BAB II

RUANG VEKTOR.

II.1. RUANG DAN RUANG-BAGIAN VEKTOR ABSTRAK

Difinisi II.1.1.

Suatu sistim $V = \{ V, F; +, \cdot, \oplus, \odot \}$ disebut ruang -vektor lewat lapangan F jika dan-hanya jika memenuhi aksioma-aksioma :

1. $\{ F; +, \cdot \}$ merupakan lapangan (field)
2. $\{ V; \oplus \}$ merupakan grup-komutatip.
3. $(\forall a \in F)(\forall v \in V)(\exists ! u \in V)\ a \odot v = u$

   & $(\forall a, b \in F) (\forall u, v \in V)$

   i) $(a + b) \odot u = (a \odot u) \oplus (b \odot u)$

   ii) $a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v)$

   iii) $(a \cdot b) \odot u = a \odot (b \odot u)$

   iv) $1 \odot u = u$

Anggauta (elemen) dari ruang-vektor V disebut vektor, sedangkan anggauta (elemen) dari lapangan F disebut skalar .

Operasi $\oplus$ disebut jumlahan vektor.

Operasi $\odot$ disebut pergandaan skalar.

Untuk penulisan selanjutnya, notasi operasi disederhanakan, hingga $(c + d) (u + bv)$ dimaksudkan sebagai $(c + d) \left[u \oplus (b \odot v) \right]$

Teorema II.1.1.

Dalam ruang-vektor V lewat lapangan F, misal θ adalah vektor nol, dan $-u$ adalah invers dari vektor u.

Maka untuk setiap u dalam V , dan untuk setiap $a \in F$, berlaku :

1. $0u = \theta$
2. $(-1)u = -u.$
3. $a\theta = \theta.$

Bukti :

1. $au = (0 + a)u = 0u + au$

   Karena dalam grup V (V dipandang sebagai grup) elemen-netral adalah tunggal.

   Maka $0u = \theta$.

2. $u + (-1)u = 1u + (-1)u = (1 - 1)u = 0u = \theta.$

   Karena dalam grup V, invers (terhadap jumlahan vektor) dari suatu elemen adalah tunggal , maka $(-1)u = -u.$

3. $a(u + \theta) = au + a\theta = au.$

   Karena dalam grup V elemen netral adalah tunggal, maka $a\theta = \theta$

Akibat :

1). Jika $av = \theta$ dan $a \neq 0$ maka $v = \theta$.

2). Jika $av = \theta$ dan $v \neq \theta$ maka $a = 0$.

3). Jika $av = bv$ dan $v \neq \theta$ maka $a = b$.

4). Jika $av = aw$ dan $a \neq 0$ maka $v = w$.

Bukti :

1). $v = 1v = (a^{-1}a)v = a^{-1}(av)$.
$= a^{-1}(\theta) = \theta.$

2). Kontra posisi dari 1): jika $v \neq \theta$ maka $av \neq \theta$ atau $a = \theta$ sehingga jika $v \neq \theta$ dengan $av = \theta$ maka $a = 0$.

3). $av = bv$, maka $av - bv = \Theta$ sehingga

$(a-b)v = 0$. karena $v \neq 0$, maka $a-b = \Theta$

jadi $a = b$.

4). $av = aw$, maka $av - aw = \Theta$

sehingga $a(v - w) = \Theta$.

karena $a \neq 0$, maka $v - w = \Theta$

jadi $v = w$.

<u>Difinisi II.1.1.</u>

Dalam ruang-vektor V lewat lapangan F, himpunan-bagian S disebut <u>Ruang-bagian</u> dari V jika dan hanya jika terhadap aturan-operasi yang sama dengan aturan-operasi dari V, S merupakan ruang-vektor lewat lapangan F.

Dengan kata lain,

$V = \{V, F; +, \cdot, \oplus, \odot\}$ ruang-vektor dan $S \subseteq V$.

