

$$Q(x,y) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(13)$$

Sekarang dipandang fungsi ;

$$U = f(x,y) + \lambda Q(x,y)$$

Dengan λ suatu fungsi sembarang dari x , jelas bahwa fungsi tersebut mempunyai harga-harga ekstrim yang sama dengan harga-harga ekstrim fungsi f(x,y) .

Untuk suatu ekstrim harus :

$$\frac{dU}{dx} = 0 = \frac{\delta f}{\delta x} + \lambda \frac{\delta Q}{\delta x} + \lambda' Q(x,y) + \left\{ \frac{\delta f}{\delta y} + \lambda \frac{\delta Q}{\delta y} \right\} \frac{dy}{x} \quad ..(14)$$

Untuk titik ekstrim haruslah Q(x,y) =0

maka; $$\left(\frac{\delta f}{\delta x} + \lambda \frac{\delta Q}{\delta x} \right) + \left(\frac{\delta f}{\delta y} + \lambda \frac{\delta Q}{\delta y} \right) \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \ldots\ldots(15)$$

Sekarang ditentukan sehingga koefisien $\frac{dy}{dx}$ menjadi sama dengan NOL. Maka persamaan (15) menjadi ;

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x} + \lambda \frac{\delta Q}{\delta x} &= 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(16) \\ \frac{\delta f}{\delta y} + \lambda \frac{\delta Q}{\delta y} &= 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(17) \end{aligned}\right\}$$

Dengan persmaan-persamaan (13) dan (16) dapat dicari - λ, x dan y .

Sudah diketahui pendapat diatas merupakan salah satu hal yang benar dan sangat umum. Oleh karena itu alasan bahwa untuk mengetahui kondisi optimal dari harga x - dan y , diekspansikan f dalam deret Taylor, didapat ;

$$f(x+\delta x,\ y+\delta y) - f(x,y) = \frac{\delta f}{\delta x}\, x + \frac{\delta f}{\delta y}\, y + O(\max|\delta x|,|\delta y|) \geq 0$$

$$\ldots\ldots(18)$$

Sekarang apabila tidak dapat memilih harga δx dan δy dengan jalan yang lain dihadapkan untuk memilih salah satu dengan melihat constraint (pembatas) dari Q(x,y) = 0 yang harganya konstan dibandingkan dengan yang lain. Dengan ini boleh memilih secara bebas salah satu variasi dari δx atau δy tetapi tidak boleh keduanya. Berdasarkan variasi dari x dan y dapat dibenarkan pembatasnya.

Maka dengan menggunakan ekspansi deret Taylor didapat ;

$$g(x+\delta x,\ y+\delta y) - g(x,y) = \frac{\delta g}{\delta x}\, x + \frac{\delta g}{\delta y}\, y + O(\max|\delta x|, |\delta y|) \geqslant 0 \qquad \ldots\ldots(19)$$

Apabila persmaan (19) ini dikalikan dengan harga konstanta λ (Lagrange Multiplier) dan ditambahkan dengan persamaan (28) didapat ;

$$\left(\frac{\delta f}{\delta x} + \lambda \frac{\delta Q}{\delta x}\right)\delta x + \left(\frac{\delta f}{\delta y} + \lambda \frac{\delta Q}{\delta y}\right)\delta y + O(\max|\delta x|, |\delta y|) \geqslant 0 \quad \ldots(20)$$

Sekarang secara bebas dipilih harga yang akan berlaku bila didefinisikan sebagai λ, oelh karena harganya tervariasi, sehingga tidak secara bebas bisa menyelesaikan masalah itu. Jadi dengan memilih harga λ pada harga x dan y didapat ;

$$\frac{\delta f}{\delta y} + \lambda \frac{\delta Q}{\delta x} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

dengan persamaan (17) didapat persamaan :

$$\left(\frac{\delta f}{\delta x} + \lambda \frac{\delta Q}{\delta x}\right)\delta x + O(\max|\delta x|, |\delta y|) \geqslant 0 \qquad \ldots\ldots(22)$$

dan dengan beberapa pilihan variasi secara khusus didapat persamaan :

$$x = -\varepsilon\left(\frac{\delta f}{\delta x} + \lambda \frac{\delta Q}{\delta x}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots(23)$$

