B A B. II

HIMPUNAN TERURUT PARSIAL

Sekali lagi kita dalam mendefinisikan himpunan terurut parsial berdasarkan pada sifat-sifat yang dikenal pada relasi "lebih kecil dari pada atau sama dengan" yang sering menggunakan simbol .

1. Definisi himpunan terurut parsial.

Definisi 1 : Suatu himpunan bagian P dari hasil ganda - ganda cartesius S x S disebut suatu urutan parsial dalam himpunan S jika dipenuhi 3 - syarat :

(i). $(x,x) \in P$, untuk setiap eleman x dari- S.

(ii). Jika $(x,y) \in P$ dan $(y,x) \in P$, maka - $x = y$ untuk setiap dua elemen x dan y dari S.

(iii), Jika $(x,y) \in P$ dan $(y,x) \in P$, maka - $(x,z) \in P$, untuk setiap tiga elemen - x,y dan z dari S.

Syarat (i), (ii), (iii) menyatakan bahwa urutan - parsial merupakan relasi yang reflexive, antisymetris - dan transitive.

Catatan 1 : Untuk memudahkan memberikan contoh, maka - apa yang dinyatakan dalam huruf yang berbeda berarti himpunan yang berbeda pula.

Contoh.

$S = \{a,b,c\}$

1. $P = \{(a,a),(a,b),\ (b,b),(c,c)\}$ ....(1).
   Jelas P adalah urutan parsial dalam S dan relasi P - adalah reflexive, antisymetris dan transitive.
2. $P = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c)\}$
   P bukan urutan parsial dalam S sebab relasi P hanya- reflexive dan antisymetris tetapi tidak transitive - yaitu dengan $(a,c) \notin P$.
3. $P = \{(a,a),(a,b),(b,c),(a,c)\}$
   P bukan urutan parsial dalam S sebab relasi P hanya- antisymetris dan transitive tetapi tidak reflexive - yaitu dengan $(b,b) \notin P$.
4. $P = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$
   P bukan urutan parsial dalam S sebab relasi P hanya- transitive dan reflexive tetapi tidak antisymetris - yaitu dengan $a \neq b$.

Mari kita amati bahwa konversi dari suatu relasi u rutan parsial dalam suatu himpunan adalah urutan parsi al juga dalam himpunan tersebut. Yang mana kita beri su atu notasi P_{-1}

<u>Contoh</u>.

Misalkan $P = \{(a,a),(a,b),(b,b),(c,c)\}$

$$P_{-1} = \{(a,a),(b,a),(b,b),(c,c)\}$$

Jelaslah P_{-1} adalah urutan parsial juga dalam himpunan- S.

Dengan jelas bahwa dalam himpunan yang sama, misal $S = \{a,b,c\}$ kita dapat mempunyai beberapa urutan parsial yang berbeda .

<u>Contoh</u>.

$Q = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$

$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\}$ ....(2).

$M = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(a,c)\}$

Simbol   sering kali dipakai untuk menunjukkan -

urutan parsial sembarang dalam suatu himpunan. Jadi - bisa berarti P.

Contoh.

$P = \{(a,a),(a,b),(b,b),(c,c)\}$

$= \{(a,a),(a,b),(b,b),(c,c)\}$

Dalam hubungan ini, jika (x,y) adalah elemen dari urutan parsial maka kenyataan ini dapat ditunjukkan dengan : $\leq (x,y)$ atau $\geq (y,x)$ atau $x \leq y$ atau $y \leq x$.

Jadi untuk P = (a,a),(a,b),(b,b),(c,c)

mempunyai : $a \leq a$, $b \leq b$, $c \leq c$, $a \leq b$.

Definisi 2 : Suatu pasangan berurutan $(S, \leq)$ disebut sebagai himpunan terurut parsial bila adalah urutan parsial dalam himpunan S.

Contoh.

misalkan $S = \{a,b,c\}$

maka $(\{a,b,c\}, \{(a,a),(a,b),(b,b),(c,c)\})$ adalah - himpunan terurut parsial.

Dalam prakteknya, dari pada $(S, \leq)$ disebut sebagai himpunan terurut parsial dan dikatakan S adalah himpunan - terurut parsial oleh .

Misalkan $S = \{a.b.c\}$ dan Q,R dan M yang diberikan oleh persamaan (2) maka :

(S,Q) = S adalah terurut parsial oleh Q.

(S,R) = S adalah terurut parsial oleh R.

(S,M) = S adalah terurut parsial oleh M.

masing-masing disebut himpunan terurut parsial .

Selanjutnya $x \leq y$ dibaca :"x lebih kecil atau sama dengan y", "x sama atau mendahului y" atau "y lebih besar - atau sama dengan x" atau "y sama atau melebihi x".

Misal himpunan $(S, \leq)$ adalah himpunan terurut parsial - jika untuk dua elemen x dan y benar bahwa $x \leq y$, yaitu -

$(x,y) \in (\leq)$ maka x dan y disebut dapat dibandingkan.

Jika dua elemen x dan y dari himpunan terurut parsial $(S, \leq)$ tidak dapat dibandingkan, maka kita dapat menuliskan dengan : $x \nleq y$ dan $y \nleq x$.

Dari reflexivitas urutan parsial, jika S adalah himpunan terurut parsial maka setiap elemen adalah dapat dibandingkan terhadap elemen itu sendiri.
Namun dari ketiga buah syarat dari definisi urutan parsial tidak ada yang menyatakan bahwa dua elemen dari himpunan terurut parsial adalah dapat dibandingkan.

Contoh.

$S = \{a,b,c\}$ merupakan terurut secara parsial oleh Q dari persamaan (2) jelas tidak ada dua elemen yang dapat dibandingkan.

Contoh yang klasik.

Jika untuk setiap dua elemen x dan y dari himpunan S kita menulisnya $x \leq y$ jika dan hanya jika $x \subset y$.
Selanjutnya kita dapat melihat bahwa :
$(S, \subset)$ adalah terurut secara parsial oleh $\subset$.
$(S, =)$ adalah terurut secara parsial oleh $=$.
Sebaliknya jika untuk setiap dua elemen $\in$ S, ditulis :
$(S, \in)$ bukan merupakan himpunan terurut parsial.
Jika untuk setiap dua elemen x dan y dari bilangan alam n maka dapat ditulis dengan :

$x \leq y$ jika dan hanya jika $(x \in y) \vee (x = y)$ ....(3).

