BAB III

JUMLAH KENDARAAN DI SUATU JALAN RAYA

Dalam bagian ini akan dicari suatu model dari kekekalan jumlah kendaraan, yang mana sebelumnya telah diketahui untuk kecepatan kendaraan dan kepadatan awal sehingga dapat dicari suatu model dari :

- Kepadatan untuk waktu kemudian
- Hubungan kecepatan dan kepadatan secara linier
  - a. Arus maksimum
  - b. Kepadatan lalu lintas setelah lampu lalu lintas menyala mulai dari warna merah
  - c. Gerakan individu dari kendaraan dibelakang lampu lalu lintas, posisi dan waktu yang diperlukan oleh kendaraan untuk melewatinya.
- Taksiran gelombang lalu lintas

III.1 Kekekalan jumlah kendaraan

Pertimbangkan dulu dua variabel pokok dalam lalulintas yaitu kecepatan lapangan $u(x,t)$ dan kepadatan $p(x,t)$ mula-mula telah diketahui untuk jalan raya yang panjangnya tak terbatas.
Misalkan diketahui bahwa kepadatan mula-mula $p(x,0)$ dan kecepatan lalu lintas untuk seluruh waktu adalah $u(x,t)$. Maka gerakan dari setiap kendaraan akan memenuhi persamaan differensial order satu sebagai :

$$\frac{dx}{dt} = u(x,t) \quad , \text{ dengan } \quad x(0) = x_0$$

Dengan memecahkan persamaan di atas dapat ditentukan letak tiap kendaraan pada waktu akan datang,; dan sebagai konsekwensinya dapat dihitung kepadatan lalu lintas untuk waktu mendatang (jika perhitungan dipakai statistik akan mengalami kesulitan, hal ini melibatkan penentuan tentang ukuran interval apa yang harus dipakai).

Anggaplah bahwa dengan mengamatai tiap kendaraan dapat dinyatakan jumlah kendaraan tetap selalu sama.
Pada suatu interval tertentu dari jalan raya, antara :

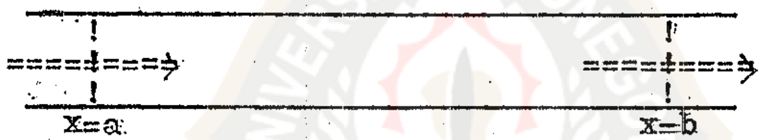
$x = a$ dan $x = b = a+\Delta a$ seperti yang terlihat dalam gambar 3.1.1 , jumlah kendaraan N pada interval $a < x < b = a+\Delta a$ disebut pula kepadatan lalu lintas : $p(x,t)\Big|_a^{b=a+\Delta a}$

atau $\dfrac{N(a+\Delta a) - N(a)}{\Delta a} = p(x,t)\Big|_a^{b=a+\Delta a}$

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{N(a+\Delta a) - N(a)}{\Delta a} = \frac{dN}{da} = p(x,t)\Big|_a^{b=a+\Delta a}$$

Karena a mewakili sembarang segmen jalan raya, maka a dapat diganti dengan x , sehingga :

$$\frac{dN}{dx} = p(x,t)\Big|_a^{b=a+\Delta a} \Longrightarrow N = \int_a^b p(x,t)\,dx \quad . \qquad (15)$$



Gambar 3.1.1 : Kendaraan yang masuk dan yang ke luar dari segmen suatu jalan raya.

Jika pada jalan tersebut tidak ada jalan masuk maupun jalan ke luar, maka jumlah kendaraan anatara $x = a$ dan $x = b$ mungkin saja akan berubah dalam waktu tertentu.
Jumlah kendaraan berkurang bila ada kendaraan ke luar di $x = b$ dan jumlah kendaraan akan naik bila ada kendaraan masuk di $x = a$. Anggaplah bahwa tidak ada tambahan maupun pengurangan kendaraan antara $x = a$ dan $x = b$ tersebut, maka perubahan jumlah kendaraan hanya disebabkan oleh banyaknya kendaraan yang lewat di $x = a$ dan di $x = b$.

Contoh : $q = 300$ di $x = a$ & $q = 275$ di $x = b$ $\Longrightarrow$ $q = 25$ di $a < x < b$.

Jadi dapat ditarik kesimpulan secara umum bahwa pada suatu keadaan di mana jumlah kendaraan yang melewati tiap - tiap batas tidak konstan setiap waktu (arus lalu lintas $q(a,t)$ dan $q(b,t)$). Kecepatan perubahan dari jumlah kendaraan :

$\dfrac{dN}{dt}$ akan sama dengan jumlah kendaraan tiap satuan waktu yang melewati $x = a$ (bergerak ke kanan) dikurangi jumlah kendaraan tiap satuan waktu yang melewati $x = b$ (bergerak ke kanan) atau :

$$\frac{dN}{dt} = q(a,t) - q(b,t) \quad . \qquad (16)$$

tara waktu $t + \Delta t$ dan t, adalah $N(t + \Delta t) - N(t)$ sama dengan jumlah kendaraan yang melewati $x = a$ dalam waktu antara $t + \Delta t$ dan t untuk Δt kecil kira-kira sebesar $q(a,t).\Delta t$, dikurangi jumlah kendaraan yang melewati daerah $x = b$ dalam waktu antara $t + \Delta t$ dan t untuk Δt kecil kira-kira sebesar $q(b,t).\Delta t$.