Seperti halnya dengan masalah peng-optimasian untuk - harga minimal f dapat dinyatakan dengan persamaan :

$$\left(\frac{\delta f}{\delta x} + \lambda \frac{\delta Q}{\delta x} \right) = 0 \qquad \text{......(24)}$$

Seperti halnya (17), persamaan (23), (13) dan (24) - adalah tiga persamaan untuk mendapatkan tiga bilangan yang tidak diketahui yaitu x, y, λ .

Perlu dicatat bahwaa ikutnya pembatas dalam persoalan diatas dapat dianjurkan untuk penambahan variabel faktor pengali λ dan beberapa persmaan tambahan. Hal ini cukup dibenarkan untuk persamaan Lagrange sebagai berikut :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda Q(x,y) \qquad \text{......(25)}$$

Persamaan (21) dan (24) dapat dituliskan persamaan :

$$\frac{\delta L}{\delta x} = \frac{\delta L}{\delta y} = 0$$

Selama Q(x,y) bisa disederhanakan didapat :

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0 \qquad \text{.........(26)}$$

Maka bisa disusun kembali pada kondisi yang benar dalam Hukum Multiplikasi Lagrange (Lagrange Multiplier) sebab fungsi dari pada f yang diambil sebagai subyek yang minimal dalam persamaan pembatas pertama pada titik yang kontinyu dari Lagrange L (titik kontinyu dari suatu fungsi adalah tunggal pada seluruh diferensial parsiel tingkat satu yang mungkin didapat).

Untuk keadaan umum dari suatu fungsi yang mempunyai n variabel $f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n)$ dan m persamaan pembatas $g_i(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_m) = 0$ ....(27)

dimana ; i = 1, 2, 3, ...,m n

Maka persamaan Lagrange dapat ditulis :

$$L(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n, {}_1, {}_2, \ldots \lambda_m) =$$

$$f(x_1, x_2, x_3; x_4, \ldots\ldots x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i(x_1 \ldots x_n) \ldots (28)$$

dan kondisi ini harus minimal bila:

$$\frac{\delta L}{\delta x_i} = 0, \quad \text{dimana } i = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots n$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda_i} = 0 \quad \text{dimana } i = 1, 2, 3, \ldots\ldots m$$

II. 5. APLIKASI PERSAMAAN MULTIPLIKASI LAGRANGE DIDALAM INVENTORY CONTROL.

Suatu perusahaan menjaga persediaan peralatan sejumlah 5 (lima) item. kebutuhan tahunan adalah Z_i dan ongkos per unit adalah C_i.
Dari beberapa item tersebut dapat dibuat tabel sebagai berikut :

ITEM	Z_i	C_i
1	600	$ 3
2	900	10
3	2400	5
4	12000	5
5	18000	1

Tipe dari studi dalam perusahaan ini diharapkan menjawab persoalan beberapa order yang dilakukan untuk setiap itemnya pada setiap bulannya.
Hal ini dianggap bahwa bisa diperhitungkan jumlah order tahunan dan rata-rata inventory dengan data-data sebagai berikut :

ITEM	PESANAN PER TAHUN	INVENTORY RATA*RATA
1	12	$ 75
2	12	375
3	12	500
4	12	2500
5	12	750
	60	$ 4200.

Dimana inventory rata-rata bisa diperhitungkan sebagai berikut :

$$\frac{Z_i \cdot C_i}{12} \; \frac{1}{2}$$

Z_i = kebutuhan/tahun

C_i = ongkos/unit.