Kita melihat segera bahwa untuk setiap bilangan alam n-
$(n, (\in \text{atau} =))$ merupakan himpunan terurut parsial.
Demikian juga himpunan dari semua bilangan alam adalah terurut parsial persamaan (3). Hal ini disebut urutan parsial yang asli.

Hal yang sangat penting dan erat hubungannya dengan relasi urutan parsial adalah relasi urutan. Motivasi kita dalam mendefinisikan suatu urutan didasarkan pada-hal-hal yang biasa berlaku pada relasi "lebih kecil" dengan notasi $<$.

Definisi 3 : Suatu himpunan bagian E dari hasil ganda - cartesius S x S disebut suatu urutan dalam himpunan S jika dipenuhi 2 syarat :

(i). $(x,x) \notin E$ untuk setiap elemen x dari S

(ii). Jika $(x,y) \in E$ dan $(y,z) \in E$, maka - $(x,z) \in E$, untuk setiap tiga elemn x,y dan z dari S.

Syarat (i) dan (ii) ini menyatakan secara berurutan bahwa urutan ini adalah relasi irrefoexivie dan relasi transitive.

Contoh.

$E = \{(a,b),(c,d)\}$ adalah urutan dalam himpuna $\{a,b,c,d\}$

Simbol "$<$" seringkali dipakai untuk menyatakan suatu urutan sembarang dalam suatu himpunan $\{a,b,c,d\}$ yaitu : $< = \{(a,b),(c,d)\}$

Disini juga pasangan berurutan $(S, <)$ disebut himpunan-yang terurut oleh $<$.

Misalkan $(S, <)$ merupakan himpunan terurut. Jika - untuk dua elemen x dan y dari S, berlaku bahwa $(x,y) \in (<)$. Maka hal ini dinyatakan dengan :

$<(x,y)$ atau $>(y,x)$ atau $x<y$ atau $y>x$.

dan dalam hubungan ini kita katakan bahwa dalam himpunan S yang terurut oleh $<$, elemen x dan y adalah dapat dibandingkan.

Jika dua elemen x dan y dari himpunan terurut - $(S, <)$ tidak dapat dibandingkan, maka kita menyebutnya-dengan $x \nless y$ dan $y \nless x$.

<u>Lemma 1</u> : Misalakan $(S, <)$ adalah himpunan terurut. Maka untuk setiap dua elemen x dan y dari S :

$(x < y) \longrightarrow (y \not< x)$.

<u>Bukti.</u>

Andaikan bahwa $x < y$ dan $y < x$, maka menurut transitivitas dari $<$, kita harus mempunyai $x < x$ yang kontradiksi dengan irreflexivutas dari $<$.

<u>Lemma 2</u> : Misalkan $(S, \leq)$ adalah himpunan terurut secara parsial. Maka untuk setiap dua elemen x dan y dari S, kita dapat menuliskan dengan : $x < y$ jika dan hanya jika $(x \leq y) \wedge (x \neq y)$. Maka $(S, <)$ merupakan himpunan terurut.

<u>Bukti.</u>

Kita bandingkan antara definisi urutan parsial dengan definisi urutan maka akan tampak bahwa lemma 2 ini merupakan hubungan antara urutan parsial dan urutan dalam suatu himpunan.

<u>Lemma 3</u> : Misalakan $(S, <)$ adalah himpunan terurut. Untuk setiap dua elemen x dan y dari S, kita dapat menuliskan dengan :

$x \leq y$ jika dan hanya jika $(x < y) \vee (x = y)$.

Maka $(S, \leq)$ merupakan himpunan terurut parsial.

<u>Bukti.</u>

Ini juga merupakan perbandingan dari pengertian urutan dan urutan parsial dari suatu himpunan.

<u>Catatan 2</u> : Untuk memudahkan dalam memberikan contoh mari kita setujui suatu konfigurasi seperti himpunan :

$\{ \ldots(\ldots;a;b;\ldots;c;\ldots),(\ldots m;n;\ldots),\ldots) \}$ .....(4).
akan mewakili himpunan terurut parsial $(S, \leq)$ dimana -
$S = \{ \ldots, a, b, \ldots, c, \ldots, m, n, \ldots \}$ ......(5).

Konsekuensinya dalam suatu konfigurasi seperti (4) elemen-elemen dari S yang berbeda dalam kurung yang sama adalah dapat dibandingkan dan elemen-elemen yang menjadi bagian pada kurung yang berbeda tidaklah dapat dibandingkan.

Jadi menurut (4) urutan parsial yang diberikan (1) akan diwakili oleh $\{ (a;b),(c) \}$.
Mari kita amati bahwa konfigurasi dari (4) memberikan - informasi yang berhubungan dengan kedua himpunan S dan- urutan parsial $\leq$ (atau urutan dari $<$) dalam S.
Jelaslah bila kita mengatakan himpunan terurut parsial-
$A = \{ (a;b),(c;d) \}$ yaitu yang dimaksud adalah :
Himpunan dengan $S = \{ a,b,c,d \}$ dan
Urutan parsialnya $\{ (a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(c,d) \}$

2. <u>Elemen-elemen dari himpunan terurut parsial</u>.

<u>Definisi 4</u> : Misalkan $(S, \leq)$ himpunan terurut parsial - suatu elemen $a \in S$ disebut elemen minimal - dari S ialah apabila :
Untuk semua x yang memenuhi $x \leq z$ maka $x = a$.
Secara sama suatu elemen $m \in S$ disebut sebagai elemen maximal dari S ialah apabila :
Untuk semua x yang memenuhi $a \leq x$ maka $x = a$.

Dengan kata lain a adalah elemen minimal dari S jika tidak ada elemen dari S yang mendahului a. Sebaliknya elemen m adalah elemen maximal dari S jika tidak ada elemen dari S yang melebihi m.

Himpunan terurut parsial bisa mempunyai atau tidak mempunyai elemen minimal ataupun elemen maximal.

Contoh.

1. Himpunan yang mempunyai elemen minimal.

   $A = \{(a)\}$

   $B = \{(a;b),(d;e)\}$

   $C = \{(a;b),(c;\ldots;d_2;d_1;c_1;c_2;\ldots;h),(\ldots;m_2;m_1)\}$

   $D = \{(\ldots;a_2;a_1;\ldots;b_2;b_1;c_1;c_2;\ldots;d_2;d_1),(a;b;c)\}$

   Disini terlihat bahwa himpunan A dan D mempunyai sebuah elemen minimal , sedangkan himpunan B dan C mempunyai dua elemen minimal.

