II. PERSAMAAN KARAKTERISTIK DARI MATRIKS

Persamaan Karakteristik dari Matriks

Matriks bujur sangkar $A = (a_{ij})$ bertype n, apabila dapat ditemukan vektor $\bar{X}$ sedemikian hingga $A\bar{X} = \lambda \bar{X}$ di mana λ = ska - lar, maka $\bar{X}$ disebut vektor karakteristik.

Vektor-vektor ditulis sebagai vektor-vektor kolom.

dari :

$$A\bar{X} = \lambda \bar{X}$$

$$A\bar{X} = \lambda I\bar{X}$$

$$A\bar{X} = \lambda I\bar{X} = \bar{0}$$

$$(A - \lambda I)\bar{X} = \bar{0}$$

X harus memenuhi system persamaan linier homogen maka $\bar{X} \neq \bar{0}$

jadi $|A - \lambda I| = 0$.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{11} & a_{n1} & \cdots\cdots & a_{1n} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} (a_n - \lambda) & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & (a_{22} - \lambda) & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & (a_{nn} - \lambda) \end{bmatrix} = 0$$

persamaan karakteristik matriks A adalah :

$$\left| A - \lambda I \right| = f(\lambda) = 0$$

dengan harga $f(\lambda) = 0$, maka dapat kita cari :

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_n.$$

di mana λ_1, λ_2, $\lambda_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_n$ adalah akar-akar karakteristik.

Setiap matriks bujur sangkar memenuhi persamaan karakteristiknya, dengan lambang apabila $f(\lambda)$ polinomial karakteristik dari matriks A maka $f(A) = 0$ dapat dipakai untuk mencari matriks invers.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan persamaan karakteristik dan akar-akar karakteristik tersebut.

Penyelesaian :

$$\left| A - \lambda I_3 \right| = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2 - \lambda) & 1 & -1 \\ 0 & (-2 - \lambda) & -2 \\ 1 & 1 & (-\lambda) \end{bmatrix} = 0$$

Persamaan karakteristik :

$$(2 - \lambda)\ (-2 - \lambda)\ (-\lambda)\ -2 + 0 + (-2 - \lambda) + 2(2 - \lambda) = 0$$

$$(2 - \lambda)(-2 - \lambda)(-\lambda) - 2 - 2 - \lambda - \lambda + 4 - 2\lambda = 0$$

$$-\lambda(2 - \lambda)(-2 - \lambda) - 3\lambda = 0$$

$$\lambda\{(2 - \lambda)(2 - \lambda) - 3\} = 0$$

$$\lambda(4 - \lambda^2 - 3) = 0$$

$$\lambda(1 - \lambda^2) = 0$$

jadi $\lambda(1 - \lambda)(1 + \lambda) = 0$

terdapat $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -1$