Apabila diketahui ongkos pesanan dari perusahaan tersebut \$ 10 per order dan ongkos angkut adalah 12% per tahun, maka bisa diperhitungkan ongkos total dari perusahaan dalam rangka pengorderan sebagai berikut :

$$T.C_{current} = 60\ (10) + 0{,}12\ (4200) = \$\ 1104.$$

diketahui bahwa C_r = \$ 10 dan C_t = 0,12 , apabila keadaan perusahaan seperti itu, maka didapatkan kerangka order pada setiap itemnya.

Untuk itu bisa diperkirakan jumlah order dan jumlah unitnya adalah sebagai berikut :

$$X_{i\$} = \frac{2\ C_i Z_i C_r}{C_t}$$

Dari ketentuan diatas didapat perhitungan sebagai berikut :

ITEM	PESANAN OPTIMAL (\$)	ORDER PER TAHUN
1	\$ 548	3,28
2	1225	7,35
3	1414	8,49
4	3162	18,98
5	1732	10,39
	\$ 8081	48,49

Dimana order per tahun diperhitungkan dengan rumus :

$$\frac{Z_1 \cdot C_1}{X_{1\$}}$$

Bila inventory rata-rata dari setiap item disederhana - kan separuh dari pada besaran order dalam dollar, dapat ditentukan ongkos total dari kerangka order dapat dinya takan sebagai berikut :

$$T.C_{optimal} = 10\ (48{,}49) + 0{,}12\ (4040) = \$\ 970.$$

Hal ini dapat diperhitungkan untuk-untuk persoalan seje nis tentang pengolahan kembali sistim inventory akan te tapi bisa juga memperkirakan kapan dan berapa besarnya perusahaan dapat menyesuaikan kebutuhannya secara benar untuk setiap periode order item. Ini bisa terlihat bah- wa penggunaan dari persamaan untuk policy yang optimal bisa meminimalkan ongkos sebanyak $ 134 atau 12%. Sebelum meneruskan pesanan-pesanan diatas, diambil lang kah-langkah tertentu yang berkaitan dengan kemungkinan menaikkan tetapi tidak akan menarik dari beberapa ana- lisa didalam persoalan salah satu itemnya.

Misal : Perusahaan mempunyai keterbatasan dalam kapital kerjanya dan tidak dapat merawat secara optimal seperti yang diharapkan. Inventory rata-ratanya $ 4040 , tepatnya bahwa perusahaan akan memba - yar inventory rata-rata $ 3000.

Pertanyaan : Bagaimana kerangka ordernya supaya bisa direncanakan dengan distribusi ongkos totalnya seperti diatas.

Persoalan ini bisa diformulasikan secara matematis dengan notasi penjumlahan. Persoalan ongkos total, X_i unit dari i item dalam suatu order sebagai berikut:

$$T.C = 10 \sum_i \frac{Z_i}{X_i} + 0{,}12 \sum_i \frac{X_i \cdot C_i}{2}$$

Dengan restriksi : $\sum_i \frac{X_i \cdot C_i}{2} = 3000.$

Persoalan TC harus dieliminasikan dengan restriksi diatas Bentuk penyelesaian matematik dengan menggunakan Lagrange dengan restriksi yang bisa dituliskan :

$$\sum_i \frac{X_i \cdot C_i}{2} - 3000 = 0$$

Dari persamaan Lagrange yang dinotasikan dengan $\mathcal{L}$ dan dijumlahkan dengan faktor λ sebagai pengali dari persamaan restriksi bisa dinyatakan dengan persamaan untuk meminimalkan ongkos total, maka :

$$\mathcal{L} = 10 \sum_i \frac{Z_i}{X_i} + 0{,}12 \sum_i \frac{X_i \cdot C_i}{2} + \lambda \left(\sum_i \frac{X_i C_i}{2} - 3000 \right)$$

Selanjutnya diturunkan terhadap X_i didapat

$$\text{(a)} \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta X_i} = - \frac{10 Z_i}{X_i^2} + 0{,}6\, C_i + \frac{\lambda C_i}{2} = 0$$

