PENDAHULUAN

Dalam tulisan ini akan ditunjukkan salah satu cara munculnya MATRIKS SIMILAR dari usaha mencari jawab system persamaan differensial dan sekaligus ditunjukkan bahwa ALJABAR LINIER dan PERSAMAAN DEFFERENSIAL sama sekali tidak sepenuhnya bebas. Tulisan ini diawali dengan mengingat kembali beberapa konsep dalam aljabar linier, yaitu dari bentuk matriks yang paling sederhana, operasi matrik, pengertian matrik Invers, matriks Ajoint, harga karakteristik (Eugen Value) dan kesebentukan matriks similar.
Hal ini kami maksudkan agar bisa dimengerti mulai dari awal sampai penggunaannya dalam penyelesaian.

Persamaan defferensial yang dapat diselesaikan dengan cara-cara elementer ternyata hanyalah sebagian kecil saja. Dari buku-buku yang pernah kami pelajari membuktikan bahwa sangat sukar untuk memperoleh teori yang agak umum mengenai jawab jawab dari persamaan defferensial, kecuali untuk beberapa type tertentu misalnya Persamaan Differensial lineer tingkat satu hanya bisa diselesaikan dengan cara Bernoulli, cara Lagrange, cara Faktor Integrasi, dan persamaan differensial linear yang terdapat dalam berbagai-bagai persoalan ilmu pengetahuan.
Bahkan tidak mungkin menemukan cara-cara untuk menyelesaikan semua persamaan differensial.
Metode umum yang diperoleh mengenai jawab-jawab dari persamaan differensial tidak selalu merupakan cara yang paling mudah untuk dipakai pada hal-hal istimewa.

I. BEBERAPA KONSEP DASAR

1.1. P E N G E R T I A N

1.1.1. Matriks Umum.

Matriks adalah : tabel bilangan dan pada umumnya berbentuk empat persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom.

Contoh :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matriks tersebut di atas dinamakan matriks bertype - $m \times n$ untuk matriks di atas kadang-kadang dipakai notasi $A = (a_{ij})$

di mana $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots n$

jika $m = n$ (jumlah kolom = jumlah baris) maka matriks tersebut dinamakan matriks bujur sangkar bertype n

di dalam matriks bujur sangkar elemen-elemen a_{11}, a_{22}, a_{33} .... a_{nn} dinamakan elemen-elemen diagonal.

1.1.2. Matriks sama.

Matriks A sama dengan matriks B dan ditulis A = B bila dan hanya bila $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan setiap j.

1.1.3. Matriks Jumlahan.

Matriks $A = a_{ij}$ dan matriks $B = (b_{ij})$ dapat dijumlahkan/dikurangkan bila dan hanya bia dua matriks A dan matriks B masing-masing bertype m x n.

$A \pm B$ kita definisikan sebagai matriks $C = (c_{ij})$ yang bertype m x n di mana setiap elemen C adalah jumlah/selisih dari matriks A dan matriks B.

Jadi $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$

Untuk penjumalah matriks berlaku hukum-hukum :

- Komulatif : $A + B = B + A$
- Assosiatif : $(A + B) + C = A + (B + C)$

$= A + B + C.$

1.2. PERGANDAAN

1.2.1. Pergandaan dengan skalar ($= \lambda$)

Pergandaan matriks A dengan skalar λ dan ditulis λA adalah bila dan hanya bila setiap elemen-elemen dari matriks A digandakan dengan skalar λ .

$$A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \cdots\cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \cdots\cdots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \cdots\cdots & \lambda a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \cdots\cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2.2. Pergandaan dua matriks.

Pergandaan dua matriks A dan matriks B yang kita tulis A.B bila dan hanya bila matriks A bertype m x p dan matriks B bertype p x n.

