I. P E N D A H U L U A N .

I.1. Definisi dan notasi.

Yang dimaksud dengan model linier ialah :
persamaan yang memuat perubah acak, perubah matematis, dan parameter dan yang linier dalam parameter dan dalam perubah acaknya.

Ada beberapa tipe yang cocok untuk tujuan-tujuan eksperimental antara lain : model hubungan fungsional, model hubungan mean dan model pola percobaan.

Model Hubungan Fungsional.

Model ini dicirikan oleh adanya hubungan fungsional antara perubah-perubah matematisnya.

Sebagai contoh, hukum Ohm tentang listrik menyatakan bahwa voltase $\overset{*}{V}$ dalam rangkaian sama dengan hambatan ρ daripada kawat dan arus I.

Persamaannya ialah : $\overset{*}{V} = \rho\ I$.

Misalkan pengamat ingin mendapatkan hambatan ρ pada suatu rangkaian, dan misalkan ia tak bisa mengukur $\overset{*}{V}$ tetapi dapat mengamati v , dengan $v = \overset{*}{V} + e$ (e=kesalahan pengukuran)

Persamaannya menjadi : $v = \rho I + e$.

Disini v dan e adalah perubah acak, I perubah matematis, dan ρ parameter yang tidak diketahui yang akan ditentukan.

Model Hubungan Mean.

Ciri model ini ialah persamaan kesalahan/persamaan error.

Model ini penting dalam masalah dimana ada banyak faktor yang mempengaruhi faktor Y dan dimana mungkin tak semua faktor diketahui tapi dengan mengetahui beberapa diantaray " mendekati " nilai Y yang sebenarnya.

Sebagai contoh, misalkan kita ingin menaksir berat segalon ice cream yang hilang disimpan pada suhu yang rendah sekali. Pengamat mengetahui bahwa banyak faktor mendukung hilangnya berat ice cream itu seperti :

1. Waktu penyimpanan X_1
2. Suhu X_2
3. Kelembaban X_3
4. Kandungan susu icecream X_4.

dan banyak faktor lain sampai X_n .

Kita menganggap bahwa berat yang hilang Y dapat diberikan secara eksak oleh : $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ atau oleh :

$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + g(X_3, \ldots, X_n)$.

Akan tetapi, suhu dan waktu penyimpanan mungkin kita pikirkan sebagai faktor yang penting, sehingga kita membentuk persamaan ramalan :

$y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + e$.

Dimana : X_1 ialah waktu penyimpanan dan X_2 suhu dalam derajat Fahrenheit, dan y berat yang hilang dalam gram.

Sekarang y , X_1 dan X_2 dapat diukur secara tepat, dan dianggap dapat diukur tanpa kesalahan / error.

Kesalahan kita tambahkan dengan memperhitungkan faktor-faktor selain X_1 dan X_2 yang mempengaruhi hilangnya berat.

Jadi, fungsi : $y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ akan menaksir rata-rata nilai y bukan Y .

Yang perlu diingat mengenai model ini ialah bahwa kita mengganti model : $Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + g(X_3, \ldots, X_n)$ dengan model : $y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + e$ dimana e adalah faktor-faktor selain X_1 dan X_2 yang mempengaruhi y.

Kita tak mencoba langsung menaksir pengaruh Y tetapi kita [illegible] E(y) sebagai [illegible] yang cukup dekat Y

Model Pola Percobaan.

Dalam model ini X_i nilainya hanya 0 dan 1 .

Sebagai contoh misalnya kita ingin menyelidiki daya tahan dua jenis cat yang berbeda. Setiap jenis cat digunakan untuk mencat mesin dan lamanya cat itu masih bertahan dicatat. Kita ingin memiliki rumus untuk meramalkan waktu yang diperlukan untuk setiap jenis cat itu. Kedua cat tak memiliki hubungan numerik satu terhadap yang lain.

Akan tetapi persamaan peramalan dapat ditulis sebagai :

$y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$

dimana X_1 dan X_2 nilainya 0 dan 1 dan α_i ialah waktu pemakaian cat ke i. Jadi :

$y = \alpha_1$ bila $X_1 = 1$, $X_2 = 0$

$y = \alpha_2$ bila $X_2 = 1$, $X_1 = 0$

Karena itu, jika diambil y_i ialah waktu yang diperlukan cat ke i, kita dapat menuliskan model itu :

$y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ sebagai : $y_i = \alpha_i$.

Sebenarnya y ialah fungsi X_i tetapi karena $X_i = 0$ atau 1 , X_i seakan-akan tidak tampak dalam rumus itu. Dan lagi mungkin ada kesalahan dalam mengukur y, atau mungkin ada faktor lain disamping pengaruh cat yang menyebabkan y memiliki nilai khusus.

Karena itu, kita dapat menulis persamaannya :

$y_i = \alpha_i + e$, dimana e = kesalahan acak.

Apa yang telah kita bicarakan ialah model dari sudut pandangan peneliti. Berikut ini kita akan mendefinisikan model sebagai mana statistisi memandangnya.

Model 1 .

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_k$ perubah matematis yang diketahui, y perubah acak yang dapat diamati, β_0, β_1, ..., β_k ialah parameter yang tak diketahui, dan e ialah perubah acak yang tak diketahui dengan mean 0.