(b) $$\frac{\delta h}{\delta \lambda} = \sum_i \frac{X_i \cdot C_i}{2} - 3000 = 0 .$$

dengan merubah bentuk persamaan (a) didapat persamaan penyelesaian untuk menentukan X_i :

$$X_i = \sqrt{\frac{20 \ Z_i}{(0,12 + \quad) \ C_i}}$$

substitusi dari persamaan (b) didapat :

$$\sqrt{\frac{20}{0,12 + \lambda}} \sum_i \sqrt{Z_i \ C_i} = 6000$$

maka didapatkan harga :

$$\lambda = 20 \left(\frac{Z_i \cdot C_i}{6000} \right)^2 - 0,12$$

ITEM	$\sqrt{Z_i \cdot C_i}$
1	42,43
2	94,87
3	109,54
4	244,95
5	134,16
	625,95.

dari sini dapat dihitung :

$$\lambda = 0,09767.$$

$$X_{i\$} = \sqrt{\frac{20}{0,12 +}} \sqrt{Z_i \cdot C_i}$$

$$= 9,585 \sqrt{Z_i \cdot C_i} .$$

kemudian didapat :

ITEM	PESANAN (dalam $)	ORDER PER TAHUN
1	406,70	4,43
2	909,30	9,90
3	1049,90	11,43
4	2348,00	25,56
5	1286,00	14,00
	$ 5999,90	65,32 .

Ongkos total untuk kebijaksanaan pemesanan diatas adalah:

$$T.C = 10\ (65,32) + 0,12\ (3000) = \$\ 1013\ .$$

ini adalah ongkos total minimal dari semua kebijaksanaan yang mungkin memberikan inventory rata-rata $ 3000, akan terlihat bahwa ongkos total menjadi naik dibanding dengan kebijaksanaan yang optimal sebagaimana yang seharusnya - terjadi, bagaimanapun untuk menambahkan ongkos total yang hanya $ 43 , perusahaan telah memotong untuk penanaman - inventory rata-rata dengan $ 4040 - $ 3000 = $ 1040 . Langkah sampingan yang mempunyai keutamaan subsider,yang dapat menunjukkan secara ekstrim, dengan menggunakan Multiplikasi Lagrange, merupakan jalan untuk meminimalkan subyek (persamaan) ongkos total terhadap restriksinya (pembatas). Untuk itu digunakan pembedaan dimana dikembalikan pada pokok persoalan semula. Sebab itu dapat dimengerti - bahwa itu adalah persoalan yang sangat besar dalam meng-- ukur dua ongkos yang nyata untuk dioptimasikan dalam ben-

tuk policy order dalam suatu perusahaan.
Analisa order yang optimal dari kebijaksanaan subyek untuk mendapatkan dollar rata-rata inventory tidak lebih dari $ 3000 yang diharapkan. Dimana hal ini merupakan suatu perlakuan yang digunakan dari suatu persoalan yang mempunyai kebijaksanaan inventory rata-rata $ 4200 untuk 60 pesanan per tahun.
Sekarang kita mengetahui C_r atau C_c yang pernah dibicarakan. Untuk itu dipakai suatu alasan bahwa apabila inventory nya bisa direduksi (dikurangi) dan dijaga kekontinyuitasnya dalam pesanan setahun , maka diketahui bagaimanakah kedudukan dalam perusahaan.
Ini akan benar apabila ongkos itu masih bisa diterima,untuk itu diusahakan bila diinginkan penurunan dari ongkos rata-rata inventory yang diinvestasikan selama jumlah pemesanannya per tahunnya dijaga 60 kali. Hal ini bisa dikerjakan bila keadaan itu diterapkan dengan pemikiran bahwa tidak mungkin menunjukan berapa penghematan yang dilakukan. Untuk itu harus diterapkan secara eksak sebagai - be rikut : Ongkos minimal inventory yang dimungkinkan sebgai subyek dan dibatasi jumlah pesanan total pertahun 60.
Pernyataan tentang Total Inventory rata-rata adalah :

$$T.I = \frac{X_1 . C_1}{2}$$

di inginkan Total Pesanan : $T.O = \dfrac{Z_1}{X_1} = 60$

Bentuk Lagrange nya dapat diformulasikan sebagai berikut :

$$h = \sum_i \frac{X_i \cdot C_i}{2} + \lambda\left(\sum_i \frac{Z_i}{X_i} - 60\right)$$

