## B A B III.

## HIMPUNAN TERURUT SEDERHANA

Urutan dan urutan parsial dalam himpunan S tidak menjamin keterbandingan dari setiap dua elemen S.
Sebagai contoh dalam himpunan terurut parsial :

$\{(a;b),(m;n),(p;q)\}$

tidak ada satu elemen pun yang ada didalam pasangan kurung- menjadi dapat dibandingkan dengan elemen yang ada didalam - pasangan kurung yang lain.

### 1. Definisi himpunan terurut sederhana.

Definisi 12 : Urutan parsial $\leq$ didalam suatu himpunan S disebut urutan sederhana didalam S, jika : $x \leq y$ atau $y \leq x$. Untuk setiap dua elemen x dan y.

Karena itu himpunan terurut parsial $(S, \leq)$ disebut- himpunan terurut sederhana bila $\leq$ adalah urutan sederhana didalam S.
Jadi himpunan terurut sederhana adalah himpunan terurut- parsial dimana setiap dua elemen adalah dapat dibandingkan. Secara ekivalen dan sesuai dengan persamaan (15), - himpunan terurut parsial $(S, \leq)$ adalah himpunan terurut- sederhana dimana :

$x \leq y$ atau $y < x$ untuk setiap dua elemen x dan y dari S ,

atau memenuhi syarat :

$x < y$ atau $y < x$ untuk setiap dua elemen tertentu dari S - yaitu x dan y.

Jelaslah bahwa seperti biasanya $x < y$ berarti $x \leq y$ dan - $x \neq y$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
( http://eprints.undip.ac.id )

Sebagai contoh : $\{(a,a),(b,b),(c,c),(c,b),(b,a),(c,a)\}$ Uritan sederhana dalam himpunan S $\{a,b,c\}$ .

maka dapat ditulis :

$(\{a,b,c\}, \{(a,a),(b,b),(c,c),(c,b),(b,a),(c,a)\})$

adalah himpunan terurut sederhana yang menurut catatan 2 dapat ditulis $\{(c;b;a)\}$.

Jelaslah bahwa urutan parsial asli $\leq$ yang diberikan dalam persamaaan (3) adalah urutan sederhana dalam semba rang bilangan alam n, demikian juga dalam himpunan $\omega$ da ri semua bilangan alam.

Contoh himpunan yang bukan terurut sederhana :

$\{(a_1;a_2;a_3;......),(b_1;b_2;......)\}$

Lemma 5 : Misalkan L adalah irisan bawah dari himpunan - terurut sederhana $(S,\leq)$. Jika $y\in(S \setminus L)$, maka $x<y$ untuk setiap $x\in L$. Lebih jauh lagi jika : $m$ = lub L ada maka $L = I(m)$.

Bukti.

Karena S adalah terurut sederhana, $x<y$ atau $y \leq x$. Namun demikian $y\leq x$ adalah tidak mungkin, sebab hal ini (menurut kenyataannya bahwa irisan bawah L dari S) akan me - ngandung maksud bahwa $y\in L$. Lebih jauh lagi jika - $m$ = lub L dan $x<m$, maka $x\in L$, karena kalau tidak x m - bertentangan dengan $x<m$. Jadi sesungguhnya $L = I(m)$.

Theorema 13 : Misalkan D adalah himpunan semua irisan ba wah dari himpunan terurut sederhana $(S,\leq)$ Maka $(D,\subset)$ merupakan himpunan terurut se- derhana deng n syarat yang lengkap.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
( http://eprints.undip.ac.id )

Bukti.

Dalam theorema 9 disebutkan dengan memisalkan L dan $L_1$ -

adalah dua irisan bawah dari S. Anggaplah $L_1 \not\subset L$, karenanya akan ada satu elemn $y \in S$ sedemikian hingga $y \in L_1$ - Misalkan x adalah sembarang elemen dari L. Karenanya $y \notin L$, dengan lemma 5 kita akan memperoleh $x \leq y$. Namun demikian karena $y \in L_1$ kita tahu bahwa $x \in L_1$. Jadi $L \subset L_1$ - dan karena itu maka theorema 13 terbukti.

