BAB IV

TRANSFORMASI NILPOTEN .

IV.I. RUANG INVARIAN.

Difinisi IV.1.1.

$T : V \longrightarrow V$ transformasi linier pada-ruang-vektor V lewat lapangan F.

Ruang-bagian $M \subseteq V$ disebut invarian terhadap transformasi-linier T jika dan hanya jika :

untuk setiap $\alpha \in M$ maka $T\alpha \in M$.

Atau,

$M \subseteq V$ disebut ruang bagian yang invarian - terhadap transformasi $T \Longleftrightarrow (\forall \alpha \in M)\ T\alpha \in M$

Ini berarti ruang-bagian yang invarian terhadap transformasi-linier T mempunyai sifat :

Setiap vektor dari ruang-bagian tersebut dipetakan ke ruang-bagian yang sama.

Pandang $T(M) = \{ \alpha \in R_T \mid \alpha = Tv , \forall v \in M \}$ yaitu himpunan semua peta dari vektor-vektor dalam ruang-bagian M terhadap transformasi-linier T, maka ruang-bagian M disebut invarian terhadap transformasi-linier T jika dan jika $T(M) \subseteq M$.

Dan dengan menggunakan Teorema III.2.5. maka $T^2(M) \subseteq T(M)$, ini berarti T(M) juga invarian terhadap transformasi-linier T.

Kernel dari transformasi-linier T adalah himpunan semua vektor-vektor dari V yang dipetakan ke vektor nol, $K_T = \{ v \in V \mid Tv = \theta \}$

Dan karena K_T merupakan ruang-bagian dari V, maka

$\theta = T(K_T) \subseteq K_T$.

Ini berarti K_T invarian terhadap transformasi-linier T.

$T : V \longrightarrow V$ transformasi-linier pada V ruang-vektor berdimensi n lewat lapangan F.

Misal M ruang-bagian dari V yang invarian terhadap transformasi T, dengan basis $\{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_k\}$, dan misal $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots\ldots, v_n\}$ basis dari V.

Karena M invarian terhadap T ; maka

$$
\begin{aligned}
Tv_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{k1}v_k + \theta + \cdots\cdots + \theta \\
Tv_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{k2}v_k + \theta + \cdots\cdots + \theta \\
&\vdots \\
Tv_k &= a_{1k}v_1 + a_{2k}v_2 + \cdots + a_{kk}v_k + \theta + \cdots\cdots + \theta \\
Tv_{k+1} &= a_{1k+1}v_1 + a_{2k+1}v_2 + \cdots + a_{kk+1}v_k + a_{k+1k+1}v_{k+1} + \\
&\qquad \cdots\cdots + a_{nk+1}v_n \\
&\vdots \\
Tv_n &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{kn}v_k + a_{k+1n}v_{k+1} + \\
&\qquad \cdots\cdots + a_{nn}v_n
\end{aligned}
$$

Sehingga transformasi-linier T diwakil oleh matriks

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{kk+1} & \cdots & a_{kn} \\
\theta & \theta & \cdots & \theta & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\theta & \theta & \cdots & \theta & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

Atau

$$
A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ Z & A_3 \end{pmatrix}
$$

Dengan A_1 matriks ukuran k x k yang mewakili transformasi-linier T dibatasi pada ruang-bagian invarian M.

$T : V \longrightarrow V$ transformasi-linier pada V ruang-vektor berdimensi n lewat lapangan F.

Misal M dan N ruang-ruang bagian dari V yang invarian terhadap T, dan $V = M \oplus N$.

Misal $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ basis dari M, dan $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ basis N.

Karena $V = M \oplus N$,maka berdasar Teorema II.4.4. $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ basis dari V.

Maka,

$$
\begin{array}{lcl}
Tv_1 & = & a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{k1}v_k + \theta \ \ldots\ldots + \theta \\
Tv_2 & = & a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{k2}v_k + \theta \ \ldots\ldots + \theta \\
\vdots & & \vdots \\
Tv_k & = & a_{1k}v_1 + a_{2k}v_2 + \ldots + a_{kk}v_k + \theta \ \ldots\ldots + \theta \\
Tv_{k+1} & = & \theta + \theta + \ldots + \theta + a_{k+1k+1}v_{k+1} + \ldots\ldots + a_{nk+1}v_n \\
\vdots & & \\
T_n & = & \theta + \theta + \ldots + \theta + a_{k+1k+1}v_{k+1} + \ldots\ldots + a_{nn}v_n
\end{array}
$$

Sehingga transformasi-linier T diwakili oleh matriks

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1k} & \theta & \ldots\ldots & \theta \\
a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2k} & \theta & \ldots\ldots & \theta \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \ldots\ldots & a_{kk} & \theta & \ldots\ldots & \theta \\
\theta & \theta & \ldots\ldots & \theta & a_{k+1k+1} & \ldots\ldots & a_{k+1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\theta & \theta & \ldots\ldots & \theta & a_{nk+1} & \ldots\ldots & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} A_1 & Z \\ Z & A_2 \end{pmatrix}
$$

Matriks A_1 mewakili transformasi-linier T yang dibatasi pada ruang-bagian invarian M. Matriks A_2 mewakili transformasi-linier T yang dibatasi pada ruang-bagian invarian N.