Persamaan derivatipnya sama dengan nol ;

$$\frac{\delta h}{\delta X_i} = \frac{C_i}{2} - \frac{\lambda Z_i}{X_i^2} = 0$$

$$\frac{\delta h}{\delta \lambda} = \sum_i \frac{Z_i}{X_i} - 60 = 0$$

Dari persamaan pertama didapatkan ;

$$X_i = \sqrt{2\lambda}\sqrt{\frac{Z_i}{C_i}}$$

dengan substitusi didapat ;

$$\lambda_i = \frac{\left(\sum_i Z_i \cdot C_i\right)^2}{7200}$$

maka = 54,42 .

dan $X_{i\$} = X_i \cdot C_i$

$$= \sqrt{2\lambda}\sqrt{\frac{Z_i}{C_i}}$$

$$= 10{,}43\sqrt{Z_i \cdot C_i}$$

ITEM	PESANAN (dalam $)	PESANAN PER TAHUN
1	442,70	4,07
2	989,80	9,09
3	1142,80	10,50
4	2554,90	23,48
5	1399,30	12,86
	6529,50	60,00

Apabila inventory nya adalah sepatuh dari ukuran order atau sebesar $ 3265 , jumlah dari pada order adalah tetap 60 dan merupakan suatu restriksi dan inventory nya bisa direduksi $ 935 atau 22,3% dari seluruh kebijaksanaan pengeluaran keuangan. Ini adalah kemungkinan minimal - dari investasi inventory dengan 60 order per tahun .

Penurunan pada investasi inventory bisa dilihat dengan re distribusi dari order setiap itemnya pada suatu langkah - yang optimal.

Untuk itu tidak dapat ditunjukkan berapakah reduksi atau penghematan inventory karena tidak bisa diketahui harga C_c nya.

Analisa yang berhasil dilakukan diatas, menguatkan argumen (pendapat) kebalikannya . Kenapa tidak melihat posisi dalam perusahaan tanpa mengetahui ongkosnya dengan menjaga investasi inventory rata-rata pada posisi keadaan yang sama dan penurunan dari jumlah pesanan per tahunnya ?

Pernyataan dari T.I dan T.O adalah sama, tetapi sebetulnya merupakan kebalikannya.

Di inginkan untuk meminimalkan T.O $= \sum_i \frac{Z_i}{X_i}$

dengan restriksi: T.I $= \sum_i \frac{X_i . C_i}{2}$

$= \$ \ 4200$

Bentuk dari Lagrange nya adalah ;

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{Z_i}{X_i} + \lambda \left(\sum_i \frac{X_i . C_i}{2} - 4200 \right)$$

Dan persamaan derivatipnya sama dengan nol ;

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta X_i} = - \frac{Z_i}{X_i^2} + \frac{\lambda C_i}{2} = 0$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda} = \sum_i \frac{X_i . C_i}{2} - 4200 = 0$$

maka didapatkan :

$$X_i = \sqrt{\frac{2 Z_i}{\lambda C_i}}$$

dengan substitusi didapat :

$$\lambda = \frac{\left(\sum_i \sqrt{Z_i . C_i} \right)^2}{35,280,000}$$

$$= 0,01111 .$$

$$X_{i\$} = 13,42 \sqrt{Z_i . C_i}$$

oleh karena itu dapat dihitung ;

ITEM	PESANAN (dalam $)	PESANAN PER TAHUN
1	569,40	3,16
2	1273,10	7,07
3	1469,90	8,16
4	3286,40	18,26
5	1800,00	10,00
	8398,80	46,65

