# IV. KESEBENTUKAN MATRIKS

Dua matriks A dan B disebut similar jika dapat ditentukan matriks non singulair P sedemikian hingga $B = P^{-1}AP$

Menyelidiki persoalan harga karakteristik matriks similar membangun teorema=teorema yang banyak.

Beberapa yang berguna dalam penyelesaian Persamaan Defferensial adalah sebagai berikut :

- dua matriks similar mempunyai akar=akar karakteristik yang sama.
- apabila matriks A similar dengan matriks diagonal D maka elemen-elemen diagonal dari D adalah akar-akar karakteristik dari A.
- apabila akar-akar karakteristik dari A adalah berlainan, maka A dapat dirobah menjadi matriks diagonal D sedemikian sehingga $D = P^{-1}AP$ dengan menggunakan matriks non singulair P, di mana elemen-elemen diagonal dari D adalah akar-akar karakteristik dari A.
- tiap matriks real simetris A dapat dirobah menjadi matriks diagonal D di mana elemen-elemen diagonalnya adalah akar-akar karakteristik dari A dengan menggunakan matriks orthogonal P sedemikian sehingga $P^{-1}AP = P'AP = D$.
- Apabila A matriks bujur sangkar type n yang mempunyai n vektor karakteristik bebas linear, maka matriks A similar dengan matriks diagonal di mana elemen-elemen diagonalnya adalah akar akar karakteristik dari A.
- setiap matriks bujur sangkar A adalah similar dengan matriks segitiga yang elemen-elemen diagonalnya adalah akar-akar karakteristik dari A.
- apabila A matriks bujur sangkar real dengan akar-akar karakteristik real, maka ada matriks orthogonal P sedemikian hingga $P^{-1}AP = P'AP$ matriks segitiga di mana elemen-elemen diago

## V. SISTIM PERSAMAAN DIFFERENSIAL

### 5.1. B E N T U K .

Pandanglah system yang terdiri dari n buah persamaan defferensial tingkat pertama yang melibatkan n buah fungsi yang tidak diketahui $y_1, y_2, y_3$ .............. $y_n$ yang berbentuk $a_{i1}y'_1 + \ldots\ldots + a_{in}y'_n = b_{i1}y'_1 + \ldots\ldots b_{in}y_n$ di mana $a_{ij}$ dan $b_{ij}$ koeffisien-koeffisien konstant $i = 1, 2 \ldots\ldots n$, $y_j$ adalah fungsi-fungsi dari t yang tidak diketahui akan ditentukan dan

$$y'_j = \frac{dy_j}{dt} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n)$$

Dengan bentuk lain system ditulis :

$$a_{11}\frac{dy_1}{dt} + a_{12}\frac{dy_2}{dt} + \ldots\ldots + a_{1n}\frac{dy_n}{dt} = b_{11}y_1 + b_{12}y_2$$

$$\ldots\ldots + b_{1n}y_n$$

$$a_{n1}\frac{dy_1}{dt} + a_{n2}\frac{dy_2}{dt} + \ldots\ldots + a_{nn}\frac{dy_n}{dt} = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2$$

$$\ldots\ldots + b_{nn}y_n$$

dengan bentuk matriks, system ini dapat ditulis sebagai :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \frac{dy_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y3 \end{bmatrix}$$

atau $AY^1 = BY$

jika matriks A non singulair maka $A^{-1}AY' = A^{-1}BY$ atau

$Y' = CY$ .................................................. (1)

di mana $C = A^{-1}B$

Subsitusi $y_j = \sum P_{jk}\ U_k$ atau

$$Y = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots\cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots\cdots & P_{2n} \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots\cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_n \end{bmatrix} = PU \ldots.(2)$$

di mana $U_1, U_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, U_n$ adalah fungsi-fungsi baru yang tidak diketahui dan $P = [P_{ij}]$ adalah matriks konstant. Turunan ke-t adalah $y_j^1 = \sum P_{ik}\ U_k^1$ atau

$$Y' = P\ U' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Karena $Y = P\ U$ maka system (1) menjadi

$$Y' = C\ P\ U \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Dari (3) dan (4) didapat persamaan :

$$PU' = C\ P\ U \text{ atau } U' = (P^{-1}C\ P)\ U \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Jadi subsitusi $y_j$ pada system (1) dengan koeffisien mamatriks C membangun system (5) dengan koeffisien matriks : $D = P^{-1}C\ P$ yang similar dengan C.

Analisa dari persamaan differensial di atas menunjukkan salah satu cara timbulnya kesebentukan matriks.