Jadi :

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \Delta t.(\, q(a,t) - q(b,t)\,)$$

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta t.(\, q(a,t) - q(b,t)\,)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(\, q(a,t) - q(b,t)\,)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\,N(t)}{dt} = q(a,t) - q(b,t)\ ,$$

terlihat bahwa persamaan di atas adalah equivalen dengan persamaan (16).

Hasil penggabungan persamaan (15) dan (16) diperoleh persamaan :

$$\frac{d}{dt} \int_a^b p(x,t)\, dx = q(a,t) - q(b,t) \qquad (\ 17\ )$$

Ternyata bahwa persamaan ini benar, karena perubahan dalam jumlah kendaraan hanya disebabkan oleh arus kendaraan yang melewati batas-batas yang bersangkutan.

Tidak ada kendaraan yang timbul ataupun yang hilang diantara batas-batas tersebut, jadi jumlah dari kendaraan adalah tetap (kekal). Ini bukan berarti jumlah kendaraan antara $x = a$ dan $x = b$ adalah konstan (jika itu benar maka :

$$\frac{d}{dt}\int_a^b p(x,t).dx = 0 \quad \text{atau} \quad q(a,t) = q(b,t)\ ).$$

Persamaan (17) disebut pula : Hukum Kekekalan Integral (Conservation Law of Integral Form) yang menyatakan bahwa harga-harga dari lalu lintas dalam suatu panjang jalan raya yang tertentu :

$$a \leqslant x \leqslant b\ .$$

Sebagai contoh, pandang suatu jalan raya yang tak terbatas, sekarang dianggap bahwa arus kendaraan mendekati nilai nol dan x juga mendekati $\pm \infty$

$$\lim_{x \to \pm \infty} q(x,t) = 0 \quad . \qquad \#$$

Dengan mensubstitusikan persamaan # ke persamaan (17) diperoleh :

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,t)\, dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x,t)\, dx = \text{konstan} ,$$

yang mengatakan bahwa jumlah total kendaraan adalah konstan untuk setiap waktu. Harga konstanta dapat dihitung, jika diketahui jumlah kendaraan N_o mula-mula ataupun kepadatan mula-mula $p(x,0)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x,t)\, dx = N_o = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,0)\, dx .$$

Ternyata bahwa hukum kekekalan integral, hanya berlaku untuk setiap tempat dari jalan raya yang disebut pula Hukum Kekekalan Lokal. Meskipun akan diketahui bahwa persamaan (17) selalu berlaku dalam daerah di mana Variabel dasar lalu lintas adalah merupakan fungsi kontinyu dari x dan t . Dengan cara termaksud, titik ujung dari segmen jalan raya, $x = a$ dan $x = b$ dianggap sebagai variabel tambahan yang bebas. Jadi penurunan penuh terhadap waktu dari persamaan (17) harus diganti dengan penurunan parsiel

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b p(x,t)\, dx = q(a,t) - q(b,t) . \quad (18)$$

Pandang kekekalan integral dari kendaraan dalam suatu interval kecil dari jalan raya : $a \leq x \leq a + \Delta a$. Jadi persamaan (18) dapat diganti dengan :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^{a+\Delta a} p(x,t)\, dx = q(a,t) - q(a + \Delta a,t)$$

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{-\Delta a} \int p(x,t)\, dx = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{q(a,t) - q(a + \Delta a,t)}{-\Delta a} \quad (19)$$

$$= \frac{\partial}{\partial a} q(a,t) ,$$ karena t ada

lah waktu yang tertentu .
Pada bagian sebelah kiri dari persamaan (19), suatu limit dapat dibentuk dalam cara yang ekivalen :

1.a. Integral adalah daerah di bawah kurva $p(x,t)$ antara $x = a$ dan $x = a + \Delta a$. Karena Δa kecil, integralnya dapat diperkirakan dengan panjang dari jalan raya Δa dikalikan kepadatan lalu lintas pada $x = a$ adalah $p(x,t)$.

Jadi :

$$\frac{-1}{\Delta a}\int_a^{a+\Delta a} p(x,t)\,dx \approx -p(x,t)$$

Maka didapat :

$$\frac{\partial}{\partial t} p(a,t) + \frac{\partial}{\partial a} q(a,t) = 0 \qquad (20')$$

1.b. Sebaliknya dengan menggunakan fungsi $N(x,t)$, jumlah dari kendaraan pada jalan raya antara posisi tertentu x_0 dan x' :

$$N(x',t) \equiv \int_{x_0}^{x'} p(x,t)\,dx$$

maka jumlah rata-rata dari kendaraan pada jalan raya tiap kilometer atau perjalur antara $x_0 = a$ $x' = a + \Delta a$, adalah :

$$-\frac{1}{\Delta a}\int_a^{a+\Delta a} p(x,t)\,dx = \frac{N(a+\Delta a,t) - N(a,t)}{-\Delta a}$$

Setelah dilimitkan bagian kanan untuk $\Delta a \to 0$ maka diperoleh : $\frac{-\partial N(a,t)}{\partial a}$.