Hasil ganda matriks A dan matriks B tersebut kita definisikan matriks C, maka matriks C bertype m x n adapun elemen-elemen matriks C adalah :

$$C_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} \ldots\ldots\ldots + a_{ip}\, b_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

di mana $i = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots\ldots m$; $j = 1, 2, 3 \ldots n$

<u>Contoh</u> :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots\ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots\ldots & a_{mp} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots\ldots\ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots\ldots\ldots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \ldots\ldots\ldots & b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \ldots\ldots\ldots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$A \times B = C$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$(m \times p) \qquad (p \times n) \qquad (m \times n)$$

di mana

$$c_{11} = (a_{11})\ (b_{11}) + (a_{12})\ (b_{21}) \ldots\ldots\ldots + (a_{1p})\ (b_{p1})$$

$$c_{12} = (c_{12})\ (b_{12}) + (a_{12})\ (b_{22}) \ldots\ldots\ldots + (a_{1p})\ (b_{p2})$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots$$

$$c_{1n} = (a_{11})\ (b_{1n}) + (a_{12})\ (b_{2n}) \ldots\ldots\ldots + (a_{1p})\ (b_{pn})$$

$$c_{m1} = (a_{m1})\ (b_{11}) + (a_{m2})\ (b_{21}) \ldots\ldots\ldots\ (a_{mp})\ (b_{p1})$$

$$c_{m2} = (a_{m1})\ (b_{12}) + (a_{m2})\ (b_{22}) \ldots\ldots\ldots\ (a_{mp})\ (b_{p2})$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots$$

$$c_{mn} = (a_{m1})\ (b_{1n}) + (a_{m2})\ (b_{2n}) \ldots\ldots\ldots\ (a_{mp})\ (b_{pn})$$

untuk pergandaan matriks berlaku hukum-hukum :

- Hukum Assosiatif : $(A.B)C = A(B.C) = A\ B\ C$
- Hukum Dictributif : $A(B+C) = A\ B + A\ C$

Tetapi pada umumnya pergandaan matriks tidak berlaku hukum komutatif sebab untuk pergandaan dua matriks A dan matriks B maka A.B tidak pasti sama dengan B.A.

1.3. BEBERAPA JENIS MATRIKS

1.3.1. Matriks Diagonal.

Suatu matriks bujur sangkar $A = (a_{ij})$ dikatakan matriks diagonal bila dan hanya bila elemen-elemen : $a_{ij} = 0$ untuk setiap $i \neq j$ notasi untuk matriks diagonal adalah :

$$D = \text{diag}\ (a_{ii}, a_{22}, a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{mn})$$

Contoh :

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ .. & .. & & .. \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.3.2. Matriks Segitiga.

Suatu matriks bujur sangkar $A = (a_{IJ})$ disebut matriks segitiga apabila elemen-elemen di bawah / diatas diagonal semuanya sama dengan nol (= 0).

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \ldots\ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$ atau

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots\ldots\ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \ldots\ldots\ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & & b_{mn} \end{bmatrix}$$

1.3.3. Matriks Satuan.

Matriks bujur sangkar $A = (a_{ij})$ disebut matriks satuan bila hanya bila matriks bujur sangkar tersebut adalah matriks diagonal dengan elemen-elemen diagonal semuanya sama dengan satu (= 1).

Contoh :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

1.3.4. Matriks Non Singulair.

Matriks $A = (a_{ij})$ yang berjenis $n \times n$ dinamakan matriks NON SINGULAIR jika ada matriks B yang bersifat $A.B = B.A = I$, B disebut INVERS dari A ditulis dengan A^{-1}

Jika matriks A tidak Non Singulair, maka matriks A dinamakan matriks SINGULAIR, artinya tak ada matriks B yang bersifat $A.B = I$ atau $B.A = I$.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Singulair/non singulair.}$$

$$(A/I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[b_2 - 2b_3]{b_1 - b_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -8 & -3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Seterusnya dengan operasi baris/kolom ketemu :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/14 & 1/14 & 5/14 \\ 0 & 1 & 0 & 4/7 & -1/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & 4/7 & 1/7 \end{array}\right]$$

Matriks invers dari A dapat ditentukan dengan melakukan sejumlah operasi baris elementer pada (A/I), sehingga didapat bentuk (I/B) apabila hal ini dapat dilakukan maka invers dari A = B dan A adalah matriks Non Singulair.