Kesebentukan $P^{-1}C\ P = D$ akan berguna sekali apabila matriks D dapat di diagonalkan di mana elemen-elemen diagonalnya akar-akar karakteristik dari C.

Dalam hal ini system baru (5) mempunyai variabel-variabel terpisah,

$$\frac{dU_j}{dt} = \lambda_i\ U_i \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots n \text{ di mana}$$

$\lambda_i$ akar-akar karakteristik dari C, sehingga mudah diselesaikan. Kemudian fungsi $y_j$ di dapat dari rumus $Y = P\ U$.

5.2. Contoh-contoh Penyelesaian.

Contoh : I. Selesaikan system persamaan :

$$\frac{dy_1}{dt} + 2\frac{dy_2}{dt} = y_1 - 4y_2$$

$$\frac{dy_1}{dt} - 3\frac{dy_2}{dt} = 2y_1 + 6y_2$$

Penyelesaian :

Dengan bentuk matriks, system ini dapat ditulis sebagai :

$A\,Y' = B\,Y$ di mana,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} \quad a_{11} = -3 \quad a_{12} = -2 \quad a_{21} = -2 \quad a_{22} = 1 \quad A^* = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -3 - 4 = -7$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \begin{bmatrix} 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & -1/7 \end{bmatrix}$$

$$C = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & -1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriks C ini mempunyai akar-akar karakteristik yang berbe da yaitu $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -2$

jadi ada matriks non singulair $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

sehingga $P^{-1}C\,P = D$

di mana $D = \text{diagonal}\,(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$



untuk menentukan P kita dapat menuliskan $C\,P = P\,D$, atau :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ d & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan matriks-matriks itu kita dapatkan bahwa persamaan ini dipenuhi oleh skalar a, b, c dan d.

Dengan memperkalikan matriks-matriks itu dan mengingat kesamaan dua matriks kita dapatkan

$a = a,\ b = 0,\ c = 0,\ -2d = -2d$

jika kita ambil $a = 1$, $d = 1$ kita peroleh :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

selanjutnya :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dU_1}{dt} \\ \dfrac{dU_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ -2U_2 \end{bmatrix}$$

dari $\dfrac{dU_1}{dt} = U_1$ dan $\dfrac{dU_2}{dt} = -2U_2$ kita memperoleh,

$$U_1 = c_1\, e^t \quad \text{dan} \quad U_2 = c_2\, \bar{e}^t$$

dari $Y = P\,U$ maka

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\, e^t \\ c_2\, e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\, e^t \\ c_2\, e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Dari persamaan di atas didapat penyelesaian umum dari persamaan differensial itu ialah :

$$y_1 = c_1\, e^t$$

$$y_2 = c_2\, e^{-2t}$$

Contoh : II

Selesaikan system persamaan :

$$2\frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_3}{dt} = 4y_1 + 3y_3$$

$$3\frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} + 2\frac{dy_3}{dt} = 6y_1 + 2y_2 + 5y_3$$

$$-2\frac{dy_1}{dt} + 3\frac{dy_2}{dt} + \frac{dy_3}{dt} = -5y_1 + 4y_2 - 2y_3$$

Dengan bentuk matriks, system ini dapat ditulis sebagai :

$A\,Y' = B\,Y$ di mana

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \\ -5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2 + 0 + 9 + 2 - 12 + 0 = \text{[illegible]}$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -7 & 4 & -1 \\ 11 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = A^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -7 & 4 & -1 \\ 11 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \\ -5 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|C - \lambda I| = 0 \quad (\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda + 1) + 8 + 4(\lambda - 4) + 4(\lambda - 3)$$

$$-(\lambda + 1).2 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda + 1) + 6\lambda - 18 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1$ adalah akar-akar karakteristik -

dari C, jadi ada matriks non singulair

$$P = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Sehingga $P^{-1} C\ P = D$

di mana $D = \text{diagonal}\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Untuk menentukan matriks P kita dapat menuliskan C P = P D

atau : $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

dengan memperkalikan matriks-matriks itu, dan dengan mengingat kesamaan dua matriks kita dapat bahwa persamaan itu dipenuhi oleh :

$$\begin{aligned}
3a + 2d + 2g &= 3a \longrightarrow 2d + 2g = 0 \\
3b + 2e + 2h &= 2b \longrightarrow b + 2e + 2h = 0 \\
3c + 2f + 2i &= c \longrightarrow 2c + 2f + 2i = 0 \\
a + 4d + g &= 3d \longrightarrow a + d + g = 0 \\
b + 4e + h &= 2e \longrightarrow b + 2e + h = 0 \\
c + 4f + i &= f \longrightarrow c + 3f + i = 0 \\
-2a - 4d - g &= 3g \longrightarrow -2a - 4d - 4g = 0 \\
-2b - 4e - g &= 2h \longrightarrow -2b - 4e - 3h = 0 \\
-2c - 4f - i &= 1 \longrightarrow -2c - 4f - 2i = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 4a + 4d + 4g = 0 \\ \underline{-2a - 4d - 4g = 0} \ + \\ 2a = 0 \end{array} \qquad a = 0$$