Dan dengan memakai definisi dari $N(a,t)$ dan Teori Pokok Calculus diperoleh :

$$\frac{\partial N(a,t)}{\partial a} = p(a,t)$$

Jadi bagian kiri dari persamaan (19) menjadi sama dengan : $-\frac{\partial}{\partial t} p(a,t)$

Selanjutnya diperoleh :

$$- \frac{\partial}{\partial a} p(a,t) = \frac{\partial}{\partial t} q(a,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(a,t) + \frac{\partial}{\partial a} q(a,t) = 0 \qquad (20'')$$

Karena persamaan (20') dan (20") masih mengandung harga a, maka akan lebih baiknya jika harga dari a diganti dengan x , dalam hal ini menjadi :

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \text{atau :}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \, . \qquad (20)$$

2. Pandang hukum kekekalan integral dari persamaan (18) , untuk sembarang segmen dari jalan raya : $a \leqslant x \leqslant b$ dan ambil turunan parsiel terhadap b , maka diperoleh persamaan :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial b} \int_a^b p(x,t)\, dx = \frac{\partial}{\partial b} (q(a,t) - q(b,t))$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(b,t) = - \frac{\partial}{\partial b} q(b,t)$$

Karena b juga mewakili sembarang tempat dari segmen jalan raya, maka b dapat pula diganti dengan x , maka menghasilkan persamaan (20) kembali.

3. Altetnatif lain dari penurunan untuk jalan raya yang tertentu batasnya ($a \leqslant x \leqslant b$) : didasarkan pada hubungan berikut ini jelas-jelas berlaku untuk bagian sebelah kanan dari persamaan (18) ;

$$q(a,t) - q(b,t) = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q(x,t)\, dx$$

dengan mensubstitusikan persamaan ini ke (18)

$$\int_a^b \left[\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \right] dx = 0 \, . \qquad (20*)$$

Persamaan (20*) menyatakan bahwa integral tertentu dari beberapa harga selalu nol untuk semua harga dari bermacam macam limit dari integral . Satu-satunya fungsi yang integralnya adalah nol untuk semua interval adalah fungsi nol . Jadi persamaan (20) memenuhi .

Dengan tiga metode yang ekivalen telah ditunjukkan bahwa :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

atau

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p.u) = 0 \quad (\text{karena } q = p.u)$$

harus berlaku jika tidak ada kendaraan yang masuk maupun yang ke luar sepanjang jalan raya, yang menunjukkan suatu kekekalan dari kendaraan atau berlaku pula untuk beberapa situasi yang tidak mempunyai hubungan lalu lintas . Persamaan di atas disebut pula sebagai Persamaan Differensial Persiel yang berhubungan dengan kepadatan dan kecepatan lalu lintas.

III.2 Model Kepadatan Lalu lintas Linier tergangu :

Persamaan Differensial Persiel yang dirumuskan untuk arus lalu lintas (hukum kekekalan kendaraan) adalah

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q(p)}{\partial x} = 0 \qquad \#)$$

karena $q = p.u$, maka q dapat dianggap sebagai fungsi dari p saja . Pernyataan terakhir ini sering lebih mudah dipakai, karena dengan hukum rantai berlaku :

$$\frac{\partial q(p)}{\partial x} = \frac{dq}{dp} \frac{\partial p}{\partial x}$$

dan dengan mensubstitusikan persamaan ini ke bentuk #) diperoleh :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{dq}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Satu syarat awal yang memungkinkan adalah kepadatan awal lalu lintas $p(x,0) = f(x)$. Dan Persamaan Differensial Parsiel ini tidak dapat secara langsung diintegralkan hal ini dikarenakan : $\frac{\partial p}{\partial t}$ dan $\frac{\partial p}{\partial x}$ muncul bersamaan.

Jika kepadatan awal lalu lintas adalah konstan yaitu : $p(x,0) = p_0$ dan dimana x variabel bebas, maka kepadatan akan tetap konstan (karena semua kendaraan bergerak dalam kecepatan yang sama). Ini kelihatan jelas dengan menyatakan bahwa kepadatan yang konstan $p(x,t) = p_0$ memenuhi Persamaan Differensial Parsiel (20) :

Jika kepadatannya hampir uniform, maka harus ada perkiraan penyelesaian persamaan differensial parsiel sedemikian rupa hingga :

$$p(x,t) = p_0 + \varepsilon\, p_1(x,t) \qquad (21)$$

di mana $|\varepsilon\, p_1| \ll p_0$. $\varepsilon\, p_1(x,t)$ ini disebut kepadatan lalu lintas yang terganggu (penyimpangan yang kepadatannya konstan) sehingga $p(x,0) = p_0 + E\, f(x)$.