Inventory rata-rata dijaga $ 4200 dengan Total Order per tahun dapat ditekan 46,65 kali , maka bisa dihemat 13,35 pesanan per tahun atau 22.3 % dari arus pesanan per tahun. Kebijaksanaan ini adalah salah satu cara meminimalkan Total Pesanan per tahun dari seluruh kebijaksanaan dimana bisa diberikan investasi inventory rata-rata $ 4200. Perlu dicatat bahwa prosentase penghematan adalah sama - dalam berbagai persoalan yaitu 22,3 % . Ini adalah peristiwa yang mungkin selalu terjadi. Pertanyaan dari dua kemungkinan yang harus dilakukan dalam kebijaksanaan biasanya tidak dapat terjawab tanpa mengetahui ongkos yang saling berkaitan, dimana salah satu diantaranya kelihatan betul-betul bagus untuk menghemat keuangan perusahaan walaupun tidak dapat dihitung berapa besarnya.

Sekarang bisa menghitung/mengetahui 3 (tiga) cara kebijaksanaan optimasi dengan restriksi yang berbeda dan bisa dihitung kebijaksanaan optimal yang sebenarnya untuk memperkirakan harga C_r dan Cc

Perhatikan dari 4 (empat) kebijaksanaan optimasi yang berbeda-beda ini, didalam tabel sebagai berikut.

KEBIJAKSANAAN	TOTAL INVENT.	PESANAN PER THN.	PRODUKSI (TI) (TO).
OOptimal; C_r = \$10, C_c = 0,12.	\$4040	48,49	195900
Optimal; Invent. = \$3000.	\$3000	65,32	195960
Optimal; Order = 60	\$3265	60,00	195900
Optimal; Invent. = \$4200.	\$4200	46,65	195930

Semua hasil kali (T.I) (T.O) adalah sama dengan suatu konstanta tertentu, dengan sedikit kesalahan. Oleh karena itu dengan beberapa percobaan yang masih mungkin untuk mendapatkan harga konstanta itu, maka akan memberikan besaran \$ 195900 dan tidak seluruhnya tepat harga konstantanya, ada yang harganya \$ 195910 .

Dan ini sama dengan ;

$$\tfrac{1}{2}\,(625{,}95)^2 = \tfrac{1}{2}\,\Big(\sum_i \sqrt{Z_i \cdot C_i}\Big)$$

Oleh sebab itu dapat secara tegas diterima dan dijelaskan alasan untuk berbagai macam persoalan yang mempunyai kemiripan dalam berbagai macam persoalan optimal.

Pengulangan kembali untuk $X_{i\$}$ dimana dipilihkan persoalan pengorderan yang benar-benar optimal untuk 4(empat) kasus disitu terlihat bahwa akan memberikan persamaan ;

$$X_{i\$} = K \sqrt{Z_i \cdot C_i}$$

K merupakan perbedaan dari 4 (empat) kasus yang dibicarakan, yang selalu bisa ditunjukkan dari C_r dan C_c dan juga dari .

Berdasarkan alasan tersebut $\left(\sum_i \sqrt{Z_i . C_i}\right)^2$ adalah merupakan suatu harga yang konstan dari hasil kali T.I dan T.O, dimana sebagai alasan berdasarkan pendekatan dengan garis , akan dapat membedakan manakah yang menjadi tujuan Inventory Control.

Marilah sekarang dipilih pernyataan dari $X_{i\$}$ yang bisa di deferensialkan dalam bentuk persamaan panjang :

$$T.I = \sum_i \frac{X_{i\$}}{2} = \sum_i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\ C_i Z_i C_r}{C_c}} = \sqrt{\frac{C_r}{C_c}} \sum_i \sqrt{\frac{C_i\ Z_i}{2}}$$

Kesimpulan dari persamaan T.O adalah :

$$T.O = \sum_i \frac{Z_i\ C_i}{X_{i\$}} = \sqrt{\frac{C_c}{C_r}} \sum_i \sqrt{\frac{C_i\ Z_i}{2}}$$

Dari kedua pernyataan tersebut diatas adalah valid (benar) untuk berapapun harga C_r dan C_c yang mungkin digunakan dalam beberapa harga yang diberikan, dan data-data $Z_i . C_i$ yang akan diberikan sebagai Ongkos Total Inventory Optimal dan Total Pesanan per tahun.

