B A B II

P E R M U K A A N

Sebuah kurva dalam R^3 adalah tempat kedudukan titik titik yang koordinatnya merupakan fungsi dari sebuah parameter tunggal jadi

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u) \qquad (11)$$

merupakan persamaan kurva dalam bentuk parameter.
Sedangkan permukaan didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik yang koordinatnya merupakan fungsi dari dua parameter bebas u,v jadi

$$x = f_1(u,v), \quad y = f_2(u,v), \quad z = f_3(u,v) \qquad (12)$$

merupakan persamaan parameter suatu permukaan dimana

$u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \qquad v_1 \leqslant v \leqslant v_2.$

Tetapi dapat terjadi bahwa tidak semua fungsi f memuat dua parameter, dengan kata lain suatu atau lebih fungsi f hanya memuat sebuah parameter tunggal misalnya, silinder dapat kita tulis

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u,v)$$

Jika dalam persamaan permukaan (1.2), v kita anggap konstan, maka koordinatnya tergantung hanya dari satu parameter u, ini berarti merupakan sebuah kurva yang terletak pada permukaan (1,2) kurva tersebut dinamakan kurva parameter permukaan, disajikan sebagai kurva parameter v = konstan. Begitu pula u = konstan merupakan koleksi yang lain, yang juga merupakan kurva-kurva parameter pada permukaan. Bila konstanta-konstanta itu berubah maka permukaan ditutupi oleh sebuah koleksi kurva-kurva parameter. Melalui tiap titik P pada permukaan ada tepat dua kurva parameter.
Padangan (u,v) juga dinamakan koordinat-koordinat kurva (curvilinier coordinates) sebuah titik pada permukaan.
Sedangkan kurva-kurva parameter sering juga disebut kurva-kurva koordinat.

II.1. KOEFFISIEN FUNDAMENTAL ORDER SATU.

Pada sebuah permukaan S, yang diberikan dalam bentuk persamaan parameter (1.2) suatu hubungan $\phi(u,x) = 0$ antara koordinat-koordinat kurva u,v pada sebuah permukaan menentukan sebuah kurva pada permukaan tersebut. Elemen linier dari kurva diberikan oleh

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (2.1)$$

dimana

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

Jika

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \qquad (2.2)$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

atau, dalam bentuk yang lebih sederhana

$$E = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad F = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}, \quad G = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$$

persamaan (2.1) menjadi

$$ds^2 = E du^2 + 2F\, du dv + G\, dv^2 \qquad (2.3)$$

Ruas kanan dari persamaan (2.3) disebut bentuk kuadratik fundamental pertama. Sedangkan koeffisien-koeffisiennya E, F, G, disebut koeffisien fundamental order satu.

Jika permukaan adalah nyata, dan oleh karena ds merupakan panjang, maka

$$E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

Selalu positif (atau nol untuk du=dv=0). Sehingga $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$ adalah nyata dan positif.

Dengan menggunakan besaran E, F dan G kita dapat menghitung sudut antara dua garis singgung pada permukaan. Jika C adalah sembarang kurvapada permukaan, cosinus arah α, β, γ dari garis singgung disuatu titik adalah :

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds} \right),$$

$$\beta = \frac{dy}{ds} = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{ds} \right),$$

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{ds} \right).$$

Ambil $dv/du = \lambda$ dan $ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F du\,dv + G\,dv^2}$

maka :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\dfrac{\partial x}{\partial u} + \lambda \dfrac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{E + 2F\lambda + G\lambda^2}}, \\[2ex] \beta = \dfrac{\dfrac{\partial y}{\partial u} + \lambda \dfrac{\partial y}{\partial v}}{\sqrt{E + 2F\lambda + G\lambda^2}}, \\[2ex] \gamma = \dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial u} + \lambda \dfrac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{E + 2F\lambda + G\lambda^2}} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4)$$