IV.2. TRANSFORMASI NILPOTEN .

Difinisi IV.2.1.

Bila $T : V \longrightarrow V$ transformasi-linier dan untuk suatu bilangan bulat-positip k ,berlaku $(\forall v \in V).\ T^k v = \theta$ & $(\exists \alpha \in V).\ T^{k-1}\alpha \neq \theta$ maka transformasi T disebut Nilpoten ber-indek k .

Dari difinisi diatas terlihat bahwa k bilangan - bulat positip terkecil sedemikian sehingga untuk setiap v dalam V berlaku $T^k v = \theta$.

Sehingga dapat diambil difinisi yang ekivalen dengan difinisi diatas .

Difinisi IV.2.1'.

Transformasi-linier $T : V \longrightarrow V$ disebut Nilpoten ber-indek k jika dan hanya jika k bilangan-bulat positip terkecil sedemikian sehingga untuk setiap v dalam V berlaku $T^k v = \theta$.

Teorema IV.2.1.

Misal V ruang-vektor lewat lapangan F, dan misal $T : V \longrightarrow V$ transformasi Nilpoten berindek k
Bila $\alpha \in V$ sedemikian sehingga $T^{k-1}\alpha \neq \theta$
maka $\{\alpha, T\alpha, T^2\alpha, \ldots\ldots, T^{k-1}\alpha\}$
bebas-linier dalam V .

Bukti :

Andaikan $\{\alpha, T\alpha, T^2\alpha, \ldots, T^{k-1}\alpha\}$ bergantung-linier .

$\{\alpha, T\alpha, T^2\alpha, \ldots, T^{k-1}\alpha\}$ bergantung-linier , maka

$(\exists a_1, \ldots, a_{k-1} \in F).\ \sum_{i=1}^{k-1} a_i T^i\alpha = \theta$ & $\overline{a_1 = \cdots = a_{k-1} = \theta}$

Misal $a_t \neq \theta$, $1 \leqslant t \leqslant k-1$, sedemikian sehingga

$$T^t\alpha = -a_t^{-1} \sum_{i=t+1}^{k-1} a_i T^i \alpha$$

$$T^{k-1}\alpha = T^{k-1-t+t}\alpha = T^{k-1-t}\,T^{t}\alpha$$

$$= T^{k-1-t}\left(-a_t^{-1}\sum_{i=t+1}^{k-1} a_i T^{i}\alpha\right)$$

$$= -a_t^{-1}\left(T^{k-1-t}\sum_{i=t+1}^{k-1} a_i T^{i}\alpha\right)$$

$$= -a_t^{-1}\left(\sum_{j=k}^{2k-2-t} a_{j-k+1+t} T^{j}\alpha\right)$$

$$= -a_t^{-1}\left(a_{t+1}T^{k}\alpha + a_{t+2}T^{k+1}\alpha + \ldots\right)$$

$$= -a_t^{-1}\left(\theta + \theta + \ldots\ldots + \theta\right)$$

$= \theta$. kontradiksi dengan yang diketahui,

Pengandaian salah yang benar $\{\alpha, T\alpha, T^2\alpha, \ldots, T^{k-1}\alpha\}$ bebas-linier.

Teorema IV.2.2.

V ruang-vektor berdimensi n lewat lapangan F .

Misal $T : V \longrightarrow V$ transformasi nilpoten ber-indek k ,dan $T^{k-1}\alpha \neq \theta$.

Bila ruangbagian $M = [\alpha, T\alpha, T^2\alpha, \ldots, T^{k-1}\alpha]$ maka dapat diketemukan ruang-bagian N yang invarian terhadap T , sedemikian sehingga $V = M \oplus N$.

Bukti: Terlebih dulu,diperlihatkan M invarian terhadap T.

Menurut Teorema IV.2.1.,$\{\alpha, T\alpha, T^2\alpha, \ldots, T^{k-1}\alpha\}$ adalah bebas-linier, maka sistim-generator dari M ini juga merupakan basis dari M. Ini berarti,

$$(\forall \beta \in M)(\exists!\ a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in F)\ \beta = a_0\alpha + a_1 T\alpha + \ldots + a_{k-1}T^{k-1}\alpha$$

$$T\beta = T\left(a_0\alpha + a_1 T\alpha + \ldots\ldots\ldots + a_{k-1}T^{k-1}\alpha\right)$$

$$= a_0 T\alpha + a_1 T^2\alpha + \ldots\ldots\ldots + a_{k-2}T^{k-1}\alpha \in M$$

Ini berarti $T(M) \subseteq M$,jadi M invarian terhadap T

Selanjutnya, untuk membuktikan teorema digunakan induksi pada indek nilpoten nya .

i) Untuk $k = 1$.

