III. P E N A K S I R A N S E L A N G .

III.1. Penaksiran selang β_i dan σ^2.

Diketahui e $\sim \mathcal{N}$ (0,σ^2I). Karena (n - p) ($\frac{\overset{***}{\sigma^2}}{\sigma^2}$) = u berdistribusi $\chi^2_{(n-p)}$, maka suatu selang kepercayaan / interval konfidensi dari σ^2 dapat ditentukan sebagai berikut :

Misalkan α_o dan α_1 konstanta sehingga :

$$P \left(\alpha_o \leq \frac{\overset{***}{\sigma^2} (n - p)}{\sigma^2} \leq \alpha_1 \right) = 1 - \alpha$$

dimana : 1 - α = koefisien interval konfidensi.

Dengan manipulasi aljabar :

$$\alpha_o \leq \frac{\overset{***}{\sigma^2} (n-p)}{\sigma^2} \leq \alpha_1$$

$$\frac{\alpha_o}{\overset{***}{\sigma^2} (n-p)} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{\alpha_1}{\overset{***}{\sigma^2} (n-p)}$$

$$\frac{\overset{***}{\sigma^2} (n-p)}{\alpha_o} \geq \sigma^2 \geq \frac{\overset{***}{\sigma^2} (n-p)}{\alpha_1}$$

$$\frac{\overset{***}{\sigma^2} (n-p)}{\alpha_1} \leq \sigma^2 \leq \frac{\overset{***}{\sigma^2} (n-p)}{\alpha_o}$$

Didapat : $P \left(\frac{\overset{***}{\sigma^2}(n-p)}{\alpha_1} \leq \sigma^2 \leq \frac{\overset{***}{\sigma^2}(n-p)}{\alpha_o} \right) = 1 - \alpha$

Maka interval konfidensi dari σ^2 adalah :

$$\frac{\overset{***}{\sigma^2}\ (n-p)}{\alpha_1} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{\overset{***}{\sigma^2}\ (n-p)}{\alpha_0}$$

Lebar interval konfidensi tersebut adalah :

$$\frac{\overset{***}{\sigma^2}\ (n-p)}{\alpha_0} - \frac{\overset{***}{\sigma^2}\ (n-p)}{\alpha_1} = \overset{***}{\sigma^2}\ (n-p)\ (1/\alpha_0 - 1/\alpha_1)\ .$$

Untuk menentukan interval konfidensi dari β_i , digunakan fakta bahwa $\overset{*}{\beta}_i$ berdistribusi $\mathcal{N}(\beta_i, c_{ii}\sigma^2)$, dimana : c_{ij} adalah elemen ke ij dari matriks : $C = S^{-1}$.

Karena : $\dfrac{(\overset{*}{\beta}_i - \beta_i)}{\sigma\sqrt{c_{ii}}}$ berdistribusi $\mathcal{N}(0,1)$

dan bebas dengan $\dfrac{(n-p)\overset{***}{\sigma^2}}{\sigma^2}$ yang berdistribusikan

menurut $\chi^2_{(n-p)}$,

maka :

$$\frac{\overset{*}{\beta}_i - \beta_i}{\sigma\sqrt{c_{ii}}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{\overset{***}{\sigma^2}}} = \frac{\overset{*}{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\overset{***}{\sigma^2}\ c_{ii}}}$$

didistribusikan menurut distribusi $t_{(n-p)}$.

Jadi: $P\left(-t_{\alpha/2} \leq \frac{\overset{*}{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\overset{***}{\sigma^2}\, c_{ii}}} \leq t_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$

Dengan manipulasi aljabar :

$$-t_{\alpha/2} \leq \frac{\overset{*}{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\overset{***}{\sigma^2}\, c_{ii}}} \leq t_{\alpha/2}$$

$$-t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}\,\overset{***}{\sigma^2}} \leq \overset{*}{\beta}_i - \beta_i \leq t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}\,\overset{***}{\sigma^2}}$$

$$-\overset{*}{\beta}_i - t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}\,\overset{***}{\sigma^2}} \leq -\beta_i \leq -\overset{*}{\beta}_i + t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}\,\overset{***}{\sigma^2}}$$

$$\overset{*}{\beta}_i + t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}\,\overset{***}{\sigma^2}} \geq \beta_i \geq \overset{*}{\beta}_i - t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}\,\overset{***}{\sigma^2}}$$

$$\overset{*}{\beta}_i - t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}\,\overset{***}{\sigma^2}} \leq \beta_i \leq \overset{*}{\beta}_i + t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}\,\overset{***}{\sigma^2}}$$

didapat :

$$P\left(\overset{*}{\beta}_i - t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}\,\overset{***}{\sigma^2}} \leq \beta_i \leq \overset{*}{\beta}_i + t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}\,\overset{***}{\sigma^2}} \right) = 1-\alpha$$