2. Himpunan yang tidak mempunyai elemen minimal.

   $E = \{(\ldots;a_2;a_1;b_1;b_2;\ldots)\}$

   $F = \{(\ldots;a_2;a_1;b_1;b_2;\ldots),(\ldots;c_2;c_2;e_1;e_2;\ldots)\}$

3. Himpunan yang mempunyai elemen maximal.

   Seperti pada contoh no. 1 pada himpunan-himpunan : A,B,C,D. Disini terlihat bahwa himpunn B dan D mempunyai dua elemen maximal dan C mempunyai tiga buah - elemen maximal serta A mempunyai sebuah elemen maximal.

4. Himpunan yang tidak mempunyai elemen maximal sama seperti pada contoh 2 tentang himpunan E dan F masing-masing juga tidak mempunyai elemen maximal.

Definisi 5 : Misalkan $(S,\leq)$ adalah himpunan terurut - parsial. Suatu elemen $p \in S$ disebut elemen-pertama dari S ialah apabila :

$p \leq x$ untuk setiap $x \in S$.

Sebaliknya suatu elemem $g \in S$ disebut elemen terakhir dari S ialah apabila :

$x \leq g$ untuk setiap $x \in S$.

Jika didalam S terdapat suatu elemen p sedemikian hingga $p \leq x$ untuk setiap $x \in S$, maka p adalah tunggal, sebab jika $q \in S$ sedemikian hingga $q \leq x$ untuk setiap $x \in S$ maka mungkin $p \leq q$ atau $q \leq p$. Namun menurut transitivitas $\leq$ - menjadi $p = q$. Jadi p adalah tunggal dan kita menyebutnya p adalah elemen pertama dari S.

Demikian juga jika didalam S terdapat suatu elemen t sedemikian hingga $x \leq t$ untuk setiap $x \in S$, maka t adalah - tunggal. Sebab jika $u \in S$ sedemikian hingga $x \leq u$ untuk - setiap $x \in S$ maka mungkin $t \leq u$ atau $u \leq t$. Namun demikian menurut transitivitas $\leq$ menjadi $t = u$. Jadi t adalah - tunggal dan kita menyebutnya t adalah elemen terakhir - dari S.

Definisi 5 menyatakan bahwa elemen terkecil atau - elemen terbesar dari himpunan terurut parsial pasti dapat dibandingkan terhadap setiap elemen S.

Sedangkan menurut definisi 4 untuk elemen minimal dan - elemen maximal dalam himpunan terurut parsial tidak harus dapat dibandingkan.

Jadi setiap elemen pertamapasti elemen minimal dan setiap elemen terakhir pasti juga elemen maximal. Tetapi tidak sebaliknya, yaitu setiap elemn minimal belum tentu- elem npertama dan setiap elemn maximal belum tentu elemen terakhir.

<u>Contoh</u>.

1. $A = \{a\}$

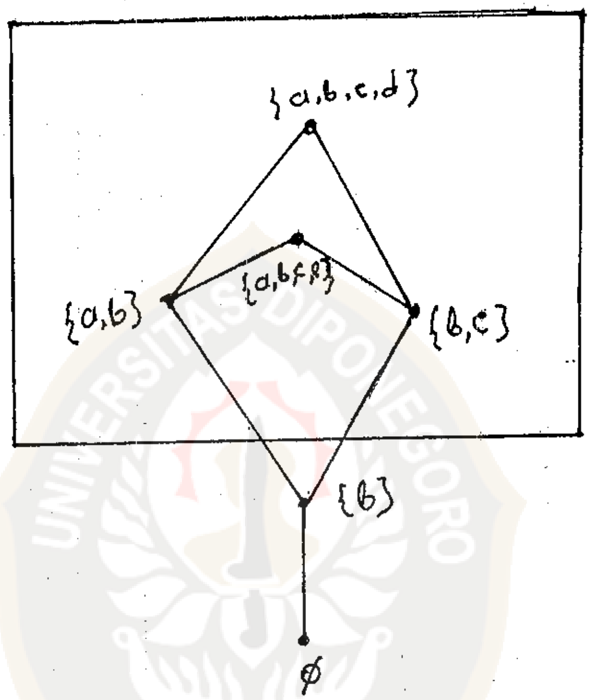
   Disini himpunan A sekaligus mempunyai elemen minimal elemen maximal, elemen pertama dan elemen terakhir. Yaitu a itu sendiri.

2. $G = \{(a_1; a_2; a_3; \ldots; b_3; b_2; b_1)\}$

   Himpunan G ini mempunyai elemen pertama dan elemen - minimal a_1 dan elemen terakhir /elemen maximal b_1.

3. Himpunan-himpunan B,C,D,E,F dalam persamaan (6) tidak mempunyai elemen pertama dan tidak mempunyai elemen terakhir.

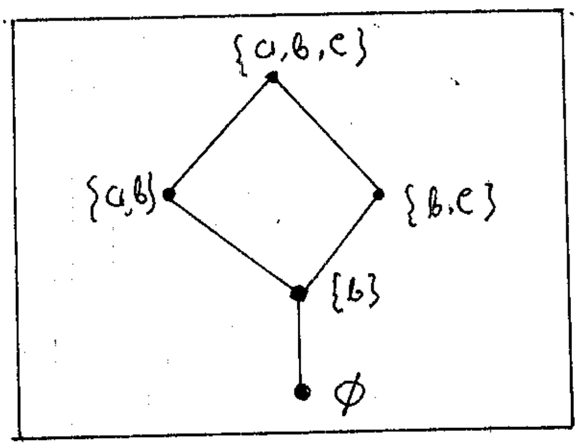
4.



Elemen pertamanya tidak ada, sedangkan elemen minimalnya { a,b } dan { b,c } .

Elemen terakhirnya juga tidak ada, tetapi elemen maximalnya { a,b,c,e } dan { a,b,c,d } .

5



Elemen pertama = elemen minimal yaitu { ∅ } .

Elemen terakhir = elemen maximal yaitu { a,b,c } .

3. Batas-batas dari himpuna terurut parsial.

Definisi 6 : Misalkan $(S, \subseteq)$ merupakan himpunan terurut parsial. Suatu elemen $w \in S$ disebut batas - bawah dari himpunan bagian A dari S apabila : $w \leq x$ untuk setiap $x \in A$.

Sebaliknya elemen $v \in S$ disebut batas atas - dari himpunan bagian A dari S apabila : $x \leq v$ untuk setiap $x \in A$.

Contoh.