Ini berarti T merupakan transformasi nol, $(\forall v \in V).Tv = \theta$

Jadi $M = [\alpha]$

Misal $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ basis dari V.

Dengan menggunakan Teorema Penukaran dari GRASSMANN - STEINITZ, maka $\{\alpha, v_2, \ldots, v_n\}$ juga merupakan basis V.

Ambil ruang-bagian $N = [v_2, v_3, \ldots\ldots, v_n]$

Karena $\{\alpha, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ merupakan basis dari V ,maka

$(\forall v \in V)(\exists!\ 1, b_2, \ldots, b_n \in F).\ v = \alpha + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n$

Dan karena $\{v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ sistim generator yang bebas-linier maka merupakan basis dari N, ini berarti terdapat dengan tunggal vektor γ dalam N :

$$\gamma = b_2v_2 + b_3v_3 + \ldots\ldots + b_nv_n$$

Sehingga $(\forall v \in V)(\exists!\ \alpha \in M\ \&\ \gamma \in N).\ v = \alpha + \gamma$

Ini berarti $V = M \oplus N$.

Ambil sebarang $\gamma \in N$.

Karena T transformasi nol, maka $T\gamma = \theta \in N$.

Ini berarti $T(N) \subseteq N$, Jadi N invarian terhadap T.

ii) Misalkan teorama benar untuk indek-nilpoten k-1 , akan dibuktikan teorema benar untuk indek k.

Diketahui T transformasi-linier Nilpoten berindek k maka $(\exists\ \alpha \in V).\ T^{k-1}\alpha \neq \theta$.

Pandang T sebagai transformasi (dibatasi) pada ruang-peta R_T .

$$T_{R_T} : R_T \longrightarrow V .$$

maka $(\forall x \in R_T)(\exists! \, y \in V).\ x = Ty$.

T transformasi nilpoten berindek k , maka

$$T^{k-1} x = T^{k-1}(Ty) = T^k y = \theta \quad , \quad x \in R_T$$

$$T^{k-2}(T\alpha) = T^{k-1}\alpha \neq \theta \quad , \quad T\alpha \in R_T$$

Ini berarti $T_{R_T} : R_T \longrightarrow V$ nilpoten berindek k-1 .

Ambil ruang-bagian $M_0 = [\, T\alpha, T^2\alpha, \ldots, T^{k-1}\alpha \,]$

Karena menurut hipotesa induksi, teorema benar untuk indek nilpoten k-1 , maka dapat diketemukan N_0 ruang bagian dari R_T , sedemikian sehingga :

$$R_T = M_0 \oplus N_0 \quad \text{dengan} \quad T(M_0) \subseteq M_0 \ \& \ T(N_0) \subseteq N_0$$

Dan ambil $N_1 = \{ v \in V \mid Tv \in N_0 \}$.

Karena $T(N_0) \subseteq N_0$ maka $(\forall x \in N_0).\ Tx \in N_0$

ini berarti $x \in N_1$, sehingga $N_0 \subseteq N_1$ & $T(N_1) \subseteq N_0$

Akan diperlihatkan bahwa $V = M + N_1$

Ambil sebarang $v \in V$, maka $Tv \in R_T$,

karena $R_T = M_0 \oplus N_0$ $\quad (\exists! \, \beta_0 \in M_0 \ \& \ \delta_0 \in N_0)\, Tv = \beta_0 + \delta_0$.

Dan karena $\beta_0 \in M_0$, maka terdapat $a_1, \ldots, a_{k-1}$ dalam F

sehingga
$$\beta_0 = \sum_{i=1}^{k-1} a_i T^i \alpha$$

$$= T\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i T^{i-1}\alpha\right)$$

$$= T(a_1\alpha + a_2 T\alpha + \ldots + a_{k-1}T^{k-2}\alpha + 0T^{k-1}\alpha$$

$$= T\beta \quad \text{untuk } \beta \in M .$$

$$Tv = \beta_0 + \delta_0 = T\beta + \delta_0$$

$\gamma_0 = Tv - T\beta = T(v-\beta) \in N_0$

ini berarti $v-\beta \in N_1$

Misal $v-\beta = \gamma_1$ untuk $\gamma_1 \in N_1$

sehingga $v = \beta + \gamma_1$ dengan $\beta \in M$ & $\gamma_1 \in N_1$

v sebarang vektor dalam V,

jadi $V = M + N_1$

Ambil sebarang $\beta' \in (M \cap N_1)$.