$$\begin{array}{l} 2d + 2g = 0 \\ -2d - 2g = 0 \end{array}$$

Misal $g=1$, maka $d = -1$

$$\begin{array}{l} b + 2e + 2h = 0 \\ \underline{b + 2e + h = 0} \ - \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2b + 4e + 2h = 0 \\ -2h - 4e = 0 \end{array}$$

$b = -2e$, misal $e=1$, maka $b = -2$

$h = 0$

$$2c + 2f + 2i = 0$$
$$\underline{-2c - 4f - 2i = 0} \; +$$
$$-2f = 0 \qquad f = 0$$

$-2c - 4f - 2i = 0 \qquad f = 0$

$i = -c$, misal $c=1$, maka $i = -1$

Jadi kita peroleh :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dari $U' = D\,U$ atau :

$$\begin{bmatrix} \frac{dU_1}{dt} \\ \frac{dU_2}{dt} \\ \frac{dU_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3U_1 \\ 2U_2 \\ 3U_3 \end{bmatrix}$$

diperoleh : $U_1 = c_1 e^{3t}$

$U_2 = c_2 e^{2t}$

$U_3 = c_3 e^{t}$

Jadi penyelesaian umum persamaan differensial itu adalah :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{t} \end{bmatrix}$$

atau : $Y_1 = -2c_2 e^{2t} + c_3 e^{t}$

$Y_2 = -c_1 e^{3t}$

$Y_3 = c_1 e^{3t} - c_3 e^{t}$

Contoh III

Selesaiakan sistim :

$$\frac{dy_1}{dt} + 2\frac{dy_2}{dt} + 3\frac{dy_3}{dt} = y_1 - 3y_2 + 2y_3.$$

$$\frac{dy_1}{dt} + 3\frac{dy_2}{dt} + 4\frac{dy_3}{dt} = y_1 - 4y_2 + 3y_3.$$

$$\frac{dy_1}{dt} + 4\frac{dy_2}{dt} + 3\frac{dy_3}{dt} = y_1 - 3y_2 + 4y_3.$$

Penyelesaian :

Dalam bentuk matriks sistim ditulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \frac{dy_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

atau : $Ay^1 = BY$

$y^1 = A^{-1}By$

$= Cy$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \begin{bmatrix} 7/2 & -3 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$C = A^{-1}B$

$$C = \begin{bmatrix} 7/2 & -3 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left| C - \lambda I \right| = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) + (1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2) + (1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda + i)(\lambda - i) = 0$$

Matriks C ini mempunyai akar-akar karakteristik yang berbeda

$\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = i$ dan $\lambda_3 = -i$

Jadi ada matriks tak singulair P sedemikian hingga :

$$P^{-1}CP = D$$

di mana $D = \text{Diagonal}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan matriks P kita dapat menuliskan CP = PD

atau :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$



Dengan memperkalikan matriks-matriks itu dan dengan mengingat kesamaan dua matriks kita dapat bahwa persamaan itu dipenuhi oleh $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$; $d = 0$; $e = -i$; $f = i$; $g = 0$; $h = 0$ dan $k = 1$/

Jadi kita peroleh matriks P atau :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari U' = DU atau

$$\begin{bmatrix} \frac{dU_1}{dt} \\ \frac{dU_2}{dt} \\ \frac{dU_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ iU_2 \\ -iU_3 \end{bmatrix}$$

kita peroleh : $U_1 = C_1 e^t$

$$U_2 = C_2 e^{it}$$

$$U_3 = C_3 e^{-it}$$

Jadi penyelesaian umum persamaan differensial itu adalah :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{it} \\ C_3 e^{-it} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 e^t \\ -iC_2 e^{it} + C_3 i e^{-it} \\ C_2 e^{it} + C_3 e^{-it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e^t \\ k_2 \cos t + k_3 \sin t \\ k_3 \cos t - k_2 \sin t \end{bmatrix}$$

atau :

$$y_1 = k_1 e^t$$

$$y_2 = k_2 \cos t + k_3 \sin t$$

$$y_3 = k_3 \cos t - k_2 \sin t.$$

5.3. B e n t u k.

Teorema :

Ambil A sebagai matriks konstant ( n x n) dan B vektor demensi n.