1. $G = \{(a_1;a_2;a_3;\ldots;b_3;b_2;b_1)\}$

   Maka batas bawah untuk himpunan $B = \{b_1,b_2,b_1,\ldots\ldots\}$ adalah himpunan $A = \{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$, namun demikian tidak satupun merupakan elemen dari himpunan B.
2. $E = \{(a;b),(c;..;d_2;d_1;e_1;e_2;\ldots;h),(\ldots;m_2;m_1)\}$

   Maka c dan h merupakan batas bawah dan batas atas dari himpunan $H = \{c,\ldots,d_2,d_1,e_1,e_2,\ldots,h\}$ E - dan c serta h adalah anggota H.

Himpunan bagian terurut parsial bisa mempunyai atau tidak mempunyai batas atas atau batas bawah.

Definisi 7 : Jika suatu himpunan bagian A dari himpunan terurut parsial mempunyai batas bawah, maka A disebut terbatas kebawah. Jika A mempunyai batas atas maka A disebut terbatas-keatas. Dana jika A mempunyai batas atas - dan batas bawah, maka A disebut himpunan - yang terbatas.

Mungkin juga terjadi bahwa himpunan L dari semua - batas bawah dari sebuah himpunan bagian A dari himpunan terurut parsial S mmpunyai elemn terbesar g. Jelaslah g adalah tunggal dan konsekuensinya tepatlah bila disebut batas bawah terbesar dari A. Memang $g \in L$, tetapi g tidak perlu harus anggota A.

Batas bawah terbesar dari himpunan bagian A dari himpunan terurut parsial S yang juga disebut "Infinum" dari A dan biasanya dinyatakan dengan : glb A atau Inf A.

Mungkin juga terjadi bahwa himpunan U dari semua batas atas dari himpunan bagian A dari suatu himpunan terurut parsial mempunyai elemen terkecil v. Jelaslah bahwa v adalah tunggal dan konsekuensinya tepat untuk menyebutnya batas atas terkecil dari A. Memang $v \in U$, tetapi v tidak perlu anggota A.

Batas atas terkecil dari himpunan bagian A dari himpunan terurut parsial S disebut "Supremum" dari A dan dinyatakan dengan Lub A atau Sup A.

Perhatikan himpunan bagian $A = \{ \ldots, b_1, c_1, b_2, c_2, \ldots \}$ dari himpunan terurut parsial yang diberikan oleh D dalam persamaan (6). Meskipun A terbatas keatas, itu tidak mempunyai batas atas terkecil. Sebaliknya glb A = a_1 jelaslah $a_1 \notin A$.

Selanjutnya perhatikan himpunan bagian :

$E = \{ b_1, b_2, \ldots \}$

dari himpunan terurut parsial pada persamaan (7), meskipun B terbatas kebawah, tidak ada batas bawah terbesar. Sebaliknya lub B = b_1. dan $b_1 \in B$.

<u>Theorema 1</u> : Suatu himpunan terurut parsial $(S, \leq)$ mempunyai elemen terkecil jika dan hanya jika himpunan kosong $\emptyset$ mempunyai batas atas dalam S.

Bukti.

$\Longrightarrow$

Pertama kita amati bahwa setiap elemn $x \in S$ adalah batas atas dari $\emptyset$. Tetapi jika $x \in S$ maka $(\forall y)(y \in \emptyset \longrightarrow y \leq x)$ adalah benar karena antesedennya salah dari implikasi ini. Sekarang jika S mempunyai elemen terkecil v, maka v adalah yang terkecil dari semua batas atas dari $\emptyset$.

$\Longleftarrow$

Secara konversi maka karena elemen $x \in S$ adalah batas - atas dari $\emptyset$, maka selanjutnya bahwa jika $\emptyset$ mempunyai batas terkecil, katakan v maka v pasti merupakan elemen - terkecil.

Catatan 3 : Seperti yang terdahulu, konversi P_{-1} dari - setiap urutan parsial P dalam suatu himpunan S adalah urutan parsial juga dalam himpunan S. Selanjutnya $(P_{-1})_{-1} = P$. Jadi himpunan terurut parsial (S,P_{-1}) dual dari - (S,P) dan P_{-1} dualnya P.

Sekarang misalkan (S,P) adalah himpunan terurut - parsial dan (S,P_{-1}) adalah dualnya. Menurut definisi dari 4,5, dan 6 maka kita ketahui bahwa elemen tertentu : seperti elemen minimal, elemen maximal, elemen pertama- dan elemen terakhir demikian juga dengan batas bawah, - batas atas, batas bawah terbesar dan batas atas terkecil dari himpunan bagian A dari S sesuai dengan (S,P) , menjadi pasangannya yaitu : elemen maximal, elemen minimal, elemen terakhir, elemen pertama dan juga batas - atas, batas bawah, batas atas terkecil dan batas bawah- terbesar, dari himpunan bagian A dari S sesuai dengan - (S,P_{-1}).

Pasangan yang disebut diatas dari elemen bagian dari himpunan terurut parsial tersebut, sebagai dual dari elemen tertentu itu.

<u>Lemma 4</u> : Misalkan (S,P) adalah himpunan terurut parsial. Kemudian elemen tertentu dari himpunan bagian A dari S sesuai dengan (S,P) menjadi dualnya untuk A sesuai dengan (S,P_{-1}).

<u>Bukti</u>.

Seperti yang sudah kita ketahui bersama bahwa konversi P_{-1} dari setiap urutan parsial P dalam suatu himpunan S adalah urutan parsial juga. Dengan keterangan tersebut jelas bahwa lemma tersebut dapat terbukti. Jadi glb A dalam (S,P) menjadi lub A dalam (S,P_{-1}).

<u>Theorema 2</u> : (Theorema dualitas). Misalkan pernyataan $\mathfrak{F}$ adalah theorema dalam setiap himpunan terurut parsial $(S,\leq)$. Jika dalam setiap elemen tertentu ditukar dengan dualnya, dan $\leq$ dengan $\geq$, makapernyataan itu menjadi theorema lagi yang disebut dual dalam setiap himpunan terurut parsial .

<u>Bukti</u>.

Karena theorema 2 ini merupakan dual dengan theorema 1 dan berdasarkan lemma 4 maka theorema 2 ini dapat dibuktikan dengan bukti 1 tetapi semua lemennya disebutkan dengan dualnya serta tanda diganti dengan tanda $\leq$. Maka terbukti dualnya itu merupakan sebuah theorema lagi.

<u>Theorema 3</u> : Suatu himpunan terurut parsial mempunyai elemen terbesar jika dan hanya jika himpunan $\emptyset$ mempunyai batas bawah didalam S.

Bukti.