Apabila hal ini tak dapat dilakukan maka A matriks Singulair.

1.3.5. Matriks Transpose.

Suatu matriks $A = (a_{ij})$ disebut matriks Transfose bila dan hanya bila matriks tersebut dirubah dari baris ke i menjadi kolom ke i untuk setiap i dan diberi notasi $A^{1=A}$

atau $A = (a_{ij})$ dan $A^1 = (a_{ij})$.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ a \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

maka :

$$A^1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots\cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

<u>Catatan</u> :

- A dan A^1 saling transfose

- bila $C = A + B$ maka $C^1 = A^1 + B^1 = B^1 + A^1$
- bila $D = A.B$ maka $D^1 = (A.B)^1 = B^1 + A^1 \neq A^1.B^1$
- $(A_1, A_2, A_3, \ldots A_n)^1 = A_n^1, A_{n-1}^1, A_{n-2}^1 \ldots\ldots A_1^1$

1.3.6. Matriks Simetris.

Matriks bujur sangkar $A = (A_{ij})$ disebut matriks simetris bila hanya bila elemen-elemen matriks tersebut simetris dengan diagonal utamanya.

Atau $A = A^1$ dan A^1 = matriks tranfose dari A.

1.3.7. Matriks Uniter.

Matriks bujur sangkar $A = (a_{ij})$ disebut matriks Uniter bila hanya bila elemen-elemennya bilangan kompleks.

di mana $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

keterangan : A^{-I} = matriks invers dari A.

1.3.8. Matriks Ajoint.

Matriks Ajoint adalah matriks bujur sangkar bertype n bila hanya bila A_{ij} sebagai kofaktor dari a_{ij} dan diberi lambang = A^*

Contoh :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}A_{13} & \ldots\ldots\ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}A_{23} & \ldots\ldots\ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2}A_{n3} & \ldots\ldots\ldots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

kita dapatkan :

$$A \cdot A^* = \triangle I_n = A^* \cdot A$$

di mana $\triangle = |A|$

1.3.9. Matriks Invers.

Suatu matriks bujur sangkar $A = (a_{ij})$ yang memenuhi hubungan $A \cdot B = B \cdot A = I$ maka matriks tersebut di sebut invers dari A dan ditulis $B = A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

Catatan :

- A^{-1} tidak sama dengan $\frac{1}{A}$

  A^{-1} tidak sama dengan $\frac{I_n}{A}$

- matriks A mempunyai invers jika dipenuhi, matriks A bujur sangkar jika $A \neq 0$
- jika suatu matriks tak mempunyai invers maka ma - triks tersebut singulair.
- jika suatu matriks mempunyai invers maka matriks tersebut matriks non singulair.

Contoh :

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan apakah matriks A mempunyai invers ?

Jika mempunyai, hitung invers dari A ($= A^{-1}$)

Penyelesaian :

$$* \; |A| = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{aligned} &= 8 + 3 + 8 - 12 - 2 - 8 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Jadi $A \neq 0$, A mempunyai invers.

$A_{11} = 2 - 2 = 0$

$A_{12} = -(4 - 1) = 3$

$A_{13} = (4 - 1) = 3$

$A_{22} = (8 - 2) = 6$

$A_{23} = -(8 - 3) = -5$

$A_{31} = (3 - 2) = 1$

$A_{32} = -(8 - 2) = -6$

$A_{33} = (4 - 6) = -2$

$$A^{*} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -6 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{A^{*}}{|A|} = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 5/2 & 2/3 \end{bmatrix}$$