S ruang-bagian dari U $\Longrightarrow S = \{S, F; +, \cdot, \oplus, \odot\}$ ruang-vektor.

Dari difinisi diatas terlihat bahwa S merupakan grup-komutatip dan karena $S \subseteq V$, maka S haruslah merupakan grup bagian dari V. Dan jika S tertutup terhadap operasi pergandaan skalar maka aksioma 3) dari ruang-vektor dipenuhi. Dari sini dapat diturunkan suatu teorema (yang dapat diangkat sebagai difinisi ruang-bagian)

<u>Teorema II.1.2.</u>

Dalam ruang-vektor V lewat lapangan F, syarat perlu dan cukup suatu himpunan-bagian tidak kosong S disebut ruang-bagian dari V jika dan hanya jika S grup-bagian dari V dan S tertutup terhadap operasi pergandaan skalar sebagaimana yang didefinisikan untuk ruang-vektor V .

Dengan kata lain,

S ruang-bagian dari V $\Longleftrightarrow$ 1) $u,v \in S \Longrightarrow u + v \in S$.

2) $u \in S$ & $a \in F$ $\Longrightarrow au \in S$

Jika dalam syarat 2) diambil a = - 1 (invers dari elemen - netral terhadap jumlahan),

untuk $v \in S$ maka $-v \in S$.

Sehingga untuk sebarang $u, v \in S$

maka $u - (-v) = u + v \in S$.

Ini menunjukkan bahwa S tertutup terhadap operasi jumlahan vektor.

Dari sini dapat diturunkan suatu teorema :

<u>Teorema II.1.2</u>.

Dalam ruang-vektor V lewat lapangan **F** , suatu himpunan-bagian tidak-kosong **S** disebut ruang-bagian dari V jika dan hanya jika S tertutup terhadap dua operasi , jumlahan-vektor dan pergandaan skalar sebagaimana yang didifinisikan untuk V .

Dengan kata lain,

S ruang-bagian dari V $\Longleftrightarrow$ 1) $u,v \in S \Longrightarrow u + v \in S$

2) $u \in S$, $a \in F$ $\Longrightarrow au \in S$

Teorema II.1.3.

Misal U dan W masing-masing merupakan ruang-bagian dari ruang-vektor V lewat lapangan F , maka

$$U \cap W = \{ x \mid x \in U \ \& \ x \in W \}$$

merupakan ruangan-bagian dari V.

Dimana $U \cap W$ merupakan ruang-bagian terbesar dari V yang termuat dalam U dan dalam W.

Bukti :

Misal $v \in U \cap W$ maka $v \in U$ & $v \in W$

Dan misal $k \in F$, karena U dan W masing-masing merupakan ruang-bagian maka $kv \in U$ & $kv \in W$

Sehingga $kv \in U \cap W$.

Jadi untuk $v \in U \cap W$ & $k \in F$ maka $kv \in U \cap W$

(syarat 1 dipenuhi).

Misal $v_1, v_2 \in U \cap W$

maka $v_1, v_2 \in U$ & U ruang-vektor, maka $v_1+v_2 \in U$

$v_1, v_2 \in W$ & W ruang-vektor, maka $V_1+v_2 \in W$

Jadi :

$v_1, v_2 \in U \cap W$ maka $v_1+v_2 \in U \cap W$

(syarat ke 2 dipenuhi).

1) dan 2) maka $U \cap W$ merupakan ruang-bagian dari V.

Tinggal diperlihatkan bahwa $U \cap W$ merupakan ruang-bagian terbesar yang termuat dalam U dan dalam W.

Misal H suatu ruang bagian lain yang termuat dalam U dan dalam W .

$H \subseteq U$ & $H \subseteq W$ maka $H \subseteq U \cap W$.

Jadi H termuat dalam $U \cap W$.

II.2. BEBAS LINIER DAN BERGANTUNG LINIER.

Misal $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ himpunan vektor vektor dalam ruang-vektor V lewat lapangan F.
Bentuk $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nv_n$
disebut kombinasi-linier dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$
dimana $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skalarskalar dalam lapangan F.