Dengan mensubstitusikan persamaan (21) ke bentuk 20*) menghasilkan :

$$\varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{dq}{dp}\left(p_0 + \varepsilon\, p_1(x,t) \right) . \varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$$

di mana suatu pangkat dari ε telah ditunda penggunaannya. Turunan dq/dp dievaluasikan pada kepadatan total lalu lintas :

$$p_0 + \varepsilon\, p_1(x,t) .$$

Dengan mengembangkan persamaan ini melalui atau memakai deret Taylor akan menghasilkan :

$$\frac{dq}{dp}\left(p_0 + \varepsilon\, p_1(x,t)\right) = \frac{dq}{dp}(p_0) + \varepsilon\, p_1 \frac{d^2q}{dp^2}(p_0) + \frac{(\varepsilon\, p_1)^2}{2!} x \frac{d^3q}{dp^3}(p_0) + \ldots\ldots\ldots$$

Jadi kemudian didapat persamaan :

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{dq}{dp}(p_o).\frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \qquad (22')$$

Persamaan Differensial Parsiel ini mengatur kepadatan lalu lintas terganggu. Namun demikian persamaan (22") adalah persamaan differensial parsiel linier, sedangkan persamaan (20) yang pasti adalah non linier.
Koefisien yang muncul dalam persamaan (22') yaitu :

$(\frac{dq}{dp})$ (p_o) adalah konstanta yang sesuai dengan kecepatan yang konstan (slope dari arus sebagai fungsi dari kepadatan yang dievaluasikan pada kepadatan yang konstan).
Oleh karena :

$(\frac{dq}{dp})$ $(p_o) = c$ maka persamaan (22') dapat dirubah menjadi bentuk :

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + c\,\frac{p_1}{x} = 0 \qquad (22")$$

Pengertian lain dari kepadatan lalu lintas tertunda/terganggu :

Sekarang pandang kepadatan lalu lintas yang bergerak yang diukur oleh pengamat. Misalkan letak pengamat ditunjukkan dengan $x = x(t)$, kepadatan lalu lintas yang diukur terganggu terhadap waktu, yaitu :

$$p_1(\ x(t), t\ ).$$

Tingkat perubahan kepadatan ini sangat tergantung pada macamnha lalu lintas dan gerakannya, sebab hukum rantai dari turunan parsiel menyatakan bahwa :

$$\frac{d}{dt}\, p_1(\ x(t), t\ ) = \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\ \frac{\partial p_1}{\partial x}$$

Differensi :

$\frac{\partial p_1}{\partial t}$ mewakili perubahan yang disebabkan pada kenyataan bahwa kendaraan bergerak ke dalam daerah yang mungkin kepadatannya berbeda.

Sedangkan berdasarkan persamaan (22") :

$$\frac{dx}{dt} = c \quad \Longrightarrow \quad x = ct + \alpha$$

dan

$$\frac{d\,p_1}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_1 = \beta = \text{konstan sepanjang}$$

$x = ct + \alpha$, di mana α dan β adalah konstan .
Namun demikian terlihat bahwa p_1 adalah konstan hanya bila $x - ct$ adalah konstan . Untuk garis lurus yang lain (dengan konstanta α yang lain), p_1 dapat berupa konstanta yang berbeda pula . Jadi konstanta β tergantung pada konstanta α , $\beta = f(\alpha)$, β adalah suatu fungsi sembarang dari α atau $p_1 = f(x - ct)$.

Jadi dari persamaan (21) diperoleh :

$$\begin{aligned} p(x,t) &= p_o + \varepsilon\, p_1(x,t) \\ &= p(x,0) + \varepsilon f(x - ct) \end{aligned} \qquad (23)$$

III.3 Hubungan Kecepatan dengan Kepadatan secara linier

Untuk memberikan gambaran tentang metode karakteristik seperti yang diterapkan pada masalah lalu lintas, maka lebih baik dipilih hubungan kecepatan - kepadatan yang lebih sederhana dan yang mempunyai tujuan yang diharapkan. Pengetahuan yang lebih mendalam akan diperoleh dari kurva sederhana untuk menentukan kesalahan-kesalahan kwantitatif dalam memakai kurva kecepatan-kepadatan secara experimental .

Untuk menentukan hubungan kecepatan-kepadatan secara linier, maka munurut rumus (13) :

$$u = \lambda \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p_{max}} \right] \quad \text{di mana } \lambda = c.p \text{ dengan :}$$

$$p = \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \, ,$$

Jadi jika kepadatan mula adalah kecil atau dianggap sama dengan nol, maka $c = u_{max}$ sedemikian hingga diperoleh rumus atau suatu model dari " Hubungan kecepatan-kepadatan secara linier " ; yang diturunkan dari :

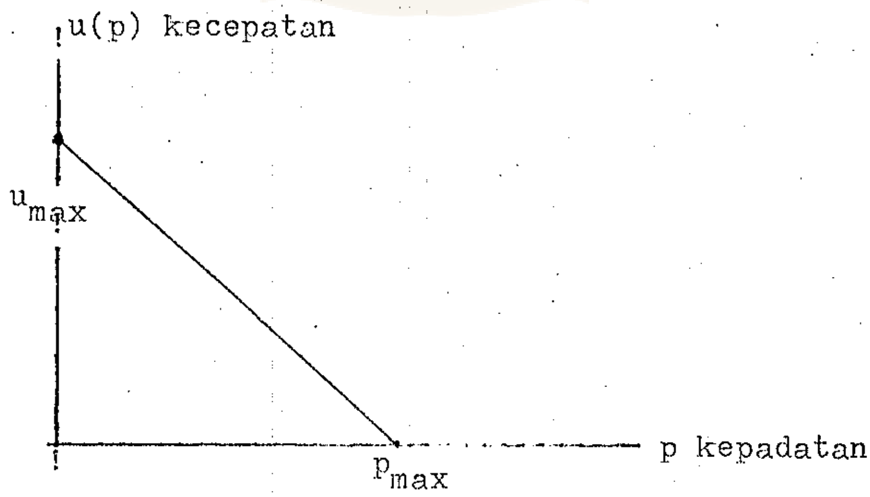
$$u(p) = c.p.\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_{max}} \right) = c \left(1 - \frac{p}{p_{max}} \right)$$

$$u(p) = u_{max}.\left(1 - \frac{p}{p_{max}} \right)$$

$$u(p) = \frac{u_{max}}{p_{max}} . (p_{max} - p) \qquad (24)$$

Hal ini mempunyai 4 (empat) hal yang penting yaitu :