$$T\beta' \in T(M \cap N_1) \subseteq T(M) \cap T(N_1) \subseteq M_0 \cap N_0$$

Dan karena $R_T = M_0 \oplus N_0$ maka $M_0 \cap N_0 = \theta$

Jadi $T\beta' \in \{\theta\}$ atau $T\beta' = \theta$

$\beta' \in (M \cap N_1)$, maka $\beta' \in M$

$\beta' \in M$ maka terdapat $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ dalam F, sehingga

$$\beta' = b_0\alpha + b_1T\alpha + \ldots\ldots + b_{k-1}T^{k-1}\alpha$$

$$T\beta' = T(b_0\alpha + b_1T\alpha + \ldots\ldots + b_{k-1}T^{k-1}\alpha)$$

$$\theta = b_0T\alpha + b_1T^2\alpha + \ldots\ldots + b_{k-1}T^k\alpha$$

Dan karena T Nilpoten ber-indek k, maka $T^k\alpha = \theta$

Sehingga $b_0T\alpha + b_1T^2\alpha + \ldots\ldots + b_{k-2}T^{k-1}\alpha = \theta$

Dan karena $\{T\alpha, T^2\alpha, \ldots\ldots, T^{k-1}\alpha\}$ bebas-linier,

maka $b_0 = b_1 = \ldots\ldots\ldots = b_{k-2} = 0$

Jadi $\beta' = b_{k-1}T^{k-1}\alpha$, sehingga $\beta' \in M_0$

Sebarang $\beta' \in (M \cap N_1)$, maka $\beta' \in M_0$

Ini berarti $(M \cap N_1) \subseteq M_0$

$$(M \cap N_1) \cap N_0 \subseteq M_0 \cap N_0 = \{\theta\}$$

Jadi $(M \cap N_1) \cap N_0 = \{\theta\}$

Dibentuk S ruang-bagian dari N_1

$$S = (M \cap N_1) \oplus N_0 \subseteq N_1$$

Ambil ruang N_0' sedemikian sehingga $S \oplus N_0' = N_1$

Dan ambil $N_0 \oplus N_0' = N$.

Akan dibuktikan bahwa $V = M \oplus N$ dengan M dan N invarian terhadap transformasi nilpoten T .

Pada awal pembuktian sudah diperlihatkan bahwa

M invarian terhadap T .

Karena $N = N_0 \oplus N_0'$ & $N_1 = (M \cap N_1) \oplus N_0 \oplus N_0'$

maka $N_0 \subseteq N \subseteq N_1$ sehingga $T(N) \subseteq T(N_1)$

Dan karena $N_1 = \{ v \in V \mid T v \in N_0 \}$, maka $T(N_1) \subseteq N_0$

sehingga $T(N) \subseteq N_0 \subseteq N$,

Ini berarti N invarian terhadap T .

Tinggal dibuktikan bahwa $V = M \oplus N$.

$$\begin{aligned} M \cap N &= M \cap (N \cap N_1) \\ &= (M \cap N_1) \cap N \\ &= (M \cap N) \cap (N_0 \oplus N_0') \\ &= \{ \theta \} \end{aligned}$$

Ambil sebarang $v \in V$.

Karena $V = M + N_1$,

maka $v = \beta + \delta_1$ dengan $\beta \in M$ & $\delta_1 \in N$

Dan karena $N_1 = (M \cap N_1) \oplus N_0 \oplus N_0'$

maka $\delta_1 = \beta' + \delta_0 + \delta_0'$ dengan $\beta \in (M \cap N_1)$, $\delta_0 \in N_0$, $\delta_0' \in N_0'$

Sehingga $v = \beta + (\beta' + \delta_0 + \delta_0') = (\beta + \beta') + (\delta_0 + \delta_1)$

$= \beta'' + \delta$ dengan $\beta'' \in M$ dan $\delta \in N$.

Maka $V = M + N$,dan karena $M \cap N = \{\theta\}$

Jadi $V = M \oplus N$,dengan M dan N ruang-ruang bagian yang invarian terhadap transformasi nilpoten T.

$T : V \longrightarrow V$ transformasi-linier pada V ruang-vektor berdimensi n lewat lapangan F.

Misal M dan N ruang-ruang bagian dari V yang invarian terhadap T , dan $V = M \oplus N$.

Misal $\{ v_1, v_2, \ldots, v_k \}$ basis dari M dan $\{ v_{k+1}, \ldots, v_n \}$ basis dari N.

Karena $V = M \oplus N$, maka $\{ v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n \}$ basis dari V.

Terhadap basis ini transformasi T diwakili oleh matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \theta & \cdots & \theta \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \theta & \cdots & \theta \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & \theta & \cdots & \theta \\ \theta & \theta & \cdots & \theta & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \theta & \theta & \cdots & \theta & a_{k+2k+2} & \cdots & a_{k+2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \theta & \theta & \cdots & \cdot & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Atau,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & Z \\ Z & A_2 \end{pmatrix}$$

A_1 matriks ukuran k x k yang mewakili transformasi-linier T yang dibatasi pada ruang-bagian invarian M.

