BAB II

TINJAUAN BEBERAPA SIFAT MATRIKS DAN SISTIM PERSAMAAN LINIER

2.1 PARTITIONING DAN PEMBATASAN SEBUAH MATRIKS

Untuk mempermudah perhitungan sebuah matriks derajat tinggi dapat dipartisi menjadi submatriks-submatriks. Misalnya matriks A dipartisi menjadi submatriks-submatriks sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array}\right)$$

Partitioning ini dapat dilakukan dengan banyak cara. Jika partitioning akan dipakai untuk perhitungan harus dapat dikerjakan dengan cara-cara yang biasa dipakai dalam mengerjakan matriks biasa.

Misalnya untuk menjumlah matriks A dan B syaratnya kedua matriks harus berukuran sama sehingga cara partitioning kedua matriks ini sedemikian rupa agar tiap-tiap submatriks A dan B berukuran sama pula.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix} \qquad \ldots (1)$$

Dalam hal ini untuk setiap A_{ij} dan B_{ij} yang bersangkutan mempunyai jumlah baris dan jumlah kolom yang sama.

Untuk perkalian matriks dengan partitioning dipakai cara biasa.

$$C_{ij} = \Sigma\, A_{ik}\, B_{kj}$$

Aturan ini hanya dapat dipakai jika A_{ik} dan B_{kj} memenuhi syarat untuk perkalian, artinya jumlah kolom submatriks A_{ik} sama dengan jumlah baris submatriks B_{kj}.

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

Maka hasil kali.

$$C = AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \quad \ldots (2)$$

Perlu diperhatikan bahwa garis partisi antara baris s dan s+1 ditarik sedemikian hingga baris-baris s dan s+1 terpartisi dalam setiap kolom, demikian juga halnya dengan kolom r dan r+1 garis partisi ditarik lurus dari atas kebawah. Bentuk khusus yang penting dari partitioning matriks adalah pembatasan matriks. Jika diketahui matriks bujur sangkar A_{n-1} berorder n-1.

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\ n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\ n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1\ 1} & a_{n-1\ 2} & & a_{n-1\ n-1} \end{pmatrix}$$

Dari matriks ini dapat dibentuk matriks bujur sangkar A_n berorder n dengan menambahkan pada matriks A_{n-1} suatu baris $v_{n-1} = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{n\ n-1})$, kolom $u_{n-1} = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots a_{n-1\ n})$ dan sebuah bilangan a_{nn}.

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & & & & a_{1n} \\ & & & & a_{2n} \\ & & & & \cdot \\ & & & & a_{n-1\ n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$= \begin{pmatrix} A_{n-1} & u_{n-1} \\ v_{n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Maka dapat dikatakan bahwa matriks A_n didapat dengan membatasi matriks A_{n-1}. Aturan operasi pada suatu pembatasan matriks sesuai dengan aturan operasi pada partitioning matriks.

Misalnya.

$$A = \begin{pmatrix} M & u \\ v & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} P & y \\ x & b \end{pmatrix}$$

Beberapa operasi pada pembatasan matriks.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha M & \alpha u \\ \alpha v & \alpha a \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} M+P & u+y \\ v+x & a+b \end{pmatrix} \qquad \ldots (4)$$

$$AB = \begin{pmatrix} MP+ux & My+ub \\ vP+ax & vy+ab \end{pmatrix}$$

Dengan MP dan ux adalah matriks dengan order n-1; My dan ub adalah kolom dengan n-1 elemen, vP dan ax adalah baris dengan n-1 elemen dan vy+ab adalah suatu bilangan.

2.2 INVERS DAN ADJOINT MATRIKS

Suatu matriks bujur sangkar $A = (a_{ij})$ disebut non singulir jika determinannya tidak sama dengan nol. Dalam hal berlawanan dengan ini disebut singulir.

Sebuah matriks B disebut invers dari A jika,

$$AB = I \qquad \ldots .(1)$$

Syarat perlu dan cukup untuk adanya matriks invers adalah matriks A harus non singulir.

Syarat ini dapat dilihat dari hasil kali determinan mat - riksnya, jika $AB = 1$

$$|A|\,|B| = 1$$

maka tentu saja $|A| \neq 0$

Untuk mencari matriks invers, maka ditinjau dahulu adjoint matriks misalnya,

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad \ldots (2)$$

dengan $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

M_{ij} adalah minor dari unsur a_{ij} yang didapat dengan meng - hilangkan baris ke i dan kolom ke j. Dalam hal ini A_{ij} di- tempatkan pada posisi yang sudah ditranspose.

$$AC = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$AC = |A|\, I$$

Demikian juga $CA = |A|\, I$

Maka $AC = CA = |A|\, I$

Dari persamaan diatas dapat diambil

$$B = \frac{1}{|A|} C \qquad \ldots (4)$$

Untuk A non singulir matriks B ini adalah invers dari A.