1. $u(p_{max}) = 0$
2. $u(0) = u_{max}$
3. $\frac{du}{dp} < 0$ (dalam sebuah jalan sederhana)
4. $\frac{dq}{dp}$ akan berkurang sebab p bertambah (karena dq/dp lebih kecil dari nol).

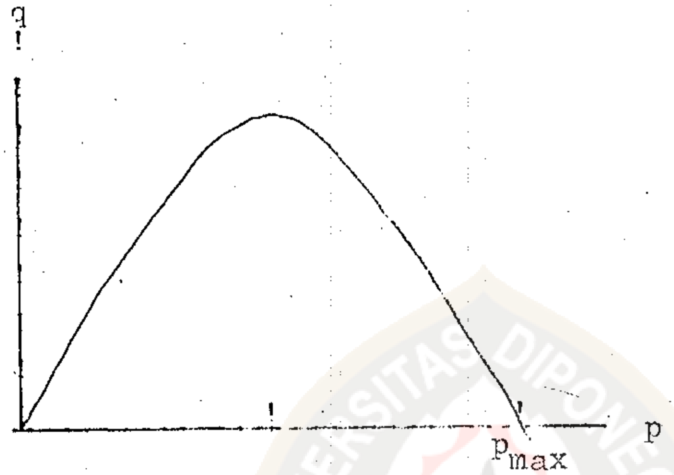


Gambar 3.3.1 : Kurva linier hubungan kecepatan - kepadatan

Dalam hal ini model arus lalu lintasnya mudah dibentuk ya itu :

$$q = p.u = u_{max}.p \left(1 - \frac{p}{p_{max}} \right) \qquad (25)$$

yang menghasilkan suatu " Diagram Pokok Lalu Lintas Jalan Raya " yang berupa parabola, yang dilukiskan dalam gambar 3.3.2.



Gambar 3.3.2 : Hubungan Arus - Kepadatan

Kecepatan gelombang kepadatan adalah :

$$\frac{dq}{dp} = u_{max} \left(1 - \frac{2p}{p_{max}} \right) , \qquad (26)$$

menghasilkan kecepatan gelombang positip dan negatip. Kecepatan gelombang menurun sesuai dengan naiknya kepadatan

$$\left(\frac{d^2q}{dp^2} < 0 \right) .$$

Arus maksimum terjadi bila gelombang kepadatan tetap (kecepatan gelombang kepadatan sama dengan nol).
Untuk kurva kecepatan-kepadatan ini , kepadatan di mana arus lalu lintas dibuat maksimum adalah persis sama dengan separuh dari kepadatan maksimum, yaitu :

$$\frac{dq}{dp} = 0 = u_{max} \left(1 - \frac{2p}{p_{max}} \right)$$

$$1 - \frac{2p}{p_{max}} = 0$$

$p = \frac{p_{max}}{2}$ dan kecepatannya akan sama dengan separuh dari kecepatan maksimum : dengan mensubstitusikan $p = p_{max}/2$ ke persamaan (24) yaitu bahwa ;

$$u(p) = u_{max} \cdot \left(1 - \frac{p}{p_{max}} \right)$$

$$u(p) = u_{max} \cdot \left(1 - \frac{\frac{1}{2}p_{max}}{p_{max}} \right) = \tfrac{1}{2}\, u_{max}$$

$$u(\tfrac{1}{2}p_{max}) = \tfrac{1}{2}\, u_{max}$$

Jadi " arus lalu lintas maxsimum " adalah sebesar :

$$q\left(\frac{p_{max}}{2}\right) = \frac{p_{max} \cdot u_{max}}{4} , \qquad (27)$$

seperempat dari arus lalu lintas yang akan terjadi bila lalu lintas yang saling bersentuhan bumper bergerak dalam kecepatan maksimum (hal ini sesuai bagian II.4 , dengan rumus (14)).

Dimisalkan bahwa kecepatan diberikan dalam persamaan (24). Akan dicari " kepadatan lalu lintas setelah lampu lalu lintas (traffic light) mulai dari lampu merah yang menyala."