Himpunan semua kombinasi-linier dari vektor vektor dalam A membentuk ruang-bagian dari ruang-vektor V , dan dituliskan dengan notasi $[A]$.
Dikatakan bahwa $[A]$ ruang-bagian yang dibangun oleh A .
Mudah dibuktikan bahwa $[A]$ ruang-bagian terkecil dari ruang-vaktor V yang memuat A .

Difinisi II.2.1.

Dalam ruang-vektor V lewat lapangan F, vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$
disebut bergantung-linier jika dapat diketemukan $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ skalar-skalar tidak semua nol dalam lapangan F, sedemikian sehingga berlaku :

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nv_n = \theta .$$

Dan disebut bebas-linier jika ,
persamaan $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots\ldots + a_nv_n = \theta$
hanya dipenuhi oleh $a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n = 0$

Jika dituliskan dalam simbol logika,

Difinisi II.2.1'.

A bebas-linier bila dan hanya bila :

$(\forall v_1, \ldots, v_n)\{v_1, \ldots, v_n \in A \Longrightarrow$

$[(\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in F).\ a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = \theta$

$\Longrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \theta]\}$

Dan,

A bergantung-linier bila dan hanya bila :

$(\exists v_1, \ldots v_n)\{v_1, \ldots v_n \in A \ \&\ [(\exists a_1, \ldots, a_n \in F)$

$a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = \theta \ \&\ \overline{a_1 = a_2 = \ldots a_n = \theta}]\}$

Dari difinisi II.2.1 dan pengertian kombinasi-linier dapat diturunkan pernyataan-pernyataan sebagai berikut :

1). Bila vektor u merupakan kombinasi-linier dari vektor-vektor $v_1, \ldots, v_n$ maka vektor-vektor u, $v_1, \ldots, v_n$ bergantung-linier.

2). Bila $v_1, \ldots, v_n$ bergantung-linier ; maka sekurang-kurangnya satu dari para v_i merupakan kombinasi-linier dari yang lainnya.

3). Setiap himpunan-bagian dari himpunan vektor - vektor bebas-linier adalah bebas-linier Dan setiap himpunan yang merupakan perluasan dari himpunan vektor - vektor bergantung-linier adalah bergantung-linier.

Teorema II.2.1.

Himpunan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah bergantung - linier jika dan hanya jika dapat diketemukan bilangan bulat-positip k , k ≤ n, sedemikian sehingga $v_k \in [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}]$.

Bukti :

$\Longrightarrow \{v_1, \ldots v_n\}$ bergantung-linier

Berdasar pernyataan 2) diatas, maka sekurang-kurangnya satu dari para v merupakan kombinasi-linier - dari yang lainnya.

Misal k bilangan bulat posistip terkecil sedemikian sehingga $\{v_1, \ldots, v_k\}$ bergantung-linier.

$\{v_1, \ldots, v_k\}$ bergantung linier, jadi terdapat $c_1, c_2, \ldots, c_k$ skalar-skalar tidak semua nol dalam F , sehingga $c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k = \theta$

Jika $c_k = 0$, maka $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ bergantung linier, maka k bukan bilangan bulat positip terkecil (kontradiksi) .

$c_k \neq 0$, maka $\exists \; c_k^{-1} \in F$, sehingga

$$v_k = - c_k^{-1} (c_1 v_1 + \ldots + c_{k-1} v_{k-1})$$
$$\in [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}]$$

$\Longleftarrow$ Jika untuk setiap bilangan bulat positip k

$k \leq n$, $v_k \in [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}]$.

$v_k \in [v_1, \ldots, v_{k-1}]$ maka $\{v_1, \ldots, v_k\}$ bergantung-linier.

Karena $\{v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n\}$ merupakan perluasan dari himpunan vektor-vektor bergantung-linier, maka $\{v_1, \ldots v_n\}$ bergantung-linier.

Teorema II.2.2.