Harga λ didapat dengan mendifferensialkan persamaan kurva C, ialah :

$$\phi(u,v) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}du + \frac{\partial \phi}{\partial v}dv = 0$$

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\partial \phi}{\partial u}\Big/\frac{\partial \phi}{\partial v}.$$

Apabila C_1 merupakan kurva kedua yang berpotongan dengan C dititik M, dan cosinus arah dari garis singgung terhadap C_1 di M adalah $\alpha_1 \beta_1$ dan γ_1 diberikan oleh

$$\alpha_1 = \frac{\delta x}{\delta s} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta s} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta s} \right),$$

$$\beta_1 = \frac{\delta y}{\delta s} = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta s} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta s} \right),$$

$$\gamma_1 = \frac{\delta z}{\delta s} = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta s} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta s} \right).$$

Jika θ menyatakan sudut antara arah positif terhadap C – C_1 di M, maka

$$\cos\theta = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = \frac{E\,du\delta u + F\,(du\delta v + dv\delta u)}{ds\delta s} + \frac{G\,dv\delta v}{ds\delta s} \quad \ldots\ldots\ldots (2.5)$$

Hal-hal khusus sebagai berikut :

1. Jika kedua arah tersebut tegak lurus, berarti $\theta = /2$ maka berlaku

$$E\,du\,u + F\,(du\,v + dv\,u) + G\,dv\,v = 0 \quad \ldots (2.6)$$

2. Jika ω sudut antara garis parameter u = konstan

(du = 0 dan dv sembarang) dan v = konstan ($\delta v = 0$ dan u sembarang), maka ω dinyatakan oleh

$$\cos\omega = \frac{F\,dv\,\delta u}{\sqrt{G\,dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

$$\sin\omega = \sqrt{1-\cos^2\omega} = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}} = \frac{H}{\sqrt{EG}} \quad ..(\ 2.7\ )$$

3. Dari rumus (2.7) dapat ditarik kesimpulan bahwa kurva-kurva parameter membentuk sistem orthogonal bila $F = 0$ ....(2.8)

II.2. BIDANG SINGGUNG, GARIS NORMAL

Garis singgung suatu kurva pada permukaan disebut garis singgung permukaan dititik kontak. Semua garis singgung ini terletak dalam suatu bidang, yang kita sebut bidang singgung di suatu titik pada permukaan.

Perhatikan suatu kurva C pada permukaan dan titik M (x, y, z) pada C merupakan titik singgung pada permukaan. Persamaan dari garis singgung adalah

$$\frac{\varphi - x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{\gamma - z}{\frac{dz}{ds}} = \lambda$$

dimana φ, η, γ adalah koordinat titik pada garis, tergantung dari harga parameter λ. Jika persamaan dalam koordinat kurvalinier dari kurva C adalah $V = \phi(u)$, persamaan diatas dapat ditulis

$$\varphi - x = \lambda\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \phi'\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{du}{ds},$$

$$\eta - y = \lambda\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \phi'\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{du}{ds},$$

$$\gamma - z = \lambda\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \phi'\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{du}{ds}.$$

Agar supaya diperoleh tempat kedudukan dari garis-garis singgung, kita eliminir λ dan ϕ' dari persamaan tersebut

$$(\varphi - x)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) = \lambda\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \phi'\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{du}{ds}.$$

$$(\eta - y)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \lambda\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \phi'\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{du}{ds}$$

$$(\gamma - z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \lambda\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \phi'\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{du}{ds}$$

Sehingga

$$(\varphi - x)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) + (\eta - y)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$+(\gamma - z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0$$

atau

$$\begin{vmatrix} \varphi - x & \eta - y & \gamma - z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1)$$

Dari persamaan (3.1) tampak bahwa semua garis singgung terletak dalam bidang yang dibentuk oleh $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$, dan $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$. Bidang ini merupakan bidang singgung di titik M pada permukaan. Jadi persamaan (3.1) merupakan persamaan bidang singgung di titik M pada permukaan.