Selanjutnya akan dibuktikan tunggalnya matriks invers. Misalnya B adalah sebuah matriks demikian hingga AB = BA = I dan D sebuah matriks lain demikian hingga AD = DA = I. Kalikan AB = I dengan perkalian kiri oleh D didapat DAB = DI = D padahal DA = I maka dari pernyataan diatas B = D. Jadi invers adalah tunggal.

Karena inversi matriks dengan adjoint matriks membutuhkan banyak pekerjaan hitungan maka hal ini hanya penting dalam arti teoritis saja. Dalam Bab III akan dibahas secara khusus masalah inversi matriks tersebut.

2.3 POLINOMIAL KARAKTERISTIK

Persamaan

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots (1)$$

Disebut persamaan karakteristik dari matriks $A = (a_{ij})$ bagian kiri persamaan ini secara singkat dapat ditulis dalam bentuk $|A - \lambda I|$ disebut sebagai polinomial karakteristik. Penyelesaian langsung dari fungsi karakteristik umumnya cukup sulit.

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda I| \qquad \ldots (2)$$

$$= (-1)^n \left[\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} \ldots - p_n\right]$$

Maka $p_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ $\qquad \ldots (3)$

$$p_n = (-1)^{n-1} \mid A \mid$$

Dan sisa koefisien p_k adalah jumlah-jumlah yang diambil dengan tanda $(-1)^{k-1}$ dari seluruh minor utama dari determinan matriks A dengan order k. Jumlah minor-minor tersebut adalah sama dengan banyaknya C_n^k.

Akar-akar persamaan karakteristik disebut proper numbers dari matriks A. Hubungan antara akar-akar suatu persamaan dengan koefisien-koefisiennya sebagai berikut:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n = p_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = (-1)^{n-1} p_n = \mid A \mid \qquad \ldots (4)$$

Besarnya $p_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ disebut trace dari matriks A dan diberi simbul tr A.

2.4 PENGERTIAN LIMIT VEKTOR DAN MATRIKS

Ambil suatu barisan vektor-vektor $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots X^{(k)}$ dengan komponen-komponen $(x_1^{(1)}, \ldots x_n^{(1)}), \ldots (x_1^{(k)}, \ldots x_n^{(k)})$. Jika terdapat limit untuk setiap komponen $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ Vektor X dengan komponen $x_1, \ldots x_n$ disebut limit dari barisan $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots X^{(k)}, \ldots$ dan barisan itu sendiri disebut konvergen ke vektor X. Ditulis dalam bentuk $X^{(k)} \longrightarrow X$ atau $\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X$.

Untuk suatu barisan matriks bujur sangkar $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots A^{(k)}, \ldots$ dengan elemen-elemen $(a_{ij}^{(1)}),(a_{ij}^{(2)}), \ldots (a_{ij}^{(k)}), \ldots$ Matriks A dengan elemen-elemen $a_{ij} = \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}$ disebut limit dari barisan.

Sehubungan dengan definisi sebuah limit, suatu infinite series dari vektor-vektor $X^{(1)} + X^{(2)} + \ldots + X^{(k)} + \ldots$ dikatakan konvergen jika $\lim_{k\to\infty} (X^{(1)} + X^{(2)} + \ldots + X^{(k)})$ ada. Limit ini disebut jumlah dari series yang diberikan. Dengan membahas masalah ini, pengenalan terhadap norm vektor dan matriks menjadi sangat perlu dan berguna. Secara umum, norm dari sebuah vektor X adalah bilangan non negatif $\| X \|$ yang memenuhi syarat sebagai berikut:

1. $\| X \| > 0$ untuk $X \neq 0$ dan $\| 0 \| = 0$
2. $\| CX \| = |C| \| X \|$ untuk sebarang bilangan pengganda C
3. $\| X+Y \| \leq \| X \| + \| Y \|$

Dari syarat 2 dan 3 didapat

$$\| X-Y \| \geq \big| \| X \| - \| Y \| \big|$$

Bukti : $\| X \| = \| X-Y+Y \| \leq \| X-Y \| + \| Y \|$

$$\| X-Y \| \geq \| X \| - \| Y \| \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\| X-Y \| = \| Y-X \| \geq \| Y \| - \| X \| \qquad \ldots \quad (2)$$

Dari 1 dan 2 didapat

$$\| X-Y \| \geq \big| \| X \| - \| Y \| \big|$$

selanjutnya dalam penetapan sebuah norm dipakai 3 cara berikut :

jika $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$

I $\quad \| X \|_I = \max_i |x_i|$

II $\quad \| X \|_{II} = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_n|$

III $\quad \| X \|_{III} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$

Jelas bahwa untuk ketiga norm diatas semua syarat 1-3 terpenuhi. Norm ketiga yang dipakai diatas tidak lain adalah panjang vektor. Syarat perlu dan cukup untuk baris vektor $X^{(k)}$ konvergen ke vektor X adalah $\| X^{(k)} - X \| \to 0$ untuk ketiga norm yang disebut diatas.