Dalam suatu ruang-vektor V lewat lapangan F $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ himpunan vektor - vektor bebas-linier, dan $[A] = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$

Untuk suatu vektor $u \in V$,

$\{u, v_1, \ldots, v_n\}$ bebas-linier $\Longleftrightarrow$

$u \notin [A]$.

Bukti :

$\Longrightarrow$ Dibuktikan lewat kontraposisinya.

$\{u, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bebas-linier $\Longrightarrow u \notin A$

Kontraposisinya: $u \in [A] \Longrightarrow \{u, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bergantung-linier.

$u \in [A]$ maka $(\exists\, a, \ldots, a \in F)$. $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = u$

$1u - a_1v_1 - a_2v_2 - \ldots - a_nv_n = \theta$.

$1 \neq 0$ maka $\{u, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bergantung-linier.

$\Longleftarrow$ Dibuktikan lewat kontraposisinya.

$u \notin [A] \Longrightarrow \{u, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bebas-linier

Kontraposisinya: $\{u, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bergantung-liner $\Longrightarrow$ $u \in [A]$.

$\{u, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bergantung-linier maka terdapat $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ skalar-skalar tidak semua nol dalam F, sedemikian sehingga $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n + a_{n+1}u = \theta$

Karena $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bebas-linier, maka $a_{n+1} \neq \theta$

$a_{n+1} \neq 0$ maka mempunyai invers $a_{n+1}^{-1} \in F$

sehingga $u = -a_{n+1}^{-1}(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n)$

Ini berarti $u \in [A]$.

Teorema II.2.3.

Jika S ruang vektor dibangun oleh himpunan-vektor $A \neq \{\Theta\}$ maka dari himpunan A dapat ketemukan himpunan bagian vektor-vektor bebas-linier yang juga membangun S .

Butii :

Misal $A = \{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$

dan $S = [v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n]$.

Cara 1 :

Jika himpunan A bebas-linier, tidak ada yang harus dibuktikan. Jika A bergantung-linier, dengan menggunakan teorema II.2.1. , dapat diketemukan bilangan bulat - positip k, $k \leq n$ sedemikian sehingga $v_k \in [v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{k-1}]$

Misal $A_1 = A - \{v_k\}$, jelas $S = [A_1]$

Jika A_1 ini bebas-linier, teorema terbukti, jika-tidak, maka kembali dapat diketemukan t, $t \leq k$, hingga $v_t \in [v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{t-1}]$.

Misal $A_2 = A_1 - \{v_t\}$, jelas $S = [A_2]$

dan seterusnya, masih dengan teorema II.2.1 akan diketemukan bilangan bulat positip terkecil i, - $i < n$ sedemikian sehingga $v_i \in [v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{i-1}]$ dengan $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{i-1}\}$ bebas - linier dan membangun S .

Cara 2 :

$A = \{v_1, \ldots\ldots, v_n\}$ dan $S = [A]$

Misal $v_1 \neq \Theta$ dalam A, maka $[v_1] \subseteq S$

Jika untuk setiap i = 1, ..., n, $v_i \in [v_1]$

Jika untuk setiap $i, i = 1,2,\ldots,n$ $v_i \in [v_1]$ maka teorema terbukti.

Jika tidak, ambil v_2 elemen A dengan $v_2 \notin [v_1]$, berdasarkan teorema II.2.2., maka $\{v_1, v_2\}$ bebas-linier, dan jelas $[v_1, v_2] \subseteq S$.

Jika untuk setiap $i = 1, \ldots, n$, $v_i \in [v_1, v_2]$ teorema terbukti.

Jika tidak, argumentasi diatas dapat kita teruskan untuk mengkonstruksikan himpunan bagian dari S yang bebas-linier dan membangun S.

Dalam masing-masing cara dari bukti diatas dikontruksikan A' himpunan bagian bebas-linier dari A, sedemikian hingga $[A'] = [A]$. Disini untuk setiap $u \in S$, $\{A', u\}$ bergantung-linier, dan jika A'' suatu himpunan-bagian dari S, yang memuat A maka $A'' = A'$ atau A'' bergantung-linier.