Daya tarik dari kedua persoalan diatas adalah bila mengalikan secara bersama-sama dari ongkos C_r dan C_c harganya dikesampingkan dan berangkat dari persamaan :

$$(T.I)(T.O) = \frac{1}{2}\left(\sum_i \sqrt{Z_i C_i}\right)^2$$

Besarnya hasil kali perkalian yang konstan akan didapatkan dari 4 (empat) keputusan optimal empiris ini,.

Maka hasil kali T.I dan T.O dapat dilihat berdasarkan pada kondisi optimal yang hanya mungkin untuk 2 (dua) ongkos yaitu C_r dan C_c, yang akan selalu konstan dari data data yang telah diberikan. Seterusnya dapat dilihat bahwa bagi kedua pernyataan itu akan mengenyampingkan dua ongkos tersebut.

$$\frac{T.I}{T.O} = \frac{Cr}{C_c}$$

Untuk itu diberikan T.I dan T.O dalam kondisi yang opti - mal, akan didapatkan secara benar perbandingan kedua ongkos tersebut diatas, dimana kondisi optimal faktor terakir sudah tercapai dalam suatu alternatip yang dinyatakan dari kondisi optimal didapatkan pada beberapa macam pembatas.

Bila inventory dibatasi untuk \$ 3000 didapatkan keputusan optimal 65,32 pesanan per tahun ini adalahh untuk kebutuhan inventory \$ 3000 saja. Perbandinggn T.I/T.O untuk keadaan ini adalah 45,9. Apabila ongkos pesanan diketahui sebanyak \$10 akan disimpulkan bahwa keputusan untuk C_c = \$ 10/45,9 = 0,218. Dengan kata lain, policy yang didapatkan hanya untuk optimal bila C_c = 0,218. Untuk itu harga C_r yang diharuskan adalah 0,218. Sekarang policy - yang didapatkan pengusaha/perusahaan mempunyai keterbatasan kapital lancar dan ingin membatasi investasi inventorynya \$ 3000 saja. Telah ditemukan bahwa pembatas ini merupakan masukan yang otomatis dari harga ongkos pembawaan/ transportasi 0,218.

Dengan alasan yang sama untuk persoalan yang lain, dimana policy optimalnya dibawah batas-batas tertentu. Pembatas pesan adalah 60, hal ini hanya sebagai contoh, bahwa ongkos pembawaan adalah 0,12. Secara otomatis akan memberikan harga C_r = \$ 6,53. Pembatas inventory nya menjadi \$ 4200 dan beranggapan bahwa ongkos pesan adalah \$ 10 secara otomatis ongkos pembawaannya menjadi \$ 0.111.

Hubungan masukan-masukan diatas dan variasi harga λ dapat untuk menghitung manakah yang menarik salah satunya.

Untuk pembatas pertama dianggap bahwa diketahui C_r = \$10 dan C_c = 0,12 tetapi perusahaan akan lebih mengetatkan pengeluaran inventory \$ 3000 karena itu didapatkan λ = 0,09767 dan dicatat bahwa 0,12 + 0,0977 = 0,218 , ongkos pembawaan disini terlihat cara perhitungannya.

Dengan kata lain, λ adalah bukan masalah pengubah Matemattik tertentu (bukan konstanta) ini adalah harga yang sama dengan penambahan terhadap ongkos pembawaan, sebab ada pembatas inventory nya. Permainan ini adalah pendek, seluruh ongkos-ongkosnya bisa dibuat satu formulasi (rumusan).