Untuk norm kesatu masalahnya sudah jelas, sedang untuk norm ke 2 dan 3 dapat dijelaskan dengan ketidaksamaan.

$$\| X \|_I \leq \| X \|_{II} \leq n \| X \|_I$$

$$\| X \|_I \leq \| X \|_{III} \leq \sqrt{n} \| X \|_I$$

Secara analog, norm dari matriks bujur sangkar adalah suatu bilangan non negatif yang memenuhi syarat-syarat :

1. $\| A \| > 0$ jika $A \neq 0$ dan $\| 0 \| = 0$
2. $\| CA \| = | C | \, \| A \|$
3. $\| A+B \| \leq \| A \| + \| B \|$
4. $\| AB \| \leq \| A \| \, \| B \|$

Analog pada norm vektor, syarat perlu dan cukup untuk ba - ris matriks $A^{(k)}$ konvergen ke matriks A adalah

$\| A^{(k)} - A \| \longrightarrow 0$

Norm dari matriks dapat ditulis dalam berbagai cara. Karena kebanyakan persoalan adalah penghitungan dari matriks - matriks dan vektor-vektor secara bersamaan maka untuk me - nuliskan norm dari matriks sedemikian hingga secara rational berkaitan dengan norm dari vektor.

Suatu norm matriks adalah cocok dengan suatu norm vektor yang diketahui jika untuk sebarang matriks A dan sebarang vektor X dipenuhi ketidaksamaan.

$$\| AX \| \leq \| A \| \, \| X \|$$

Suatu cara membentuk norm matriks yang cocok dengan suatu norm vektor yang diketahui adalah.

$$\| A \| = \max_{\|X\|=1} \| AX \|$$

Bentuk norm matriks ini dikatakan sebagai subordinat norm vektor yang diketahui.

Untuk 1. $\| X \|_I = \max_i | x_i |$

Subordinat norm matriks pada norm vektor ini adalah.

$$\| A \|_I = \max_i \sum_{k=1}^{n} | a_{ik} |$$

Untuk 2. $\| X \|_{II} = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$

Subordinat norm matriks pada norm vektor ini adalah.

$$\| A \|_{II} = \max_k \sum_{i=1}^{n} | a_{ik} |$$

Untuk 3. $\| X \|_{III}^2 = \sum_{k=1}^{n} | x_k |^2$

Subordinat norm matriks pada norm vektor ini adalah.

$$\| A \|_{III} = \sqrt{\lambda_1}$$

Dimana λ_1 adalah proper numbers terbesar pada matriks $A'A$

2.5 ATURAN RANK PADA SISTIM PERSAMAAN LINIER

Rank r_A dari suatu matriks A ialah maksimum banyaknya baris yang bebas linier dari matriks itu disebut juga rank baris. Ada juga rank kolom yaitu maksimum banyaknya kolom yang bebas linier dari matriks itu.

Tetapi selalu berlaku rank baris = rank kolom = rank matriks. Selanjutnya akan ditinjau rank pada sistim persamaan linier non homogen.

Sistim n persamaan dengan n bilangan tak diketahui.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n \end{array} \qquad \ldots (1)$$

Atau ditulis

$$AX = b$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \quad A_b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Maka terdapat dua kemungkinan :

1. $r_A < r_{A_b}$
2. $r_A = r_{A_b}$

Pada kemungkinan pertama $r_A < r_{A_b}$ berarti kolom terakhir matriks A_b harus bebas linier dari kolom-kolom matriks A karena jika kolom terakhir bergantung linier dari kolom-kolom matriks A maka kolom terakhir ini dapat dihilangkan dan akan terjadi $r_A = r_{A_b}$. Jadi kolom terakhir dari A_b bebas linier dari kolom-kolom matriks A, maka tidak ada harga x_1, x_2, . . . x_n yang memenuhi persamaan-persamaan sistim (1). Sehingga sistim persamaan tidak mempunyai solusi.

Pada kemungkinan kedua $r_A = r_{A_b}$.

Jika $r_A = r_{A_b} = k$ maka matriks A dan A_b mempunyai maksimum k kolom yang bebas linier. Andaikan k kolom yang pertama bebas linier maka kolom terakhir dari matriks A_b harus bergantung linier dari k kolom pertama tadi, sehingga ada harga-harga x_1, x_2, . . . x_k yang memenuhi persamaan

$x_1A_1 + x_2A_2 + \cdot \cdot \cdot + x_kA_k = b$.

Kesimpulannya jika $r_A = r_{A_b}$ maka setidak-tidaknya ada satu solusi dari sistim persamaan.

$r_A > r_{A_b}$ tidak mungkin terjadi karena selalu berlaku rank baris = rank kolom.