$\Longrightarrow$

Pertama kita amati setiap elemen $x \in S$ adalah batas bawah dari $\emptyset$. Tetapi jika $x \in S$ maka $(\forall y)(y \in \emptyset \longrightarrow x \leq y)$ adalah benar karena antesedennya salah dari implikasi ini sekarang jika S mempunyai elemn terbesar v, maka v adalah yang terbesar dari semua batas bawah dari $\emptyset$.

$\Longleftarrow$

Secara konversi maka karena elemen $x \in S$ adalah batas bawah dari $\emptyset$, maka selanjutnya bahwa jika $\emptyset$ mempunyai batas bawah terkecil, katakan v maka v pasti merupakan elemen terbesar.

Theorema 4 : Misalkan $(S, \leq)$ adalah himpunan terurut parsial. Dan misalkan h adalah batas atas terkecil dari himpunan L dari semua batas bawah dari himpunan bagian A dari S, maka $h \in L$ dan $h = \text{lub } L = \text{glb } A$.

Bukti.

Karena setiap elemen A adalah batas atas dari L, kita tahu bahwa $h \leq x$ untuk setiap $x \in A$. Karena h adalah batas bawah dari A dan demikian juga $h \in L$. Sebaliknya karena h lebih besar atau sama dengan setiap batas bawah dari A, kita tahu bahwa $h = \text{glb } A$. Jadi terbukti bahwa $h = \text{lub } L = \text{glb } A$.

Theorema 5 : Misalakan $(S, \leq)$ adalah himpunan terurut parsial dan misalkan k adalah batas bawah terbesar dari himpunan L dari semua batas atas dari himpunan bagian A dari S, maka : $k \in U$ dan $k = \text{glb } U = \text{lub } A$.

Bukti.

Karena setiap elemen A adalah batas bawah dari L, kita tahu bahwa $x \leq k$ untuk setiap $x \in A$. Karenanya k adalah batas atas dari A dan demikian juga $k \in L$. Sebaliknya karena k lebih kecil atau sama dengan setiap batas atas dari A, kita tahu bahwa k = lub A.

Jadi terbukti bahwa k = glb L = lub A.

Theorema 6 : Misalkan $(S, \leq)$ adalah himpunan terurut parsial. Setiap himpunan bagian yang tidak kosong dari S yang terbatas keatas mempunyai batas atas terkecil jika dan hanya jika setiap himpuna bagian yang tidak kosong dari S yang terbatas kebawah mempunyai batas bawah terbesar.

Bukti.

$\Longrightarrow$

Setiap himpunan bagian yang tidak kosong dari S yang terbatas keatas mempunyai batas atas terkecil. Misalkan A adalah himpunan bagian yang tidak kosong dari S yang terbatas kebawah.

$\Longleftarrow$

Misalakan L adalah himpunan yang tidak kosong dari semua batas bawah dari A. Dengan menganggap lub L akan ada. Dan menurut theorema 4 maka akan terbukti bahwa lub L = glb A.

Himpunan terurut parsial dimana setiap himpunan bagian yang tidak kosong yang terbatas keatas mempunyai batas atas terkecil disebut himpunan terurut parsial dengan syarat yang lengkap. Ini berlaku juga untuk himpunan bagian yang tidak kosong yang terbatas kebawah yang mempunyai batas bawah terbesar.

<u>Theorema 7</u> : Misalkan $(S, \leq)$ adalah himpunan terurut - parsial. Setiap himpunan bagian dari S mempunyai batas atas terkecil jika dan hanya-jika setiap himpunan bagian dari S mempunyai batas bawah terbesar.

<u>Bukti</u>.

====>

Anggaplah setiap himpunan bagian dari S yang terbatas - keatas mempunyai batas atas terkecil. Misalkan A adalah himpunan bagian dari S yang terbatas kebawah.

<====

Misalkan L adalah himpunan dari A, dengan menganggap - lub L akan ada. Dan menurut theorema 4 maka akan terbukti bahwa lub L = glb A.

Himpunan terurut parsial dimana setiap himpunan bagian mempunyai batas atas terkecil dan setiap himpunan-bagian mempunyai batas bawah terbesar maka disebut "himpunan terurut parsial yang lengkap" (complete lattice). Jelaslah bahwa himpunan terurut parsial yang lengkap - mempunyai elemen terbesar (inf $\emptyset$) dan terkecil (sup $\emptyset$). Mari kita amati, jika adalh urutan parsial dalam suatu himpunan S maka hal ini menyebabkan terjadinya urutan parsial didalam setiap himpunn bagian A dari S secara alami. Jelasnya, $x \leq y$ untuk setiap dua elemen dari A jika dan hanya jika $x \leq y$ sesuai dengan $\leq$ dalam S. Dalam hal ini mengenai lub H dari himpunan bagian H dari-A, maka harus dijelaskan apakah lub H dipandang dengan-$(A, \leq)$ atau dengan $(S, \leq)$. Tentu saja bisa terjadi bahwa lub H terjadi pada suatu keadaan tetapi tidak pada - suatu keadaan yang lain, atau jika terjadi maka tidak - akan sama persis.

<u>Contoh</u>.

1. $S = \{(a_1;a_2;a_3;\ldots\ldots;b_1;b_2;b_3;\ldots\ldots;c_3;c_2;c_1)\}$

   $A = \{a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots\}$

   $H = \{a_3,a_4,a_5,\ldots\ldots\}$

   maka $\text{lub}_S\ H$ = tidak ada.

2. $S = \{(a_1;a_2;a_3;\ldots\ldots;b_1;b_2;b_3;\ldots\ldots;c_3;c_2;c_1)\}$

   $B = \{c_2,b_1,b_2,b_3,\ldots\ldots\}$

   $D = \{b_1,b_2,b_3,\ldots\ldots\ldots\}$

   maka $\text{lub}_B\ D = c_2$ tetapi $\text{lub}_S\ D$ = tidak ada.

3. $S = \{(a_1;a_2;a_3;\ldots\ldots;b_1;b_2;b_3;\ldots\ldots;c_3;c_2;c_1)\}$

   $E = \{b_2,a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots\}$

   $G = \{a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots\ldots\}$

   maka $\text{lub}_E\ G = b_2$ dan $\text{lub}_S\ G = b_1$,

   tetapi $b_1 \neq b_2$.

Kembali kita ingat bahwa dalam setiap himpunan terurut parsial S, lub $\emptyset$ ada jika dan hanya jika S mempunyai elemen terkecil dan glb $\emptyset$ ada jika dan hanya jika S mempunyai elemen terbesar.

Selanjutnya :

lub $\emptyset$ = minimum dari S. ....(8) .

glb $\emptyset$ = maximum dari S. ....(9) .