Kemudian problema nilai awalnya.

$$Y'(t) = A\,Y(t)$$

$$Y\ 90) = B$$

mempunyai penyelesaian pada interval $-\infty < t < \infty$

Penyelesaian ini diberikan oleh Rumus :

$$Y\ (t) = e^{tA}.B$$

Lebih umum lagi, penyelesaian khusus dari persamaan nilai awal problem di atas yaitu :

$$Y'\ (t) = A\ Y\ (t)$$

$$Y\ (a) = B$$

maka : $Y\ (t) = e^{(t-a)A}.B$

juga memberikan rumus yang explisit untuk menyelesaikan system homogen dengan koeffisien konstant di mana masih di pergunakan cara perhitungan exponensial $e^{tA}$ yang biasa, jika kita akan menghitung $e^{tA}$ langsung dengan deret kita harus menghitung unsur $A^k$ untuk $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$ kemudian menghitung jumlah dari tiap deret :

$\sum_{k=0}^{\infty} t^k C_{ij}^{(k)} / k!$, $C_{ij}^{(k)}$ di mana ij sejalan dengan $A^k$.

Pada umumnya penyelesaian tersebut tidak bisa diselesaikan kecuali matriks A dengan unsur-unsurnya sudah diketahui, sebagai contoh : jika A adalah matriks diagonal, katakanlah

$$A = \text{diagonal}\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_n)$$

maka tiap unsur dari A adalah unsur dari matriks diagonal. Pada kenyataannya $A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots\ldots \lambda_n^k)$ oleh karena itu pada persoalan ini, $e^{tA}$ adalah diagonal matriks diberikan oleh $e^{tA}$

$$= \text{diag}\ \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k} \lambda_1^k \ldots\ldots\ldots \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k'} \lambda_n^k \right)$$

$$= \text{diag}\ (e^{t\lambda_1} \ldots\ldots\ldots\ldots e^{t\lambda_n})$$

Cara lain yang lebih mudah untuk menyelesaikan persoalan ini, adalah jika A matriks yang dapat di diagonalkan, sebagai contoh : jika terdapat matriks non singulair C sedemikian sehingga $C^{-1}AC$ adalah matriks diagonal, katakanlah $C^{-1}AC = D$

dari hal mana kita dapat menemukan :

$$A^2 = (CDC^{-1})(CDC^{-1}) = CD^2C^{-1})$$

dan secara umum $A^k = C D^k C^{-1}$

oleh karena itu dengan persoalan ini kita dapatkan :

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k'} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k'} C D^k C^{-1} = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k'} C^{-1}$$

$$= C e^{tD} C^{-1}$$



Di sini kesulitan terletak pada pengoperasian C dan inversnya sekali hal ini sudah didapat $e^{tA}$ akan mudah dihitung.

Sudah barang tentu tidak setiap matriks dapat di diagonalkan jadi penggunaan deffinisi di atas adalah terbatas.

Contoh : I.

Hitung $e^{tA}$ dari matriks A(2 x 2) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

Dari matriks A ini didapatkan harga karakteristik :

$$\lambda_1 = 6 \; ; \; \lambda_2 = 1$$

terdapat matriks non singulair $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sehingga

$C^{-1} A\, C = D$, di mana $D = \text{diagonal}\ (\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

untuk menentukan C, kita dapat menuliskan A C = C D

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan memperkalikan matriks-matriks itu, kita dapatkan bahwa persamaan ini dipenuhi oleh skalar a, b, c, d. dengan $a = 4c$, $b = -d$. ambil $c = d = 1$, kita peroleh :

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C^{-1} = 1/5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

selanjutnya :

$$e^{tA} = C\, e^{tD}\, C^{-1} = 1/5 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 1/5 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{6t} & e^{6t} \\ -e^{t} & 4e^{t} \end{bmatrix}$$

$$= 1/5 \begin{bmatrix} 4e^{6t} + e^{t} & 4e^{6t} - 4e^{t} \\ e^{6t} - e^{t} & e^{6t} + 4e^{t} \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = 1/5 \left[ (4e^{6t} + e^{t})(e^{6t} + 4e^{t}) - (4e^{6t} - 4e^{t})(e^{6t} - e^{t}) \right]$$

$$= \frac{3\ e^{7t}}{5}$$

Contoh : II

Selesaikan system persamaan linier :

$$y_1' = 5\ y_1 + 4y_2$$

$$y_2' = y_1 + 2y_2$$

dengan syarat $y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 3.$

<u>Penyelesaian</u> :