Dibawah persyaratan ini modelnya ialah :

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + e$$

didefinisikan sebagai model 1.

Sebagai contoh, misalkan ada hubungan fungsional antara $\overset{*}{Y}$ dan X_1, yang diberikan oleh : $\overset{*}{Y} = \beta_0 + \beta_1 X_1$.

Kita tak dapat mengamati $\overset{*}{Y}$, tetapi kita dapat mengamati y, dengan $y = \overset{*}{Y} + e$, dimana e kesalahan pengukuran.

Maka kita punyai $y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + e$, yaitu model 1.

Contoh lain, misalkan hubungan fungsional $Y = g(X_1, \ldots, X_k)$ dapat ditulis $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + h(X_2, \ldots, X_k)$ yang kita dekati dengan $y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + e$

dimana e adalah faktor-faktor selain X_1 yang mempengaruhi y. Ini ialah model hubungan mean dengan persamaan error, tetepi cocok dengan model 1.

Model 2 .

Model ini disebut juga dengan model hubungan fungsional dengan perubahnya kesalahan pengukuran.

Misalkan perubah matematis $\overset{*}{Y}$, $\overset{*}{X}_1$, ... , $\overset{*}{X}_k$ tidak dapat diamati tetapi y , x_1 , ... , x_k dapat diamati dengan $y = \overset{*}{Y} + e$ dan $x_i = \overset{*}{X}_i + e_i$ (i = 1,2,...,k).

dimana e, e_i = kesalahan pengukuran.

Anggap bahwa ada hubungan fungsional antara perubah-perubah matematis itu, yang diberikan oleh :

Kita dapat mensubstitusi dan menulis :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + e - \beta_1 e_1 - \beta_2 e_2 - \ldots - \beta_k e_k .$$

Apabila spesifikasi diatas dipenuhi, kita mendefinisikan model itu sebagai model 2.

Model 3 .

Model ini disebut juga dengan model pola percobaan. Misalkan y perubah acak, dan ambil $X_1, X_2, \ldots, X_k$ masing-masing sama dengan 0 dan 1. Jika $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ ialah parameter yang tak diketahui, maka :

$y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + e$ dimana : e = perubah acak

akan disebut model 3 .

Tujuan penulisan skripsi ini adalah hendak menaksir parameter suatu model linier yaitu model 1 dan menguji hipotesa yang diambil.

Bentuk umum model linier adalah :

$$y_j = \sum_{i=1}^{p} \beta_i x_{ji} + e_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

dimana :

y_j = observasi ke j (perubah acak yang dapat diamati)

β_i = parameter yang tak diketahui dan yang akan ditentukan

x_{ji} = konstanta yang diketahui (perubah matematis yang dapat diamati)

e_j = kesalahan acak / random error

Atau dalam bentuk matriks dituliskan sebagai :

$$Y = X\beta + e$$

dimana :

$$\underset{n\times 1}{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \underset{p\times 1}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \beta_p \end{bmatrix} \qquad \underset{n\times 1}{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{n\times p}{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdot\cdot & \cdot\cdot & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdot\cdot & \cdot\cdot & x_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdot\cdot & \cdot\cdot & x_{np} \end{bmatrix}$$

Untuk model 1 , bentuk dari matriks X adalah :

$$\underset{n\times p}{X} = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdot\cdot & x_{1p} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdot\cdot & x_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot & \cdots \\ x_{n0} & x_{n1} & x_{n2} & \cdot\cdot & x_{np} \end{bmatrix}$$

dimana : $x_{j0} = 1$ untuk setiap j ($j = 1,2,\ldots,n$)

I.2. METODE KEMUNGKINAN MAKSIMUM (MKM).

Metode ini bermaksud membuat fungsi kemungkinan L maksimum, dimana :

$$L = f(x_1;\phi) \cdot f(x_2;\phi) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot f(x_n;\phi)$$

Bentuk fungsi distribusi x diketahui namun memuat parameter ϕ yang tidak diketahui.

Misalkan kita hendak menaksir parameter $\phi_1, \ldots, \phi_m$ dari perubah acak X dari sampel $x_1, \ldots, x_n$ dengan fungsi kepadatan masing-masing :

$$f(x_i;\phi_1,\ldots,\phi_m) \qquad i = 1, \ldots, n$$

Maka fungsi kemungkinannya adalah :

$$L = f(x_1;\phi_1,\ldots,\phi_m) \cdot \quad \cdot \quad \cdot f(x_n;\phi_1,\ldots,\phi_m)$$

Nilai $\overset{*}{\phi}_1, \ldots, \overset{*}{\phi}_m$ dari parameter $\phi_1, \ldots, \phi_m$ ditentukan oleh sistim persamaan :

$$\frac{\partial}{\partial \phi_j} \log L = 0$$

$$j = 1,2,\ldots,m$$

Karena $\log L = \log e \cdot \ln L$ maka :

$\frac{\partial}{\partial \phi_j} \log L = 0$ dapat diubah menjadi : $\frac{\partial}{\partial \phi_j} \ln L = 0$

$j = 1,2,\ldots\ldots,m.$

Metode mendapatkan $\overset{*}{\phi}_1,\ldots,\overset{*}{\phi}_m$ dengan cara tersebut diatas