A_2 matriks ukuran n-k x n-k yang mewakili transformasi-linier T yang dibatasi pada ruang-bagian invarian N .

<u>Akan diselidiki bentuk matriks A</u> khusus nya matriks A_1 , <u>jika T transformasi Nilpoten.</u>

Teorema IV.2.3.

$T : V \longrightarrow V$ transformasi-linier pada ruang-vektor V lewat lapangan F.

Jika T Nilpoten berindek k_1, maka dapat diketemukan bilangan bulat positip t, dan t buah vektor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_t$ dan t buah bilangan bulat positip $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t$

sedemikian sehingga :

1). $\{\alpha_1, T\alpha_1, \ldots\ldots, T^{k_1-1}\alpha_1,$

$\alpha_2, T\alpha_2, \ldots\ldots, T^{k_2-1}\alpha_2,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$

$\alpha_t, T\alpha_t, \ldots\ldots, T^{k_t-1}\alpha_t\}$

merupakan basis dari ruang-vektor V.

2). Untuk setiap i , i = 1,2,........, t

$$M_i = \left[\alpha_i, T\alpha_i, \ldots\ldots, T^{k_i-1}\alpha_i\right]$$

merupakan ruang-ruang bagian dari V yang invarian terhadap transformasi nilpoten T.

3). $V = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots\ldots \oplus M_t$

Bukti :

Misal $\{ v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{k_1}, \ldots, v_n \}$ basis ruang-vektor V.

Karena $T : V \longrightarrow V$ transformasi Nilpoten berindek k_1, maka $(\exists . \alpha_1 \in V) . T^{k_1-1}\alpha_1 \neq \theta$.

Misal M_1 ruang-bagian dari V, dan ambil basis dari M_1 $\{ v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{k_1} \}$ dengan $v_j = T^{j-1}\alpha_1$ untuk setiap j, $j = 1,2,\ldots\ldots\ldots, k_1$.

Untuk $j = 1,2,\ldots,k_1$, $v_j = T^{j-1}\alpha_1$ maka $v_{j+1} = T^j\alpha_1$ sehingga $Tv_j = T(T^{j-1}\alpha_1) = T^j\alpha_1 = v_{j-1}$.

Jadi $Tv_j = v_{j+1}$ untuk setiap j, $j = 1,2,\ldots,k_1$.

$$
\begin{aligned}
Tv_1 &= \theta + v_2 + \quad + \theta + \theta + \theta + \ldots\ldots\ldots + \theta \\
Tv_2 &= \theta + \theta + v_3 + \theta + \theta + \theta + \ldots\ldots\ldots + \theta \\
&\vdots \\
Tv_{k_1-1} &= \theta + \theta + \theta + v_k + \theta + \theta + \ldots\ldots\ldots + \theta \\
Tv_{k_1} &= \theta + \theta + \theta + \theta + v_{k_1+1} + \theta + \ldots\ldots\ldots + \theta
\end{aligned}
$$

Ini berarti $T(M_1) \subseteq M_1$, yaitu M_1 invariant terhadap T.

Dan karena $\{ v_1, v_2, \ldots, v_{k_1} \}$ basis M_1 dengan $v_j = T^{j-1}\alpha_1$ untuk $j = 1,2,\ldots,k_1$, maka

$M_1 = [\alpha_1, T\alpha_1, \ldots\ldots, T^{k_1-1}\alpha_1]$ merupakan ruang-bagian dari V yang invarian terhadap transformasi Nipoten T.

Dan, transformasi Nilpoten T (dibatasi) pada M_1 akan diwakili oleh matriks

$$
A_1 = \begin{pmatrix}
\theta & \theta & \theta & \ldots\ldots\ldots & \theta & \theta \\
1 & \theta & \theta & \ldots\ldots\ldots & \theta & \theta \\
\theta & 1 & \theta & \ldots\ldots\ldots & \theta & \theta \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\theta & \theta & \theta & \ldots\ldots\ldots & 1 & \theta
\end{pmatrix}
$$

Jika $k_1 = n$, maka $M_1 = V$, bukti selesai.

Jika $k_1 < n$, karena M_1 ruang-bagian invarian terhadap T, maka menurut teorema IV.2.2., dapat diketemukan ruang-bagian $N_1 = [v_{k_1+1}, v_{k_1+2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, v_n]$ yang invarian terhadap T, sedemikian sehingga

$V = M_1 \oplus N_1$.

Pandang T transformasi Nilpoten (dibatasi) pada ruang invarian N_1 , $T : N_1 \longrightarrow N_1$ dengan indek nilpoten $k_2 \leq k_1$.