Yaitu akan dipandang kepadatan mula-mula seperti sebelumnya :

$$p(x,0) = \begin{cases} p_{max} & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Kecepatan gelombang kepadatan yang berhubungan dengan : $p = 0$ dan $p = p_{max}$ dan dengan mensubstitusikannya ke persamaan (26) diperoleh ;

$$\frac{dq}{dp}(p=0) = u_{max}$$

dan

$$\frac{dq}{dp}(p=p_{max}) = -\, u_{max}$$

Jadi garis karakteristik sepanjang $p = 0$ dan $p = p_{max}$ dapat dilukiskan pada diagram ruang-waktu, seperti gambar 3.3.3. Akan dicari secara jelas dalam daerah " fanlike "

$$-\,u_{max}\, t < x < +\,u_{max}\, t \; .$$

Di mana garis karakteristik diberikan dengan persamaan :

$$\frac{dq}{dp} = u_{max} = \frac{x}{t}$$, karena dimulai dari $x = 0$

dan $t = 0$. Untuk hubungan linier kecepatan - kepadatan maka kecepatan gelombang kepadatan diberikan dengan persamaan (26) dan dari sini diperoleh :

$$\frac{dq}{dp} = \frac{x}{t} = u_{max} \left(1 - \frac{2\,p}{p_{max}} \right)$$

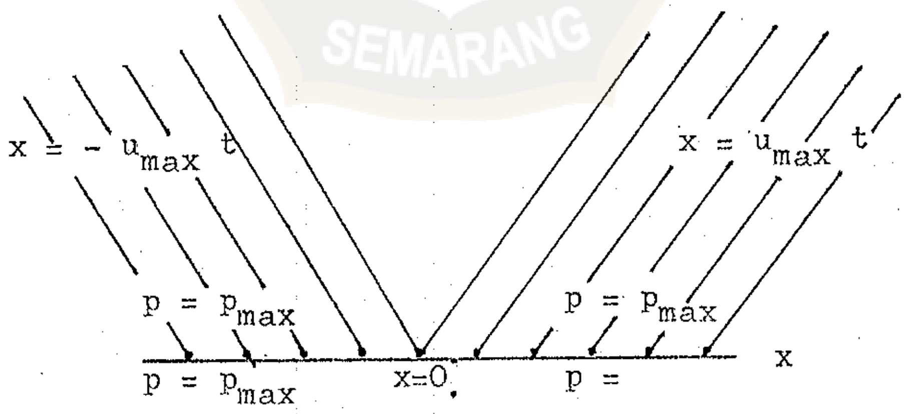
$$x\, p_{max} = u_{max}\, t \,(p_{max} - 2\,p)$$

$$x\, p_{max} = u_{max}\, t\, p_{max} - u_{max}\, t\, 2p$$

$$(x - u_{max}\, t)\, p_{max} = - u_{max}\, t\, 2p$$

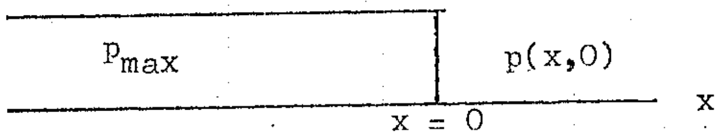
$$\left(\frac{u_{max}\, t - x}{u_{max}\, t} \right) p_{max} = 2\,p$$

$$\frac{p_{max}}{2} \left(1 - \frac{x}{u_{max}\, t} \right) = p \qquad (28)$$

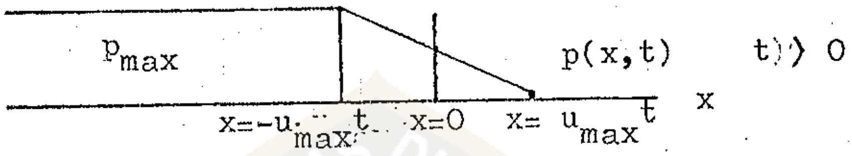


Gambar 3.3.3 : Diagram ruang-waktu untuk masalah lampu lalu lintas(traffic light)

Untuk waktu yang tertentu, kepadatan secara linier tergantung pada x (dalam daerah karakteristik fanlike). Perhatikan bahwa pada $x = 0$, $p = \frac{1}{2}\, p_{max}$ sehingga kepadatan berhubungan dengan arus lalu lintas maksimum . Sehingga dapat dilukiskan ke dalam gambar 3.3.4 , yaitu kepadatan pada saat $t = 0$ dan pada saat kemudian dengan memakai tempat-tempat yang sudah diketahui pada batas maksimum dan minimum dari kepadatan lalu lintas itu,terlihat bahwa kepadatannya akan menyebar .



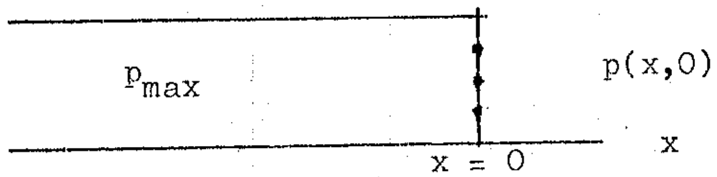
Gambar 3.3.4' : Kepadatan lalu lintas sebelum lampu hijau menyala.



Gambar 3.3.4" : Kepadatan lalu lintas sesudah lampu hijau menyala.

Telah ditunjukkan bahwa kepadatan p tetap sama , bergerak pada kecepatan gelombang kepadatan dq/dp yang diberikan oleh persamaan (26). Jika kepadatan-kepadatan ini adalah konstan :

$$p_{max}\ ,\ \frac{3p_{max}}{4}\ ,\ \frac{p_{max}}{2}\ ,\ \frac{p_{max}}{4}\ ,\ \text{dan}\ \ 0,$$ yang diberi tanda pada diagram dalam gambar 3.3.5 yang mewakili kepadatan mula-mula. Setelah beberapa saat kemudian, setiap kendaraan akan bergerak pada kecepatan yang konstan dan yang berbeda (dengan menggunakan anak panah ditunjukkan bagaimana tiap kendaraan harus bergerak).