Dengan bentuk matriks, system di atas dapat ditulis sebagai :

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = A\ y(t)$$

$$y\ (0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{dan } A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

dengan memakai rumus :

$$y\ (t) = e^{tA}\ y\ (0)$$

di mana $e^{tA}$ sudah dihitung pada soal No. 1 yaitu :

$$e^{tA} = 1/5 \begin{bmatrix} 4e^{6t} + e^{t} & 4e^{6t} - 4e^{t} \\ e^{6t} - e^{t} & e^{6t} + 4e^{t} \end{bmatrix}$$



di dapatkan : $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 1/5 \begin{bmatrix} 4e^{t} + e^{t} & 4e^{6t} - 4e^{t} \\ e^{6t} - e^{t} & e^{6t} + e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$y_1 = 4e^{6t} - 2e^{t}$$

$$y_2 = e^{6t} + 2e^{t}$$

Contoh : III

Selesaikan system persamaan linier

$$y'_1 = 5y_1 + 4y_2$$

$$y'_2 = y_1 + 2y_2$$

$$y'_3 = y_1 + 2y_2 + 2y_3$$

di mana syaratnya : $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 3$

Penyelesaian :

$$y'(t) = A\, y(t) \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{dan } A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

dari matriks A ini didapat harga karakteristik

$$|A - \quad I| = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) - 4(2-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)(10 - 7\lambda + \lambda^2 - 4) = (2-\lambda)(1-\lambda)(6-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 1$$

Kita dapatkan matriks non singulair

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$



sehingga $C^{-1}AC = D$

di mana $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

untuk menentukan matriks C kita dapat menulis

$$A\ C = C\ D \text{ atau}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan memperkalikan matriks-matriks itu dan dengan mengingat kesamaan dua matriks kita dapatkan bahwa persamaan itu dipenuhi

$a = 0$, $b = 4$, $c = 1$, $d = 0$, $e = 1$, $f = -1$, $g = 1$, $h = 3/2$

$i = 1$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \left| C \right| = -4 - 1 = -5$$

$C_{11} = 5/2$ $\qquad C_{21} = -5/2$ $\qquad C_{31} = -5$

$C_{12} = -1$ $\qquad C_{22} = -1$ $\qquad C_{32} = 0$

$C_{13} = -1$ $\qquad C_{23} = 4$ $\qquad C_{33} = 0$

$$C^* = \begin{bmatrix} -5/2 & -5/2 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = 1/5 \begin{bmatrix} -5/2 & 5/2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & -4/5 & 0 \end{bmatrix}$$



selanjutnya :

$$e^{tA} = C\, e^{tD}\, C^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{6t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & -4/5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2\, e^{2t} & 1/2\, e^{2t} & e^{2t} \\ 1/5\, e^{6t} & 1/5\, e^{6t} & 0 \\ -1/5\, e^{t} & -4/5\, e^{t} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (4/5\, e^{6t} + 1/5\, e^{t}) & (4/5\, e^{6t} - 4/5\, e^{t}) & 0 \\ (1/5\, e^{6t} - 1/5\, e^{t}) & (1/5\, e^{6t} + 4/5\, e^{t}) & 0 \\ (-1/2\, e^{2t} + 3/10 e^{6t} + 1/5 e^{t}) & (1/2 e^{2t} + 3/10 e^{6t} - 4/5 e^{t}) & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Di dapatkan :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4/5\, e^{6t} + 1/5\, e^{t}) & (4/5\, e^{6t} - 4/5\, e^{t}) & 0 \\ (1/5\, e^{6t} - 1/5\, e^{t}) & (1/5\, e^{6t} + 4/5\, e^{t}) & 0 \\ (-1/2 e^{2t} + 3/10 e^{6t} + 1/5 e^{t}) & (1/2 e^{2t} + 3/10 e^{6t} - 4/5 e^{t}) & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 4/5\, e^{6t} + 1/5\, e^{t} + 8/5\, e^{6t} - 8/5\, e^{t} = 12/5\, e^{6t} - 7/5\, e^{t}$$

$$y_2 = 1/5\, e^{6t} - 1/5\, e^{t} + 2/5\, e^{6t} + 8/5\, e^{t} = 3/5\, e^{6t} + 7/5\, e^{t}$$

$$y_3 = -1/2\, e^{2t} + 3/10\, e^{6t} + 1/5\, e^{t} + e^{2t} + 3/5\, e^{6t} - 8/5\, e^{t} + 3\, e^{2t}$$

$$= 7/2\, e^{2t} + 5/10\, e^{6t} - 7/5\, e^{t}$$