Dalam suatu ruang-vektor, himpunan bagian bebas-linier, yang tidak dapat diperluas menjadi himpunan bebas-linier yang lain disebut <u>Himpunan-bagian terbesar bebas-linier</u> dari ruang-vektor tersebut.

II.3. <u>BASIS DAN DIMENSI RUANG VEKTOR</u>.

<u>Difinisi II.3.1</u>.

Suatu himpunan vektor-vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dinamakan <u>sistim-penghasil</u> (<u>sistim-generator</u>) dari ruang-vektor V, jika setiap $u \in V$ dapat di nyatakan sebagai kombinasi-linier dari $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

Teorema II.3.1.(Teorema Penukaran GRASSMANN-STEINITZ.)

Bila $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ sistim-generator ruang-vektor V lewat lapangan F sedangkan $\{v_1, \ldots, v_r\}$ bebas-linier dalam V Maka pasti dapat diketemukan r buah vektor - diantara $u_1, \ldots, u_n$ sedemikian sehingga setelah r vektor tersebut diganti dengan $v_1, \ldots, v_r$ berlaku (mungkin setelah diadakan pergantian indek) $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ menjadi sistim-generator dari V .

Bukti :

Akan dibuktikan dengan induksi.

Untuk r = 1.

Misal v_1 terletak dalam V maka $\exists\ a_1, \ldots, a_n$ skalar-skalar dalam lapangan F sedemikian se - hingga $v_1 = a_1u_1 + \ldots + a_nu_n$.

Karena v_1 bebas-linier maka $v_1 \neq \theta$ hingga salah - satu dari a_1 pasti tidak sama dengan nol,

misal $a_1 \neq \theta$.

$a_1 \neq 0$ sehingga mempunyai invers , a_1^{-1} dalam - lapangan F ,

$$u_1 = a_1^{-1} v_1 - a_1^{-1} a_2u_2 - \ldots - a_1^{-1} a_nu_n$$

Jadi u_1 merupakan kombinasi-linier dari $v_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$

Maka, setiap kombinasi-linier dari $v_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ juga merupakan kombinasi linier dari $u_1, u_2, \ldots, u_n$

Ini berarti $\{v_1, u_2, \ldots, u_n\}$ merupakan sistim generator dari V .

Langkah :

Misalkan teorema benar untuk himpunan vektor vektor yang terdiri atas k vektor , $k \leq r \leq n$, akan dibuktikan teorema benar untuk k+1 vektor.

Diketahui $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ sistim generator V , dan $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ bebas-linier.
Teorema benar untuk himpunan yang terdiri atas k vektor, ini berarti bila sistim-generator

$\{u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots\ldots, u_n\}$ (I)

vektor-vektor $u_1, \ldots, u_k$ diganti dengan $v_1, \ldots, v_k$ maka $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ (II) juga merupakan sistim-generator V .

Karena (II) merupakan sistim-generator V, maka : $v_{k+1} \in V$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi-linier dari (II).

$$v_{k+1} = b_1 v_1 + \ldots + b_k v_k + b_{k+1} u_{k+1} + b_{k+2} u_{k+2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_n u_n .$$

untuk suatu b_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) skalar-skalar dalam lapangan F.

Jelas bahwa tidak semua $b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_n$ sama dengan nol, sebab jika demikian maka

$$v_{k+1} = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots\ldots + b_k v_k$$

ini berarti $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ bergantung-linier. kontradiksi dengan yang diketahui .