Karena $T : N_1 \longrightarrow N_1$ transformasi Nilpoten berindek k_2, maka $(\exists\, \alpha_2 \in N_1 \subseteq V)$. $T^{k_2-1}\alpha_2 \neq 0$.

Misal M_2 ruang-bagian dari N_1, dan ambil basis dari M_2 $\{v_{k_1+1}, v_{k_1+2}, \ldots\ldots\ldots, v_{k_2}\}$ dengan $v_j = T^{j-1}\alpha_2$ untuk setiap j, $j = k_1+1, k_1+2, \ldots\ldots\ldots, k_2$.

Untuk $j = k_1+1, k_1+2, \ldots, k_2$, $v_j = T^{j-1}\alpha_2$, maka

$v_{j+1} = T^j\alpha_2$, sehingga $Tv_j = T(T^{j-1}\alpha_2) = T^j\alpha_2 = v_{j+1}$.

Jadi $Tv_j = v_{j+1}$ untuk $j = k_1+1, k_1+2, \ldots\ldots, k_2$.

$$Tv_{k_1+1} = \theta + v_{k_1+2} + \theta + \theta + \theta + \theta + \ldots + \theta$$

$$Tv_{k_1+2} = \theta + \theta + v_{k_1+3} + \theta + \theta + \theta + \ldots + \theta$$

$$\vdots$$

$$Tv_{k_2-1} = \theta + \theta + \theta + v_{k_2} + \theta + \theta + \ldots + \theta$$

$$Tv_{k_2} = \theta + \theta + \theta + \theta + v_{k_2+1} + \theta + \ldots + \theta$$

Ini berarti $T(M_2) \subseteq M_2$, yaitu M_2 invarian terhadap T.

Dan karena $\{ v_{k_1+1}, v_{k_1+2}, \ldots\ldots, v_{k_2} \}$ basis M_2 dengan

$v_j = T^{j-1}\alpha_2$, untuk $j = k_1+1, k_1+2, \ldots\ldots, k_2$, maka

$M_2 = [\alpha_2, T\alpha_2, \ldots\ldots, T\alpha_2]$ merupakan ruang-bagian dari V yang invarian terhadap transformasi Nilpoten T.

Dan, transformasi Nilpoten T (dibatasi) pada M_2 akan diwakili oleh matriks

$$A_2 = \begin{pmatrix} \theta & \theta & \theta & \ldots\ldots & \theta & \theta \\ 1 & \theta & \theta & \ldots\ldots & \theta & \theta \\ \theta & 1 & \theta & \ldots\ldots & \theta & \theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ \theta & \theta & \theta & \ldots\ldots & 1 & \theta \end{pmatrix}$$

Jika $k_2 = n$, maka $M_2 = N_1$

Ini berarti $V = M_1 \oplus M_2$ dengan

$M_1 = [\alpha_1, T\alpha_1, \ldots, T^{k_1-1}\alpha_1]$ dan $M_2 = [\alpha_2, T\alpha_2, \ldots, T^{k_2-1}\alpha_2]$

masing-masing merupakan ruang-bagian dari V yang invarian terhadap transformasi Nilpoten T.

Karena $V = M_1 \oplus M_2$ maka

$\{ \alpha_1, T\alpha_1, \ldots, T^{k_1-1}\alpha_1, \alpha_2, T\alpha_2, \ldots., T^{k_2-1}\alpha_2 \}$ merupakan basis dari ruang-vektor V . (bukti selesai)

Jika $k_2 < n$, maka $M_2 \neq N_1$, dan karena M_2 ruang-bagian invarian terhadap T, maka menurut teorema IV.2.2 dapat diketemukan ruang bagian $N_2 = [v_{k_2-1}, v_{k_2-2}, \ldots, v_n]$ yang invarian terhadap T , sedemikian sehingga

$N_1 = M_2 \oplus N_2$.

Pandang T transformasi Nilpoten (dibatasi) pada ruang - invarian N_2 , $T : N_2 \longrightarrow N_2$ dengan indek - nilpoten $k_3 \leqslant k_2$

Demikian seterusnya, dengan jalan yang sama teorema akan lengkap terbukti.

Teorema IV.2.4.

Setiap matriks Nilpoten similar dengan matriks berbentuk

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{|ccccc|} \hline \theta & & & & \\ 1 & \theta & & & \\ & 1 & \theta & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \theta \\ \hline \end{array} & & & \\ & \begin{array}{|cccc|} \hline \theta & & & \\ 1 & \theta & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \theta \\ \hline \end{array} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{array}{|ccc|} \hline \theta & & \\ 1 & \theta & \\ & \ddots & \ddots \\ & 1 & \theta \\ \hline \end{array} \end{pmatrix}$$

Bukti :

Misal V ruang-vektor lewat lapangan F , dengan basis $\{ v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n \}$.

Dan misal $T : V \longrightarrow V$ transformasi Nilpoten pada V .