<u>Theorema 14</u> : Misalkan $(S, \leq)$ adalah himpunan terurut sederhana. Maka himpunan dari semua segmen - awal dari S akan menjadi terurut sederhana dengan $\subset$.

<u>Bukti</u>.

Kita memisalkan dengan menganggap kebalikan dari theorema 14 untuk membuktikannya. Dari sini maka $c \in S$ sedemikian hingga $c \in I(a)$ dan $c \notin I(b)$. Juga akan ada $e \in S$ sedemikian hingga $e \notin I(a)$ dan $e \in I(b)$, Namun demikian $c \leq e$ atau $e \leq c$ yang berarti $c \in I(b)$ atau $e \in I(a)$ yang tidak mungkin terjadi. Kontradiksi dengan pemisalan kita. Jadi theorema 14 terbukti.

<u>Theorema 15</u> : Himpunan terurut sederhana $(S, \leq)$ adalah - rapat jika dan hanya jika setiap segmen - awal tidak kosong dari S merupakan irisan-bawah dari S.

<u>Bukti.</u>

Dengan jaminan dari theorema 11 untuk pembuktian theorema ini maka sekarang misalkan a dan b adalah dua elemen-dari S sedemikian hingga $a < b$. Jelaslah I(b) tidak kosong Anggaplah I(b) adalah irisan bawah dari S. Karena $a \in I(b)$ dan karena S adalah terurut sederhana, maka pasti akan - ada elemen $c \in S$ sedemikian hingga $a < c < b$.

Jadi $(S, \leq)$ adalah rapat seperti yang kita inginkan.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
( http://eprints.undip.ac.id )

2. Kontinyuitas.

Definisi 13 : Himpunan terurut sederhana $(S, \subseteq)$ disebut-kontinu bila S adalah rapat dan dengan syarat yang lengkap.

Contoh yang tidak kontinu :

$\{(......a_2;a_1;b_1;b_2;.......)\}$

Theorema 16 : Misalkan $(S, \subseteq)$ adalah kontinu. Suatu himpunan bagian L dari S adalah irisan bawah-dari S jika dan hanya jika L merupakan segmen awal dari S.

Bukti.

$\Longrightarrow$

Menurut lemma 5 yang mengatakan bahwa misalkan L adalah-irisan bawah dari himpunan terurut sederhana $(S, \leq)$ jika $y \in (S \setminus L)$, maka $x < y$ untuk setiap $x \in L$. Lebih jauh lagi-jika $m = \text{lub } L$ ada maka $L = I(m)$. Dan juga menurut theorema 11 yang mengatakan bahwa misalkan $(P, \leq)$ adalah himpunan terurut parsial yang rapat.

$\Longleftarrow$

Jika segmen awal I(b) tidak kosong, maka I(b) adalah irisan bawah dari P. Dengan melihat kedua pernyataan diatas maka kita bisa menyimpulkan bahwa misalkan $(S, \leq)$ adalah kontinu. Suatu himpunan bagian L dari S adalah irisan - bawah dari S jika dan hanya jika L merupakan segmen awal dari S. Sehingga theorema 16 terbukti.

Theorema 17 : Misalkan D adalah himpunan semua irisan bawah dari himpunan terurut sederhana yang - rapat $(S, \leq)$. Maka $(D, \subset)$ adalah kontinu.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
http://eprints.undip.ac.id

Bukti.

Dari theorema 13, didapat bahwa $(D, \subset)$ merupakan himpunan terurut sederhana dengan syarat yang lengkap, maka kita harus membuktikan bahwa $(D, \subset)$ adalah rapat. Sekarang misalkan $D_1$ dan $D_2$ merupakan dua irisan bawah tertentu sedemikian hingga $x \in D_2$ dan $x \notin D_1$. Sebab x tidak dapat menjadi elemen terakhir dari $D_2$ maka akan ada $y \in D_2$ sedemikian hingga $x < y$, tetapi kemudian dengan theorema 15 sedemikian hingga $D_1 \subset I(y) \subset D_2$. Jadi $(D, \subset)$ adalah rapat Maka theorema 17 terbukti.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
( http://eprints.undip.ac.id )