<u>Theorema 8</u> : Perhatikan himpunan terurut parsial $(S,\subset)$ Misalkan X adalah sembarang himpunan bagian dari S, maka : lub $X = \bigcup X$. Jika X tidak kosong dan $\bigcap X$ adalah elemen dari S, maka glb $X = \bigcap X$. Jika $X = \emptyset$ dan $\bigcup S$ adalah elemen dari S maka : glb $\emptyset = \bigcup S$.

<u>Bukti</u>.

Karena $x \subset \bigcup X$ untuk setiap $x \in X$, kita tahu bahwa $\bigcup X$ adalah batas atas dari X. Sebaliknya jika V adalah batas atas dari X maka $y \in V$ untuk setiap $y \in \bigcup X$.

Konsekuensinya $\bigcup X \subset V$ dan karenanya lub $X = \bigcup X$. Alasan yang hampir sama juga menunjukkan bahwa jika X - tidak kosong dan X adalah elemen dari S maka - glb $X = \bigcap X$. Jika $X = \emptyset$ dan $\emptyset$ adalah lemen dari S maka- jelaslah bahwa lub $\emptyset = \bigcup \emptyset = \emptyset$. Dimana $\emptyset$ adalah minimum dari S. Lebih jauh lagi bila $X = \emptyset$ dan $\bigcup S$ adalah ele - men S maka sesuai dengan glb $\emptyset = \bigcup S$ = maximumnya S. - dan seperti yang sesuai dengan yang diharapkan yaitu : $\bigcap \emptyset = \emptyset \neq$ glb $\emptyset$ kecuali $S = \{ \emptyset \}$.

Seperti yang dijelaskan terlebih dahulu himpunan - terurut parsial adalah lengkap jika setiap himpunan ba- giannya mempunyai batas atas terkecil. Dengan theorema- 7, setiap himpunan bgian dari himpunan terurut parsial- yang lengkap mempunyai batas bawah terbesar.

Menurut theorema 8 kita tahu bahwa jika $\bigcup X$ dari - setiap himpunan bagian X dari himpunan S adalah elemen- S, maka $(S, \subset)$ adalah himpunan terurut parsial.

<u>Kesimpulan 1</u> : Untuk setiap himpunan S, $(\mathfrak{F}(S), \subset)$ ada lah himpunan terurut parsial yang leng - kap dimana $\mathfrak{F}(S)$ adalah himpunan kuasa.

<u>Kesimpulan 2</u> : Untuk setiap bilangan asli n, (n,) ada lah himpunan terurut parsial yang leng - kap.

Seperti yang sudah dijelaskan terlebih dahulu, him punan terurut parsial adalah dengan syarat yang lengkap atau yang lengkap bila setiap setiap himpunan bagian - yang tidak kosong yang terbatas keatas mempunyai batas- atas terkecil. Dengan tkeorema 6 dalam himpunan terurut parsial yang mempunyai syarat yang lengkap, setiap him- punan bagian tidak kosong yang terbatas kebawah mempu -

nyai bawah terbesar terbesar.
Jadi setiap himpunan terurut parsial yang lengkap ada - lah mempunyai syarat yang lengkap.

Kesimpulan 3 : Himpunan $(\omega, \subset)$ adalah himpunan terurut parsial yang mempunyai kondisi yang leng kap dimana adalah himpunan dari semua-bilangan-bilangan alam.

4. Irisan bawah.

Definisi 8 : Misalkan $(P, \leq)$ adalah himpunan terurut - parsial. Sebuah himpunan bagian dari P - yang disebut irisan bawah dari P jika meme nuhi :

(i). L adalah himpunan bagian yang tidak - kosong dari P.

(ii). L tidak mempunyai elemen terakhir.

(iii). Jika x adalah elemen dari L, maka se- tiap elemen y dari P sedemikian hingga $y \leq x$ adalah juga elemen dari L.

Contoh.

1. $A = \{(a_1;a_2;a_3;......)\}$

Theorema 9 : Misaklkan D adalah himpunan bgian dari se- mua irisan bawah dari himpunan terurut par sial $(P, \leq)$. Maka $(D, \subset)$ adalah himpunan - terurut parsial dengan syarat yang lengkap.

Bukti.

Misalkan D_1 adalah himpunan bagian yamg tidak kosong da ri D dan misalkan D_1 terbatas keatas. Ini berarti bahwa ada irisan bawah L dari P sedemikian hingga setiap elemen D_1 adalah himpunan bagian L. Sekarang perhatikan union dari semua elemen D_1, termasuk $\cup D_1$. Kita nyatakan bahwa $\cup D_1$ adalah irisan bawah dari P. Jelaslah bahwa D_1 itu himpunan bagian yang tidak kosong dari P. Selanjutnya karena setiap elemen D_1 adalah himpunan bagian dari L kita tahu bahwa $\cup D_1 \subset L$, dan karena L adalah himpunan bagian dari P maka demikian juga halnya D_1. Jadi syarat (i) dari definisi 8 terpenuhi.

Sekarang mudah sekali dilihat bahwa $\cup D_1$ tidak mempunya i e;emen terakhir. Sesungguhnya jika m adalah elemen dari $\cup D_1$, maka m adalah akan menjadi elemen terakhir dari elemen D_1.

Namun demikian ini adalah tidak mungkin karena setiap elemen D_1 adalah irisan bawah dari P, dan konsekuensinya m tidak dapat menjadi elemen terakhir, maka syarat (ii) dari definisi 8 diterima.

Akhirnya misalkan x adalah elemen $\cup D_1$ dan misalnya $y \in P$ sedemikian hingga $y \leq x$. Karena $\cup D_1$ adalah union dari semua elemen D_1 maka ada irisan bawah L_1 dari P sedemikian hingga $L_1 \subset \cup D_1$ dan $x \in L_1$. Namun demikian dengan syarat (iii) jika $x \in L_1$ dan $y \leq x$ maka $y \in L_1$ dan karenanya $y \in \cup D_1$. Jadi terpenuhi syarat (iii) dari definisi 8.

Jadi kita tahu bahwa $\cup D_1$ adalah irisan bawah dari P dan karenanya $\cup D_1 \in D$. Namun demikian sesuai dengan theorema 8, batas atas terkecil dari D_1 adalah $\cup D_1$. Jadi batas atas terkecil sembarang himpunan bagian tidakkosong D_1 dari D yang terbatas keatas akan ada. Karenanya himpunan terurut parsial $(P, \leq)$ adalah dengan syarat yang lengkap, sesuai dengan $\subset$.