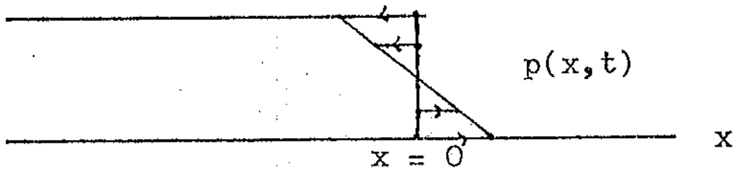
Gambar 3.3.5 : Kepadatan lalu lintas pada saat dihentikan lampu merah

Di mana dalam gambar 3.3.6 ditunjukkan bahwa ketergantungan linier dari kecepatan gelombang pada kepadatan (persaan 26) menghasilkan bentuk dasar kepadatan linier (seperti direncanakan semula dalam persamaan 28).

Sekarang akan dicari " gerakan individu kendaraan yang dimulai berjalan dari jarak x_0 di belakang lampu lalu lintas ", yaitu pada $x = -x_0$ (pada saat $t = 0$).

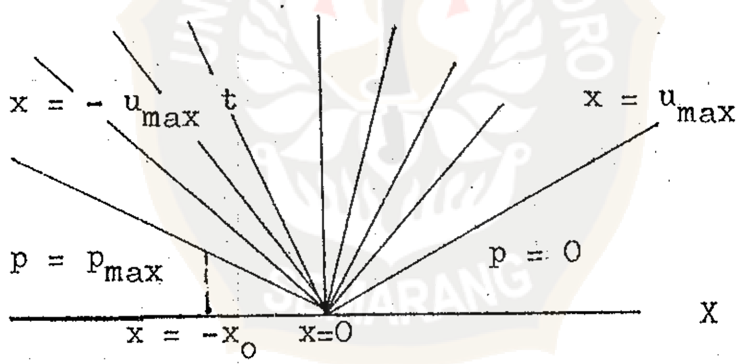
Kecepatan dari kendaraan diberikan dengan kecepatan lapangan :

$$\frac{dx}{dt} = u(x,t) .$$



Gambar 3.3.6 : Perbedaan kecepatan gelombang kepadatan lalu lintas.

Kendaraan tetap saja sampai gelombang memberikan informasi tentang perubahan lampu lalu lintas menyala, jangkauan kendaraan seperti yang dilukiskan dalam gambar 3.3.7 .



Gambar 3.3.7 : Jangkauan kendaraan (sementara kendaraan tidak bergerak)

Selanjutnya; $t = \frac{x_o}{u_{max}}$ kendaraan akan berjalan pada kecepatan yang diberikan dalam daerah " fanlike " ; karena jika :

$$\frac{dx}{dt} = u(x,t) = \frac{dq}{dp} = u_{max} \left(1 - \frac{2p}{p_{max}} \right) \Longrightarrow$$

$$x = u_{max} \left(1 - \frac{2p}{p_{max}} \right) t + x_o$$

$$= u_{max} \left(1 - \frac{2p}{p_{max}} \right) t + u_{max} t$$

$$= 2\, u_{max} \left(1 - \frac{p}{p_{max}} \right) t$$; dan dikarenakan hanya

berlaku sebagian daerah fanlike saja, yaitu pada $x = -x_o$ maka :

$$x = u_{max} \left(1 - \frac{p}{p_{max}} \right) t \,.$$

Jadi kecepatan lapangan kendaraan pada daerah fanlike :

$$\frac{dx}{dt} = u_{max} \left(1 - \frac{p}{p_{max}} \right)$$

$$= u_{max} \left(1 - \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{u_{max} t} \right) \right) \quad \text{dari persamaan (28)}$$

$$= u_{max} \left(\tfrac{1}{2} - \frac{\tfrac{1}{2} x}{u_{max} t} \right)$$

Atau :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_{max}}{2} + \frac{x}{2t} \qquad (29)$$

Hal ini dikarenakan sebuah kendaraan di belakang traffic light mulai bergerak, kecepatan mula-mulanya nol dan kemudian perlahan-lahan bertambah .

Untuk menentukan grafik parabola (trajektory) dari setiap kendaraan (tempat x sebagai fungsi dari waktu t), harus dicari penyelesaian dari model/persamaan : (29) sedemikian hingga diperoleh model " letak dari kendaraan " yang memenuhi syarat awal :

$$t = \frac{x_o}{u_{max}} \quad \text{dan} \quad x = -x_o$$

Pandang persamaan (29), sehingga dapat dirubah ke dalam bentuk :

$$\frac{dx}{dt}\, t = \frac{u_{max}}{2}\, t + 1/2\, x$$

$$\frac{dx}{dt}\, t - 1/2\, x = 1/2\, u_{max}\, t$$

Penyelesaian Homogen :

$$t \frac{dx}{dt} - 1/2\, x = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{dt}{2t} = 0$$

$$\ln x - 1/2 \ln t = \ln k$$

$$\ln \frac{x}{t^{1/2}} = \ln k \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{t^{1/2}} = k ,$$

$$x = k\, t^{1/2}$$

$x' = k'\, t^{1/2} + 1/2\, k\, t^{-1/2}$, substitusikan ke dalam persamaan (29) diperoleh :

$$t\,(k'\, t^{1/2} + 1/2\, k\, t^{-1/2}) - 1/2\, kt^{1/2} = 1/2\, u_{max}\, t$$

$$k'\, t^{3/2} = 1/2\, u_{max}\, t$$

$$k' = 1/2\, u_{max}\, t^{-1/2}$$

$$k = u_{max}\, t^{1/2} + 1 .$$

Jadi : $x = (u_{max}\, t^{1/2} + 1)\, t^{1/2}$ #)

$= u_{max}\, t + 1\, t^{1/2}$ (merupakan penyelesaian umum dari persamaan (29)).