Karena T transformasi Nilpoten, maka dapat diketemukan bilangan bulat positip t, dan t buah vektor dalamrung-vektor V $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_t$ dan t buah bilangan - bulat positip $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_t$ sedemikian sehingga Untuk setiap i , i = 1,2,.....,t

$$M_i = [\alpha_i, T\alpha_i, \ldots\ldots, T^{k_i - 1}\alpha_i]$$

merupakan ruang-ruang bagian dari V yang invarian terhadap transformasi Nilpoten T .

Transformasi Nilpoten T (dibatasi) pada M_i akan diwakili oleh matriks

$$A_i = \begin{pmatrix} \theta & \theta & \theta & \ldots\ldots\ldots\ldots & \theta & \theta \\ 1 & \theta & \theta & \ldots\ldots\ldots\ldots & \theta & \theta \\ \theta & 1 & \theta & \ldots\ldots\ldots\ldots & \theta & \theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots\vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ \theta & \theta & \theta & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 & \theta \end{pmatrix}$$

untuk setiap i , i = 1,2,.....,t .

Matriks-matrik ini membentuk matriks representasi tereduksi penuh

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \theta & & & \\ 1 & \theta & & \\ & 1 & \theta & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & 1 & \theta \end{matrix}} & & & \\ \theta & \boxed{\begin{matrix} \theta & & \\ 1 & \theta & \\ & \ddots & \ddots \\ & 1 & \theta \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \theta & & \\ 1 & \theta & \\ & \ddots & \ddots \\ & 1 & \theta \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Teorema IV.2.5

V ruang-vektor berdimensi n lewat lapangan F. Misal T dan S dua transformasi Nilpoten pada V, dimana T menentukan k buah bilangan bulat positip $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots\ldots \geqslant p_k$ dan S menentukan j buah bilangan bulat positip $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots\ldots\ldots \geqslant q_j$ maka $k = j$ dan $p_i = q_i$ untuk $i = 1,\ldots,k$ jika dan hanya jika dapat diketemukan transformasi non-singuler R pada V, sedemikian sehingga $S = R^{-1}TR$.

Bukti :

$\Longrightarrow$

$k = j$ dan $p_i = q_i$ untuk $i = 1,2,\ldots\ldots,k$.

T transformasi Nilpoten, maka berdasarkan teorema IV.2.3 dapat diketemukan k buah vektor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_k$ sedemikian sehingga

$$\{ \alpha_1, T\alpha_1, \ldots\ldots, T^{p_1-1}\alpha_1 , \alpha_2, T\alpha_2, \ldots\ldots, T^{p_2-1}\alpha_2 , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \alpha_k, T\alpha_k, \ldots\ldots, T^{p_k-1}\alpha_k \}$$

merupakan basis ruang-vektor V.

Terhadap basis ini T diwakili oleh matriks

$$\begin{pmatrix} \theta & \theta & \theta & \ldots\ldots & \theta & \theta \\ 1 & \theta & \theta & \ldots\ldots & \theta & \theta \\ \theta & 1 & \theta & \ldots\ldots & \theta & \theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ \theta & \theta & \theta & \ldots\ldots & 1 & \theta \end{pmatrix}$$

S transformasi Nilpoten, dan karena $k = j$ dan $p_i = q_i$ untuk $i = 1,2,\ldots,k$, maka dapat diketemukan k buah vektor $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_k$ sedemikian sehingga

$$\{ \xi_1, S\xi_1, \ldots\ldots, S^{p_1-1}\xi_1 \; , \; \xi_2, S\xi_2, \ldots\ldots, S^{p_2-1}\xi_2 \; , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; , \; \xi_k, S\xi_k, \ldots\ldots, S^{p_k-1}\xi_k \}$$

merupakan basis ruang-vektor V, dan terhadap basis ini S akan diwakili oleh matriks yang sama dengan matriks-yang mewakili T.

Jadi T dan S diwakili oleh matriks yang sama, dan berdasarkan teorema III.5.5. maka dapat diketemukan transformasi non-singuler R sedemikian sehingga

$S = R^{-1}TR.$

$\Longleftarrow$

$$S = R^{-1}TR.$$

S transformasi Nilpoten, berdasarkan teorema III.5.5. maka dapat diketemukan j buah vektor $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_j$ sedemikian sehingga

$$\{ \xi_1, S\xi_1, \ldots\ldots, S^{q_1-1}\xi_1 \; , \; \xi_2, S\xi_2, \ldots\ldots, S^{q_2-1}\xi_2 \; , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; , \; \xi_j, S\xi_j, \ldots\ldots, S^{q_j-1}\xi_j \} \qquad (I)$$

merupakan basis ruang-vektor V.