Garis normal permukaan di titik M, adalah garis yang melalui titik M dan tegak lurus pada bidang singgung permukaan.

Jika X, Y, Z adalah cosinus arah normal pada permukaan maka

$$X : Y : Z = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

kita ambil

$$X = \lambda \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad Y = \lambda \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ dan}$$

$$Z = \lambda \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Sehingga

$$X^2 = \lambda^2 \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2$$

$$Y^2 = \lambda^2 \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2$$

$$Z^2 = \lambda^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2$$

Sedangkan $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$

dan $\sum \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 - \left(\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$

Jadi $\sum X^2 = \lambda^2 \left[\sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 - \left(\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \right]$

$$1 = \sqrt{EG - F^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{1}{H}$$

Maka cosinus arah normal dapat kita tulis

$$X = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad Y = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$Z = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.2)$$

Berdasarkan persamaan (3.2) maka persamaan bidang singgung di titik $M(x,y,z)$ dapat kita tulis

$$(\xi - x)\,X + (\eta - y)\,Y + (\zeta - z)\,Z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3.3)$$

Jika X, Y, Z, masing-masing kita kalikan dengan $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ dan $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ maka

$$X\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \right)\frac{\partial x}{\partial u}}{H}$$

$$Y\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \right)\frac{\partial y}{\partial u}}{H}$$

$$Z\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \right)\frac{\partial z}{\partial u}}{H}$$

Analoog

$$X\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial v}}{H}$$

$$Y\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial v}}{H}$$

$$Z\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial v}}{H}$$

Sehingga dapat kita simpulkan

$$\sum X\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \;, \qquad \sum X\frac{\partial x}{\partial v} = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.4)$$

Yang mana merupakan kejadian bahwa normal tegak lurus ter hadap garis-garis singgung kurva koordinat.

II.3. KOEFFISIEN FUNDAMENTAL ORDER DUA.

Jika M' (u+du, v+dv) sebuah titik sembarang pada - permukaan, dengan menggunakan uraian Deret Taylor sekitar titik M' kita dapatkan

$$\begin{aligned} x(u+du,\ v+dv) &= x(u,v) + du\frac{\partial x}{\partial u} + dv\frac{\partial x}{\partial v} \\ &+ 1/2\left[du^2\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2du\,dv\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} \right. \\ &\left. + dv^2\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right] \\ &+ \frac{1}{3!}\left[du\frac{\partial}{\partial u} + dv\frac{\partial}{\partial v}\right]^3 \\ &x(u+\theta_1 du,\ v+\theta_2 dv) \ldots(4.1) \end{aligned}$$

Analoog untuk y, z. maka jarak p antara titik M' dengan bidang singgung permukaan di M adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} p = \sum X\,dx &= du\sum X\frac{\partial x}{\partial u} + dv\sum X\frac{\partial x}{\partial v} \\ &+ 1/2\left[du^2\sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2du\,dv\sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right. \\ &\left. + dv^2\sum X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right] \\ &+ \frac{1}{3!}\left[du\frac{\partial}{\partial u} + dv\frac{\partial}{\partial v}\right]^3\sum X\,x(u+\theta_1 du,\ v+\theta_2 dv) \end{aligned}$$

berdasarkan persamaan (3.4) maka

$$p = \sum X\,dx = 1/2\ (\ D\,du^2 + 2D'\,dudv + D''dv^2) + e \quad \ldots\ldots(4.2)$$

dimana e menyatakan hubungan dari order tiga dan yang lebih tinggi dalam du dan dv, sedangkan fungsi-fungsi D, D', D'' diberikan oleh

$$D = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\ ,\ D' = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\ ,\ D'' = \sum X\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \ \ldots\ldots(4.3)$$

fungsi dari parameter u,v.
Seandainya persamaan (3.4) kita differensialkan berturut-turut terhadap u,v maka

$$\left\{\begin{array}{l} \sum X \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \sum \dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial u} = 0,\ \sum X \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \sum \dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} = 0, \\ \sum X \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \sum \dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} = 0,\ \sum X \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \sum \dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial v} = 0. \end{array}\right. \quad \ldots\ldots (4.4)$$