Syarat awal dari persamaan (29) menentukan 1 ;

$$- x_o = x_o - 1 \left(\frac{x_o}{u_{max}} \right)^{1/2} \quad \text{sehingga :}$$

$$1 = -2\, x_o \left(\frac{u_{max}}{x_o} \right)^{1/2} = - 2\, (x_o\, u_{max})^{1/2} . \;**)$$

Konsekwensinya letak dari kendaraan ini dapat ditentukan yaitu dengan memasukkan bentuk **) ke bentuk #) didapat

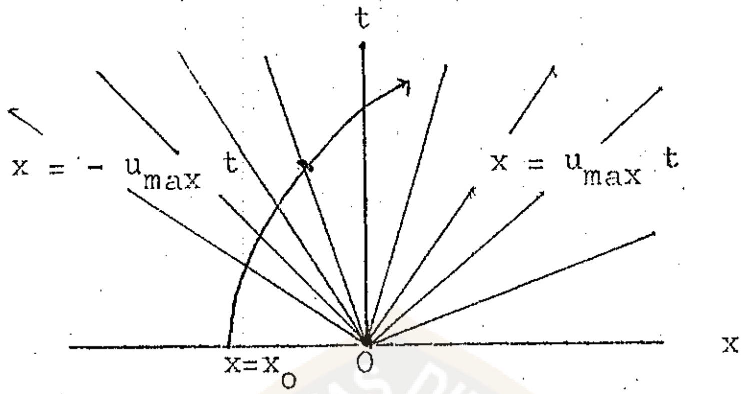
$$x = u_{max}\, t - 2\, (x_o\, u_{max}\, t)^{1/2} \qquad (30)$$

dan kecepatan kendaraannya adalah :

$$\frac{dx}{dt} = u_{max} - \left(\frac{x_o\, u_{max}}{t} \right)^{1/2} \qquad (31)$$

Dari persamaan $t = \frac{x_o}{u_{max}}$ dan $x = - x_o$, kendaraan mulai berjalan dengan kecepatan mula-mula nol, dan kemudian menaik perlahan-lahan, kecepatan selalu lebih kecil dari u_{max} .

Untuk waktu t yang sangat besar, gerakan kendaraan akan mendekati kecepatan maksimum, $\frac{dx}{dt} \longrightarrow u_{max}$ pada waktu $t \longrightarrow \infty$ seperti yang diperlihatkan dalam gambar : 3.3.8 .



Gambar 3.3.8 : Jalur percepatan sebuah kendaraan yang melewati sebuah lampu lalu lintas (traffic light).

Untuk mencari : " model dari waktu yang diperlukan oleh kendaraan dalam melewati lampu lalu lintas " yaitu dengan menentukan $x = 0$ dari persamaan (30), sedemikian hingga :

$$0 = u_{max}\, t - 2 (x_o\, u_{max}\, t)^{1/2}$$

$$0 = (u_{max} t)^{1/2} ((u_{max} t)^{1/2} - 2\, x_o^{1/2}))$$

$$0 = (u_{max}\, t)^{1/2} - 2\, x_o^{1/2}$$

$$0 = u_{max}\, t - 4\, x_o$$

Jadi :

$$t = 4 \frac{x_o}{u_{max}}$$

, yaitu 4 kali lebih lama dari pada bila kendaraan berjalan dengan kecepatan maksimum secara tiba-tiba .

Oleh karena itu tidak perlu melakukan perhitungan apapun seperti pada " arus lalu lintas maksimum " , yang telah diperlihatkan sebelumnya, dan terjadi pada saat :

$u = \frac{u_{max}}{2}$. Persamaan (31) setuju dengan hasil ini .

Telah dicari bahwa sebuah kendaraan mulai pada posisi $x = - x_o$ dan melewati traffic light pada saat :

$$t = \frac{4\, x_o}{u_{max}} \;.$$

Jadi pada saat T (satuan dari waktu), sebuah kendara-an yang mulai dari :

$$x_o = \frac{-u_{max} T}{4}$$ akan berada pada traffic light .

Jumlah kendaraan yang berada diantara batas tersebut :

$$p_{max} \left(\frac{u_{max} T}{4} \right) ;$$ dan merupakan model dari jumlah

kendaraan yang lewat dalam waktu T .

Sebagai contoh :

Untuk traffic light yang menyala selama satu menit, dan dengan diketahui p_{max} = 225 kendaraan perkilometer dan u_{max} = 64 kilometer perjam .

Maka jumlah kendaraan N adalah :

$$N = \frac{225}{4} \, 64 \, \frac{1}{60}$$

$$N = 60 \text{ kendaraan .}$$