II. PENAKSIRAN TITIK.

II.1. Penaksiran titik β dan σ^2.

Kita hendak menaksir parameter β dan σ^2 dari perubah acak e dari sampel e_1, e_2, ... ,e_n dengan fungsi kepadatan masing-masing :

$f(e_i; \beta, \sigma^2) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$

dimana : $e \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$ . .

Maka fungsi kemungkinannya adalah :

$$L = f(e_1;\beta,\sigma^2) \cdot f(e_2;\beta,\sigma^2) \cdot \ldots f(e_n;\beta,\sigma^2)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{e_1^2 + \ldots + e_n^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{e'e}{2\sigma^2}\right)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}{2\sigma^2}\right)$$

$$L = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta}{2\sigma^2}\right)$$

Nilai : $\overset{*}{\beta}$ dan $\overset{*}{\sigma}{}^2$ dari parameter : β dan σ^2 ditentukan oleh sistim persamaan :

$$\frac{\partial}{\partial\beta} \ln L = 0 \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial\sigma^2} \ln L = 0$$

$\ln L =$

$$-n/2 \ln 2\pi - n/2 \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln L = 0$$

$$-1/2\sigma^{2} (-2X'Y + X'X\beta + \beta'X'X) = 0$$

$$-2X'Y + 2X'X\beta = 0$$

$$X'X\overset{*}{\beta} = X'Y \dashrightarrow \text{PERS. NORMAL}$$

$$\boxed{\overset{*}{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y = S^{-1} X'Y} \quad \ldots \text{II.1.1.}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L = 0$$

$$-n/2 (1/\sigma^2) + 1/2\sigma^4 (Y-X\beta)'(Y-X\beta) = 0$$

$$-n/2\sigma^2 + (Y-X\beta)'(Y-X\beta)/2\sigma^4 = 0$$

$$(Y-X\beta)'(Y-X\beta)/2\sigma^4 = n/2\sigma^2$$

$$(Y-X\beta)'(Y-X\beta) = n\sigma^2$$

$$\overset{*}{\sigma}{}^2 = \frac{(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}{n}$$

Akan diselidiki apakah $\overset{*}{\beta}$ dan $\overset{*}{\sigma}{}^2$ merupakan taksiran tak bias bagi β dan σ^2 sebagai berikut :

Penyelidikan untuk taksiran β adalah sebagai berikut :

$$E (\overset{*}{\beta}) = E (S^{-1} X' Y)$$

$$= S^{-1} X' E (Y)$$

$$= S^{-1} X' (X\beta)$$

$$= S^{-1} X' X \beta$$

$$E (\overset{*}{\beta}) = \beta$$

Terbukti bahwa : $\overset{*}{\beta}$ adalah taksiran tak bias bagi β .

Sebelum mengadakan penyelidikan untuk taksiran σ^2 akan kita buktikan beberapa teorema yang ada dibawah ini.

Teorema 1 :

Jika Y berdisribusi dengan mean 0 dan variansi $\sigma^2 I$

maka : $E(Y'AY) = \sigma^2 \operatorname{tr}(A)$.

dimana : tr (A) = jumlah elemen diagonal matriks A.

Bukti :

$$E(Y'AY) = E\left(\sum_{ij} y_i y_j a_{ij}\right)$$

$$= E\left(\sum_i a_{ii} y_i^2\right) + E\left(\sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} y_i y_j a_{ij}\right)$$

jika $i \neq j$, maka : $E(y_i y_j) = E(y_i) E(y_j) = 0$

sehingga :

$$E(Y'AY) = \sum_i a_{ii} E(y_i^2) = \sigma^2 \sum_i a_{ii} = \sigma^2 \operatorname{tr}(A).$$

Teorema 2 :

$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

Bukti :

Menurut definisi, $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{ij} a_{ij} b_{ji}$

$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{ik} b_{ik} a_{ki}$$

Jelas bahwa : $\sum_{ij} a_{ij} b_{ji} = \sum_{ik} b_{ik} a_{ki}$

Sehingga : $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Penyelidikan untuk taksiran σ^2 adalah sebagai berikut :

$$E(\overset{*}{\sigma}{}^2) = 1/n\, E\left((Y - X\overset{*}{\beta})'(Y - X\overset{*}{\beta}) \right)$$

$$= 1/n\, E\left((Y - XS^{-1}X'Y)'(Y - XS^{-1}X'Y) \right)$$

$$= 1/n\, E\left((Y' - Y'(XS^{-1}X')')(Y - (XS^{-1}X')Y) \right)$$

$$= 1/n\, E\left(Y'(I - (XS^{-1}X')')((I - XS^{-1}X')Y) \right)$$

$$= 1/n\, E\left(Y'(I - XS^{-1}X')Y \right)$$ karena : $I - XS^{-1}X'$ matriks idempoten.

$$= 1/n\, \sigma^2 \,\mathrm{tr}\left(I - XS^{-1}X' \right)$$ lihat teorema 1 .

$$= 1/n\, \sigma^2 \left(\mathrm{tr}(I) - \mathrm{tr}(XS^{-1}X') \right)$$

$$= 1/n\, \sigma^2 \left(n - p \right)$$ lihat teorema 2.

$$E(\overset{*}{\sigma}{}^2) = \frac{n - p}{n}\,\sigma^2 .$$

Yang menunjukkan bahwa $\overset{*}{\sigma}{}^2$ merupakan taksiran yang bias untuk σ^2.