Maka interval konfidensi dari β_i adalah :

$$\boxed{\overset{*}{\beta}_i - t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}\,\overset{***}{\sigma^2}} \leq \beta_i \leq \overset{*}{\beta}_i + t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}\,\overset{***}{\sigma^2}}} \quad \text{....III.1.1.}$$

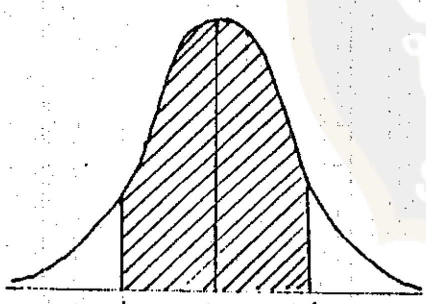
Lebar interval konfidensi tersebut adalah :

$$\overset{*}{\beta}_i + t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}^{***}\sigma^2} - (\overset{*}{\beta}_i - t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}^{***}\sigma^2}) =$$

$$\overset{*}{\beta}_i + t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}^{***}\sigma^2} - \overset{*}{\beta}_i + t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}^{***}\sigma^2} =$$

$$2\ t_{\alpha/2}\sqrt{c_{ii}^{***}\sigma^2} .$$

Karena tabel ditribusi t bentuknya kumulatif maka perlu mencari $t_{\alpha/2}$ adalah sebagai berikut :



Menentukan $t_{\alpha/2}$ supaya luas yang diarsir = 0,95.

Dari grafik dapat dilihat bahwa luas ujung kanan dan luas ujung kiri = 1 - 0,95 = 0,05 . Kedua ujung ini sama luasnya, jadi luas ujung kanan, mulai dari $t_{\alpha/2}$ kekanan=0,025. Mulai dari $t_{\alpha/2}$ kekiri luasnya = 1 - 0,025 = 0,975 .

Harga p inilah yang dipakai untuk daftar.

III.2. Contoh soal.

Misalkan kita inginkan interval konfidensi 95% untuk β_1 dalam model : $Y = \beta_1 + \beta_2 X + e$.

Kita anggap bahwa 9 pengamatan dibuat dan berikut ini telah dihitung :

$$S = X'X = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 18 \end{bmatrix} . \qquad X'Y = \begin{bmatrix} 21 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$Y'Y = 54 \quad ; \quad n = 9 \quad ; \quad p = 2 .$$

$$C = S^{-1} = \frac{1}{(9)(18) - (12)(12)} \begin{bmatrix} 18 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C = 1/18 \begin{bmatrix} 18 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,67 \\ -0,67 & 0,5 \end{bmatrix}$$

II.1.1. $\overset{*}{\beta} = S^{-1} X' Y = \begin{bmatrix} 1 & -0,67 \\ -0,67 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -0,5 \end{bmatrix}$

$$\overset{*}{\beta} = \begin{bmatrix} \overset{*}{\beta}_1 \\ \overset{*}{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

$$\overset{*}{\beta}' X' Y = \begin{bmatrix} 3 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 27 \end{bmatrix} = 49,5$$

II.1.2. $\overset{***}{\sigma}{}^2 = \frac{1}{n - p} (Y'Y - \overset{*}{\beta}' X' Y) = 1/7(54-49,5) = 0,64$.

Untuk menentukan interval konfidensi dari β_1 , digunakan rumus :

$$\text{III.1.1.} \quad \overset{*}{\beta}_1 - t_{\alpha/2} \sqrt{c_{11} \overset{***}{\sigma^2}} \leqslant \beta_1 \leqslant \overset{*}{\beta}_1 + t_{\alpha/2} \sqrt{c_{11} \overset{***}{\sigma^2}}$$

Karena $t_{\alpha/2} = 2,4$ maka :

$$t_{\alpha/2} \sqrt{c_{11} \overset{***}{\sigma^2}} = (2,4) \sqrt{(1)(0,64)} = 1,9$$

Sehingga : $3 - 1,9 \leqslant \beta_1 \leqslant 3 + 1,9$

atau : $1,1 \leqslant \beta_1 \leqslant 4,9$

Persamaan probabilitasnya adalah :

$P\ (1,1 \leqslant \beta_1 \leqslant 4,9) = 0,95$

Lebar interval konfidensinya adalah :

$4,9 - 1,1 = 3,8$.