Jadi theorema 9 terbukti.

Misalkan $(P,\leq)$ adalah himpunan terurut parsial . Suatu fungsi dari P into P disebut fungsi yang tidak menurun jika untuk setiap dua elemen u dan v dari P berlaku : $u \leq v$ maka $f(u) \leq f(v)$. ....(10).

Theorema 10 : Misalkan $(P,\leq)$ adalah himpunan terurut parsial yang mempunyai syarat yang lengkap dari f adalah fungsi yang tidak menurun dari P into P. Jika P mempunyai dua elemen a dan b sedemikian hingga :

$a \leq f(a) \leq f(b) \leq b$ ....(11).

Maka akan ada satu elemen c dari P sedemikian hingga $a \leq c \leq b$ dan $f(c) = c$.

Jadi P mempunyai paling sedikit satu titik tetap dibawah f.

Bukti.

Misalkan $S \subset P$ adalah seperti yang kami tulis sbb:

$S = \{ x \mid a \leq x \leq b$ dan $x \leq f(x) \}$ ....(12).

yaitu S merupakan himpunan semua elemen x dari sedemikian hingga mereka lebih kecil atau sama dengan kurungnya menurut pemetaan f.

Menurut (11), $a \in S$ dan karenanya S adalah tidak kosong.

Selanjutnya S terbatas keatas dengan b.

Misalkan c = lub S maka :

$a \leq c \leq b$ ....(13).

Kita perhatikan bahwa $f(c) = c$. Karena $x \leq c$ untuk setiap $x \in S$ dan karena f adalah fungsi yang tidak menurun maka menurut (10) dan (12) kita peroleh $x \leq f(x) \leq f(c)$ untuk setiap $x \in S$. Karena f(c) adalah batas atas dari S maka : $c \leq f(c)$. ....(14).

Sebaliknya karena f adalah tidak menurun, maka menurut (13) dan (11) kita dapatkan : $a \leq f(a) \leq f(c) \leq f(b) \leq b$. Juga dari persamaan (14) kita dapatkan $f(c) \leq f(f(c))$. yang menurut pertidaksamaan diatas mengandung arti bahwa $f(c) \in S$. Karena $c = \text{lub } S$, kita mempunyai $f(c) \leq c$, yang dengan persamaan (14) maka akan menghasilkan $f(c) = c$. Jadi theorema 10 terbukti.

Kesimpulan 4 : Jika f adalah fungsi tidak menurun dari himpunan terurut parsial yang lengkap P into P itu sendiri, maka kita mempunyai paling sedikit satu titik tetap dibawah f.

Bukti.

Karena P adalah himpunan terurut parsial yang lengkap maka P tentu saja mempunyai elemen terkecil (lub Ø) elemen a dan elemen terbesar (lub P) elemen b.

Sesuai dengan kenyataan bahwa f adalah tidak menurun dan pasangan P into P itu sendiri, maka kita mempunyai $a \leq f(a) \leq f(b) \leq b$.

Jadi P dan f memenuhi persyaratan theorema 10 dan karenanya elemen c P sedemikian hingga :

$a \leq c \leq b$ dan $f(c) = c$.

Jadi kesimpulan 4 terbukti.

Misalkan $(P, \leq)$ adalah himpunan terurut parsial untuk setiap dua elemen x dan y dari P kita sebut :

$x < y$ jika dan hanya jika $x \leq y$ dan $x \neq y$ ....(15).

Dan kita katakan bahwa x adalah lebih kecil dari pada atau mendahului y, atau y lebih besar dari pada atau y melebihi x.

5. Segmen awal.

Definisi 9 : Misalkan $(P, \leq)$ adalah himpunan terurut parsial. Untuk setiap elemen a dari P himpunan semua elemen x dari P sedemikian hingga $x < a$ dinyatakan dengan I(a) dan disebut segmen awal dari P yang ditentukan oleh a.

Jika I(a) tidak kosong, maka I(a) disebut segmen awal yang sejati dari P.

Atau singkatnya dapat ditulis dengan notasi (15) : $I(a) = \{ x \mid (x \in P) \wedge (x < a) \}$.

Contoh.

Dalam himpunan terurut parsial

$= \{ (a;b;c),(m;n;p),(r;s;t) \}$.

Kita mempunyai $I(c) = \{a,b\}$

$I(n) = \{m\}$

$I(r) = \{\emptyset\}$

6. Himpunan terurut parsial yang rapat.

Definisi 10 : Himpunan terurut parsial yang rapat jika pada setiap dua elemen a dan b dari P sedemikian hingga $a < b$, maka akan ada elemen c sedemikian hingga : $a < c < b$.

Contoh.

Interval tertutup dari himpunan bilangan alam.

Theorema 11 : Misalkan $(P, \leq)$ adalah himpunan terurut parsial yang rapat. Jika segmen awal I(b) tidak kosong, maka I(b) adalah irisan ba -

wah dari P.

Bukti.

Untuk elemen $b \in P$, misalkan $I(b)$ adalah segmen awal - yang tidak kosong yang ditentukan oleh b. Kita perlihatkan bahwa $I(b)$ adalah irisan bawah dari P.

Pertama dengan menganggap $I(b)$ tidak kosong dan karena- $b \notin I(b)$, kita tahu bahwa $I(b)$ merupakan himpunan bagian yang sebenarnya dari P.

Kedua, $I(b)$ tidak mempunyai elemen terakhir. Sesungguhnya bila a adalah elemen terakhir dari $I(b)$, maka menurut kerapatannya P maka akan ada elemen $c \in P$ sedemikian himgga $a < c < b$. Namun demikian hal ini akan mengandung- arti bahwa c adalah elemen dari $I(b)$ yang ternyata kontradiksi dengan kenyataan bahwa a adalah elemen terakhir dari $I(b)$. Akhirnya jika $x \in I(b)$ dan $y \leq x$, maka jelaslah $y \leq x < b$ dan dari sini $y \in I(b)$. Jadi sesungguhnya $I(b)$ - merupakan irisan bawah dari P.

7. Interval terbuka dan interval tertutup.

Definisi 11 : Misalkan $(P, \leq)$ adalah himpunan terurut - parsial. Untuk setiap dua elemen a dan b- dari P, himpunan semua elemen x dari P sedemikian hingga $a \leq x \leq b$ disebut interval- tertutup dan dinyatakan dengan $[a,b]$ dan himpunan semua elemen x dari P sedemikian hingga $a < x < b$ disebut interval terbuka - dan dinyatakan dengan (a,b).