R transformasi non-singuler pada V, maka R akan merubah vektor-vektor basis (I) menjadi vektor-vektor basis yang lain untuk ruang-vektor V.

$$RS^j\xi_i = (RS)S^{j-1}\xi_i = (RT)S^{j-1}\xi_i = T(RS^{j-1}\xi_i)$$

Ambil $\alpha_i = R\xi_i$, maka basis yang baru adalah

$$\{ \alpha_1, T\alpha_1, \ldots\ldots, T^{q_1-1}\alpha_1, \; \alpha_2, T\alpha_2, \ldots\ldots, T^{q_2-1}\alpha_2 \; , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \; \alpha_j, T\alpha_j, \ldots\ldots, T^{q_j-1}\alpha_j \} \qquad (II)$$

Tetapi $TT^{q_i-1}\alpha_i = T^{q_i-1}TR\xi_i = T^{q_i-1}RS\xi_i = T^{q_i-2}RS^2\xi_i$

$= \ldots\ldots\ldots = RS^{q_i}\xi_i = R\theta = \theta$

Ini berarti T transformasi Nilpoten berindek q_i

untuk $i = 1, 2, \ldots\ldots, j.$

Basis (II) tidak lain adalah basis ruang-vektor V sebagaimana yang dinyatakan dalam Teorema IV.2.4. Ini berarti $k = j$ dan $p_i = q_i$ untuk $i = 1,2,\ldots,k$.

(terbukti).

V ruang-vektor berdimensi n lewat lapangan F dan $T : V \longrightarrow V$ transformasi Nilpoten

Ambil $\alpha_1, T\alpha_1, \ldots\ldots, T^{k_1-1}\alpha_1, \alpha_2, T\alpha_2, \ldots\ldots, T^{k_2-1}\alpha_2$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \alpha_t, T\alpha_t, \ldots\ldots, T^{k_t-1}\alpha_t$

sebagai basis ruang-vektor V.

Pandang δ sebarang vektor dalam Kernel T

$\delta \in K_T$ & $K_T \subseteq V$ maka $\delta \in V$, sehingga

$$\begin{aligned}
\delta = {} & a_{11}\alpha_1 + a_{12}T\alpha_1 + \ldots\ldots + a_{1k_1}T^{k_1-1}\alpha_1 + \\
& a_{21}\alpha_1 + a_{22}T\alpha_2 + \ldots\ldots + a_{k_2}T^{k_2-1}\alpha_2 + \\
& \vdots \\
& a_{t1}\alpha_1 + a_{t2}T\alpha_2 + \ldots\ldots + a_{tk_t}T^{k_t-1}\alpha_t .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T\delta = {} & a_{11}T\alpha_1 + a_{12}T^2\alpha_1 + \ldots\ldots + a_{1k_1-1}T^{k_1-1}\alpha_1 + \theta + \\
& a_{21}T\alpha_2 + a_{22}T^2\alpha_2 + \ldots\ldots + a_{2k_2-1}T^{k_2-1}\alpha_2 + \theta + \\
& \vdots \\
& a_{t1}T\alpha_t + a_{t2}T^2\alpha_t - \ldots\ldots - a_{tk_t-1}T^{k_t-1}\alpha_t + \theta . \\
= {} & \theta .
\end{aligned}$$

Karena $T\alpha_1, T^2\alpha_1, \ldots\ldots, T^{k_1-1}\alpha_1, T\alpha_2, T^2\alpha_2, \ldots\ldots, T^{k_2-1}\alpha_2$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $T\alpha_t, T\alpha_t, \ldots\ldots, T^{k_t-1}\alpha_t$

himpunan-bagian bebas-linier maka $a_{ij} = 0$, untuk $i = 1,2,\ldots\ldots,t$ dan $j = 1,2,\ldots\ldots,k_t-1$.

Sehingga

$$\begin{aligned}\delta = \ & 0.\alpha_1 + 0.T\alpha_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1k_1}T^{k_1-1}\alpha_1 + \\ & 0.c_2 + 0.T\alpha_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2k_2}T^{k_2-1}\alpha_2 + \\ & \vdots \quad + \\ & 0.c \ + 0.Tc \ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{tk_t}T^{k_t-1}\alpha_t . \\ = \ & a_{1k_1}T^{k_1-1}\alpha_1 + a_{2k_2}T^{k_2-1}\alpha_2 + \ldots + a_{tk_t}T^{k_t-1}\alpha_t .\end{aligned}$$

δ sebarang-vektor dalam K_T ternyata merupakan kombinasi linier dari $T^{k_1-1}\alpha_1, T^{k_2-1}\alpha_2, \ldots\ldots, a_{tk_t}T^{k_t-1}\alpha_t$ ini berarti $\{T^{k_1-1}\alpha_1, T^{k_2-1}\alpha_2, \ldots\ldots, a_{tk_t}T^{k_t-1}\alpha_t\}$ merupakan sistim-generator K_T dan karena bebas-linier maka merupakan basis dari K_T.