Pembatas kedua, dilihat bahwa pesan adalah 60, didapatkan λ = 54,42 dan ini bisa dicatat bahwa (54,42)(0,12) = \$ 6,53, C_r adalah harga item, untuk itu Ccnya = 0,12.

Dengan kata lain λ dalam kasus ini adalah perbandingan antara C_r dan C_c .

Pembatas ketiga adalah bahwa inventory = \$4200, ditentukan harga λ = 0,01111 da 10(0,01111) = 0,1111 adalah eksak untuk mendapatkan ongkos pembawaan seperti diatas.

Dimana dengan kata lain λ adalah perbandingan $C_r : C_c$. Untuk beberapa kejadian λ adalah merupakan hubungan yang dekat dengan ongkos yang harus dibatasi. Untuk beberapa persoalan ekonomi akan selalu dijumpai metoda Multiplikasi Lagrange untuk dikembangkan merupakan suatu dasar ekonomi yang bisa dipertanggung jaw abkan secara kwantitas. Kembali kemasalah policy permulaan dari pada suatu perusahaan, didapat beberapa pilihan untuk mendapatkan sesuatu keputusan yang tidak masuk akal. Untuk salah satu policy yang optimal, akan diambil salah satu item tersendiri dan ini akan memberikan perbandingan order per tahun - dan inventory rata-ratanya. Hal iniadalah suatu fakta yang esensial untuk suatu policy inventory pada saat pembuat keputusan, sehingga didapatkan policy yang konsisten dalam menyelesaikan suatu persoalan. Bila dilihat dari arus keputusannya pada suatu perusahaan akan didapatkan - bahwa tidak ada satupun keputusan-keputusan yang sama dari satu dengan yang lainnya. Ini adalah tidak mungkin untuk dikerjakan dimana, fakta policy suatu perusahaan tidak optimal untuk ongkos spesifik seperti diatas.

Untuk arus policy perusahaan akan digunakan argumen-argumen untuk setiap individual item dan akan ditemukan ongkos pembawaan yang dianggap bahwa ongkos pesanannya adalah \$ 10.

ITEM	(T.I)/(T.O)	C_c
1	6,25	1,60
2	31,25	0,32
3	41,67	0,24
4	208.33	0,05
5	62,50	0,16

Besar lintasan dari harga-harga yang diindikasikan adalah irasional pada arus policy perusahaan.

Terakhir kali argumen menarik arti untuk perusahaan de - ngan mana akan banyak digunakan oleh para exekutip yang bertanggung jawab untuk kestabilan policy inventory dalam suatu lingkup dimana sangat sukar atau tidak mungkin un- tuk mendapatkan perkiraan ongkos yang relevan.

Perbedaan ini dinyatakan dalam kurva policy yang optimal, dasar dari kurva itu adalah kesamaan dari hasil kali yang konstan dari (T.I) dan (T.O), dimana didapatkan dalam ke- adaan yang benar, untuk set data yang diberikan untuk po- licy dari beberapa kombinasi kemungkinan-kemungkinan har- ga C_r dan C_c .

Dapat dibuat gambar dalam titik-titik yang berujud suatu kurva, dengan menggunakan investasi Total Inventory yang dinyatakan sebagai sumbu X (absis) dan Total Order per tahun sebagai sumbu Y (ordinat).

Persamaan (T.I)(T.O) = K adalah berbentuk hiperbola .

Dalam gambar tesebut terlihat berbentuk hiperbola, meru- pakan kurva policy optimal untuk data- data dalam contoh- contoh diatas, dan karena itu setiap titik-titik dalam kurva menyatakan policy-policy optimal untuk berbagai macam perbandingan C_r dan C_c khususnya dari berbagai macam titik dalam perbandingan kurva adalah diberikan dari (T.I) / (T.O). Dengan kata lain, setiap hal yang mungkin merupakan policy optimal dapat dinyatakan dengan titik - titik dalam kurva.