Atau dapat ditulis dengan :

$$[a,b] = \{ x \mid (x \in P) \wedge (a \leq x \leq b)$$

$$(a,b) = \{ x \mid (x \in P) \wedge (a < x < b)$$

Jika a dan b tidak dapat dibandingkan atau jika $b < a$, maka : $[a,b] = (a,b) = \emptyset$. Jadi dalam setiap himpunan terurut parsial yang tidak kosong, himpunan kosong merupakan interval terbuka. Selanjutnya dalam setiap himpunan terurut parsial yang mempunyai lebih dari satu elemen, himpunan kosong merupakan interval terbuka sekaligus tertutup juga. Jelasnya, bahwa dalam setiap singleton (keanggotaan yang tunggal) a selalu merupakan interval tertutup karena $\{a\} = [a,a]$.

<u>Theorema 12</u> : Jika $(P, \leq)$ merupakan himpunan terurut parsial yang mana setiap irisan bawah yang terbatas keatas mempunyai batas atas terkecil, maka untuk setiap barisan interval tertutup tidak kosong dari P yang mana tiap bagiannya barisi harga untuk berikutnya maka akan ada interval tertutup tidak kosong $[a,b]$, yang terdapat dalam setiap barisan tersebut.

<u>Bukti</u>.

Misalkan $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, $[a_3,b_3]$ ...... adalah barisan segingga $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ ..... dan $b_1 \geq b_2 \geq b_3$ ...

Selanjutnya : $a_n \leq b_k$ $n,k = 1,2,3,....$ ......(16).

Pertama, mari kita anggap bahwa tidak akan ada bilangan asli positip p sedemikian hingga :

$a_p = a_{p+1} = a_{p+2} = ...$ dab $b_p = b_{p+1} = b_{p+2} = ...$ (17)

Sehingga untuk setiap a_m akan ada bilangan asli $n > m$ sedemikian hingga $a_n > a_m$: juga untuk setiap b_m, akan ada bilangan asli $q > m$ sedemikian hingga $b_q < b_m$. Jadi secara alami maka menjadi :

$a_n < b_k$ $n,k = 1,2,3,,..$ ....(18).

Perhatikan himpunan L dari semua elemen x dari P sedemikian hingga x L jika dan hanya jika akan ada a_1 , dengan i = 1,2,3,.... sedemikian hingga $x \leq a$. Kita katakan bahwa L adalah irisan bawah dari P. Maka tentu saja L tidak kosong dan menurut (18) karena $b_k \notin L$ kita tahu bahwa L adalah himpunan bagian yang sebenarnya dari P dan L terbatas keatas, Juga L tidak dapat mempunyai elemen terakhir. Sesungguhnya jika t adalah elemen terakhir dari L maka $t = a_m$, untuk beberapa bilangan asli m, berlawanan dengan anggapan bahwa untuk setiap a_m, akan ada bilangan asli n m sedemikian hingga $a_n > a_m$. Dengan mudah dapat terlihat bahwa jika $x \in L$ dan $y \leq x$ maka $y \in L$. Maka L adalah irisan bawah dari P dan L terbatas keatas. Namun demikian sup L akan ada. Jelaslah $a_n \leq a$ untuk n = 1,2,3,..... dan menurut (18) maka kita akan mendapatkan a b_k untuk k = 1,2,3,.... Karenanya a sedemikian hingga : $a \in [a_n, b_n]$ untuk n = 1,2,3,.... .....(19).
Sekarang perhatikan himpunan E dari semua elemen x dari P sedemikian hingga $x \in E$ jika dan hanya jika $x \leq b_i$ untuk setiap i = 1,2,3,.... kita nyatakan bahwa E mempunyai elemen terakhir, maka dengan alasan yang sama dengan diatas dapat ditunjukkan bahwa E merupakan irisan bawah dari P. Namun demikian karena E terbatas keatas , lub E akan merupakan elemen terakhir dari E. Jadi sesungguhnya E mempunyai elemen terakhir. Misalkan b adalah elemen terakhir dari E. Jelaslah bahwa $b < b_n$ untuk setiap n = 1,2,3,....dan a b. Karenanya $b \in [a_n, b_n]$ untuk n = 1,2,3,.... dan akibatnya kita akan mendapatkan $[a,b] \subset [a_n, b_n]$ untuk n = 1,2,3,.....
Jadi menurut (17) theorema akan terbukti.

Sekarang perhatikan suatu kasus dimana untuk beberapa bilangan asli positip p :

$a_p = a_{p+1} = a_{p+2} = \dots\dots$ ....(20).

atau $b_p = b_{p+1} = b_{p+2} = \dots\dots$ ....(21).

Jika (20) ada dan (21) tidak ada maka $[a_p, b]$ merupakan interval tertutup yang akan dicari.

Jika (20) dan (21) ada maka $[a_p, b_p]$ merupakan interval tertutup yang akan dicari.

Sedang jika (20) tidak ada dan (21) ada maka $[a, b_p]$ adalah interval yang akan dicari.

Jadi theorema 12 terbukti.

Suatu barisan interval yang masing-masing mengandung harga yang selanjutnya. Jedaslah mungkin terjadi $a = b$, $a_p = b_p$ atau $a_p = b$ atau $a = b_p$ diman interval tertutup yang diinginkan akan berkurang menjadi singleton.

<u>Kesimpulan 5</u> : Jika P adalah himpunan terurut parsial dimana setiap irisan bawah yang terbatas keatas mempunyai batas atas terkecil maka untuk setiap barisan yang tidak kosong akan paling sedikit ada satu elemen dari P yang berlaku umum pada semua interval dari barisan tersebut.

Theorema 12 tidak mencakup semua barisan dari interval terbuka yang mengandung harga yang tidak kosong.

<u>Contoh</u>.

Dalam himpunan terurut parsial.

$Q = \{ (a_1; a_2; a_3; a_4; \dots; m_1; m_2; m_3) \}$

Barisan dari interval terbuka yang mengandung harga dan tidak kosong (a_n, m_1) dengan $n = 1,2,3,\dots$

Adalah sedemikian hingga tidak ada elemen dari Q yang dapat berlaku untuk umum untuk semua interval dari barisan tersebut. Secara alami mungkin terjadi bahwa untuk-barisan tertentu dari interval terbuka yang mengandung-dari Q akan ada elemen dari Q yan; bisa berlaku umum dalam semua interval dari barisan tersebut.

Selanjutnya kita perhatikan bahwa theorema 12 ini-juga berlaku untuk keadaan bila (P, $\leq$) adalah himpunan-terurut parsial dengan syarat yang lengkap.