Jadi berdasarkan persamaan (4.5) harga-harga dari D, D', D'' dapat kita tulis

$$\left\{\begin{array}{l} D = \sum X \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\sum \dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial u}, \\ D' = \sum X \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\sum \dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} = -\sum \dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u}, \\ D'' = \sum X \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\sum \dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial v} \end{array}\right. \quad \ldots\ldots (4.5)$$

E, F, G bergantung pada derivatif pertama $\sum x$ terhadap u dan v, karena itu

$$E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$$

disebut fondamental pertama, sedang bentuk

$$\phi = D\,du^2 + 2D'\,dudv + D''\,dv^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.6)$$

disebut fondamental kedua dari permukaan, dan fungsi-fungsi D, D', D'' disebut koeffisien fundamental order dua.

Sekarang kita lihat hubungan antara koeffisien fundamental order satu E, F, G dan koeffisien fundamental order dua D, D' dan D''.

Dari hubungan

Dari hubungan

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

apabila kita differensialkan terhadap u dan v kita pero - leh $2X\frac{\partial X}{\partial u} + 2Y\frac{\partial Y}{\partial u} + 2Z\frac{\partial Z}{\partial u} = 0$, $2X\frac{\partial X}{\partial v} + 2Y\frac{\partial Y}{\partial v} + 2Z\frac{\partial Z}{\partial v} = 0$,

Sehingga $\sum X\frac{\partial X}{\partial u} = 0$, $\sum X\frac{\partial X}{\partial v} = 0$ ....(4.7)

Dari persamaan (4.7) dan persamaan (3.4) maka didapat kan hubungan

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u} = \lambda \sum \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \sum \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = \lambda \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \mu \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$-D = \lambda E + \mu F$$

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \lambda \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \mu \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$-D' = \lambda F + \mu G$$

Harga dari pada λ dan μ kita dapatkan

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} -D & F \\ -D' & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{-DG + FD'}{EG - F^2} = \frac{-GD + FD'}{H^2}$$

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} E & -D \\ F & -D' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{-ED' + DF}{EG - F^2} = \frac{-ED' + FD}{H^2}$$

Jadi

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{FD' - GD}{H^2} \sum \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{FD - ED'}{H^2} \sum \frac{\partial x}{\partial v}$$

Sekarang kita tentukan untuk $\sum \frac{\partial X}{\partial v}$

$$\sum \frac{\partial X}{\partial v} = \lambda' \sum \frac{\partial x}{\partial u} + \mu' \sum \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = \lambda' \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \mu' \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$-D' = \lambda' E + \mu' F$$

$$\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = \lambda' \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \mu' \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$-D'' = \lambda' F + \mu' G$$

$$\lambda' = \frac{\begin{vmatrix} -D' & F \\ -D'' & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{-D'G + FD'}{EG - F^2} = \frac{FD'' - GD'}{H^2}$$

$$\mu' = \frac{\begin{vmatrix} F & -D' \\ F & -D'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{-ED'' + D'F}{EG - F^2} = \frac{FD' - ED''}{H^2}$$

Maka

$$\sum \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{FD'' - GD'}{H^2} \sum \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{FD' - ED''}{H^2} \sum \frac{\partial x}{\partial v}$$

Sehingga akhirnya kita dapatkan relasi

$$\begin{cases} \sum \dfrac{\partial X}{\partial u} = \dfrac{FD' - GD}{H^2} \sum \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{FD - ED'}{H^2} \sum \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \sum \dfrac{\partial X}{\partial v} = \dfrac{FD'' - GD'}{H^2} \sum \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{FD' - ED''}{H^2} \sum \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{cases} \qquad \ldots\ldots(4.8)$$