Kalau dipilih / diambil : $\overset{***}{\sigma}{}^2 = \dfrac{n}{n - p}\,\overset{*}{\sigma}{}^2$ maka

$\overset{***}{\sigma}{}^2$ ini merupakan taksiran yang tak bias untuk σ^2.

Dengan perkataan lain :

$$\overset{***}{\sigma}{}^2 = \frac{(Y - X\overset{*}{\beta})'(Y - X\overset{*}{\beta})}{n - p}$$

adalah taksiran tak bias bagi σ^2.

Jika $\overset{*}{\beta} = S^{-1} X' Y$ kita substitusikan dalam $\overset{***}{\sigma}{}^2$, maka :

$$\overset{***}{\sigma}{}^2 = \frac{(Y-XS^{-1}X'Y)' (Y-XS^{-1}X'Y)}{n - p}$$

$$= \frac{(Y' - Y'(XS^{-1}X')') (Y - (XS^{-1}X')Y)}{n - p}$$

$$\overset{***}{\sigma}{}^2 = \frac{(Y' (I-(XS^{-1}X')')) ((I-XS^{-1}X')Y)}{n - p}$$

$$\boxed{\overset{***}{\sigma}{}^2 = \frac{Y' (I-XS^{-1}X') Y}{n - p}} \quad \ldots \text{ II.1.2.}$$

merupakan bentuk lain taksiran tak bias bagi σ^2.

II.2. Contoh soal.

Misalkan kita ingin menduga / meramal jarak (= s) suatu benda yang berjalan dalam waktu t, jika kecepatannya (= v) adalah konstan dan jarak awalnya dari suatu titik tertentu adalah d_o.
Maka persamaannya adalah : $s = d_o + v\ t$.
Karena ada error / kesalahan dalam mengukur s , maka persamaannya menjadi : $d = s + e = d_o + v\ t + e$.
Karena d_o dan v tidak diketahui maka kita adakan suatu pengamatan terhadap d dan t, sehingga kita dapat menaksir besarnya d_o dan v.

Pengamatannya tertera dibawah ini :

d	9	15	19	20	45	55	78
t	1	2	3	4	10	12	18

Penyelesaian :
Kita ubah persamaan : $d = d_o + v\ t + e$
kedalam bentuk matriks, sehingga diperoleh persamaan :
$Y = \beta_1 + X\beta_2 + e$
dimana :

$$Y = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 19 \\ 20 \\ 45 \\ 55 \\ 78 \end{bmatrix} \quad ; \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 10 \\ 1 & 12 \\ 1 & 18 \end{bmatrix}$$

$n = 7 \quad ; \quad p = 2$

Dipilih : $\overset{*}{\beta}_1$ dan $\overset{*}{\beta}_2$ sebagai taksiran d_o dan v .

Rumus-rumus yang diperlukan adalah :

II.1.1. $\overset{*}{\beta} = S^{-1} X' Y = (X'X)^{-1} X' Y = \begin{bmatrix} \overset{*}{\beta}_1 \\ \overset{*}{\beta}_2 \end{bmatrix}$

II.1.2. $\overset{*}{\sigma}^2 = \dfrac{Y'(I-XS^{-1}X')Y}{n-p} = \dfrac{Y'Y - Y'XS^{-1}X'Y}{n-p} = \dfrac{Y'Y - \overset{*}{\beta}'X'Y}{n-p}$

$$S = X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 12 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 10 \\ 1 & 12 \\ 1 & 18 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 7 & 50 \\ 50 & 598 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{(7)(598) - (50)(50)} \begin{bmatrix} 598 & -50 \\ -50 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1686} \begin{bmatrix} 598 & -50 \\ -50 & 7 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0,35469 & -0,029656 \\ -0,029656 & 0,0041518 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 12 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 19 \\ 20 \\ 45 \\ 55 \\ 78 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 241 \\ 2690 \end{bmatrix}$$

$$\overset{*}{\beta} = \begin{bmatrix} 0,35469 & -0,029656 \\ -0,029656 & 0,0041518 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 241 \\ 2690 \end{bmatrix}$$

$$\overset{*}{\beta} = \begin{bmatrix} \overset{*}{\beta}_1 \\ \overset{*}{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,71 \\ 4,02 \end{bmatrix}$$

$$Y'Y = \begin{bmatrix} 9 & 15 & 19 & 20 & 45 & 55 & 78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 19 \\ 20 \\ 45 \\ 55 \\ 78 \end{bmatrix}$$

$$Y'Y = 12201 .$$

$$\overset{*}{\beta}{}' X'Y = \begin{bmatrix} 5,71 & 4,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 241 \\ 2690 \end{bmatrix}$$

$$\overset{*}{\beta}{}' X'Y = 12189,91$$

$$\overset{*}{\sigma}{}^2 = \frac{12201 - 12189,91}{7 - 2} = 2,22$$

Jadi : $\overset{*}{s} = \overset{*}{d}_o + \overset{*}{v}\, t$

$$\overset{*}{s} = 5,71 + 4,02\, t$$

adalah taksiran jarak benda yang bergerak dalam waktu t .