Misal kita ambil $b_{k+1} \neq 0$, sehingga mempunyai invers b_{k+1}^{-1} dalam lapangan F, sehingga

$$u_{k+1} = -b_{k+1}^{-1} b_1 v_1 - \ldots - b_{k+1}^{-1} b_k v_k - b_{k+1}^{-1} v_{k+1} - b_{k+1}^{-1} b_{k+2} v_{k+2} - \ldots\ldots\ldots - b_{k+1}^{-1} b_n v_n$$

Ini berarti setiap kombinasi-linier dari (II) merupakan kombinasi-linier dari

$\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, u_{k+2}, \ldots\ldots, u_n\}$ (III)

Karena menurut hipotesa-induksi , (II) merupakan sistim-generator dari V, maka (III) pun merupakan sistim-generator dari V .

Perhatikan bahwa (III) merupakan sistim-generator yang didapat dari (I) dengan menukarkan

$u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}$ dengan $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$

Dengan demikian teorema lengkap terbukti.

Difinisi II.3.2.

Suatu sistim-generator dari ruang vektor V yang bebas-linier disebut basis dari ruang-vektor V.

Diberikan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ basis ruang-vektor V lewat lapangan F .

Ambil v sebarang vektor dalam V .

maka v dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi-linier dari elemen-elemen basis.

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

untuk $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skalar-skalar dalam lapangan F .

Hingga v dengan tunggal menentukan n tuplel

$(a_1, \ldots, a_n)$ elelem-elemen dari lapangan F.

Teorema II.3.2.

Misal $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, \ldots, v_n\}$ sistim-generator ruang-vektor V lewat lapangan F .

Jika $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ merupakan himpunan-bagian terbesar bebas-linier dalam V , maka

$\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ merupakan basis dari V.

Bukti :

$v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$ sistim-generator ruang-vektor V, maka untuk setiap $v \in V$

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_rv_r + a_{r+1}v_{r+1} + \ldots + a_nv_n$$

Karena $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ merupakan himpunan-bagian terbesar bebas-linier, maka untuk setiap v_i $(i > r)$

$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_i\}$ bergantung-linier.

$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_i\}$ bergantung-linier, maka terdapatlah $c_{1i}, c_{2i}, \ldots, c_{ri}, c_{ii}$ skalar-skalar tidak-semua nol dalam lapangan F, sedemikian sehingga

$$c_{1i}v_1 + c_{2i}v_2 + \ldots + c_{ri}v_i + c_{ii}v_i = \theta$$

Dan karena $v_1, v_2, \ldots, v_r$ bebas-linier, maka $c_{ii} = 0$ dan mempunyai invers c_{ii}^{-1} dalam lapangan F

$$v_i = -c_{ii}^{-1}(c_{2i}v_1 + c_{2i}v_2 + \ldots + c_{ri}v_r)$$

$$v_i = -c_{ii}^{-1}c_{1i}v_1 - c_{ii}^{-1}c_{2i}v_2 - \ldots - c_{ii}^{-1}c_{ri}v_r$$

Jadi untuk setiap i, $i = r+1, r+2, \ldots, n$

v_i merupakan kombinasi-linier dari $v_1, v_2, \ldots, v_r$

Sehingga
$$\begin{aligned} v &= a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_rv_r + \\ &\quad - c_{r+1r+1}^{-1}c_{1r+1}v_1 - \ldots - c_{r+1r+1}^{-1}c_{rr+1}v_r \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad - c_{nn}^{-1}c_{1n}v_1 - c_{nn}^{-1}c_{2n}v_2 - \ldots - c_{nn}^{-1}c_{rn}v_r \\ &= b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_rv_r . \end{aligned}$$

dimana $b_j = a_1 - c_{r+1r+1}^{-1}c_{1r+1} - \ldots - c_{nn}^{-1}c_{1n}$

untuk $j = 1, 2, \ldots, r$.

Jadi untuk setiap $v \in V$ merupakan kombinasi-linier dari $v_1, v_2, \ldots, v_r$. ini berarti $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ merupakan sistim-generator V, dan karena bebas-linier maka $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ merupakan basis V.

Sistim-generator seperti diatas dikatakan dapat-direduksi (reducCible), sedang setiap basis adalah sistim-generator yang irreduccible.

Teorema II.3.3.

Misal $u_1, u_2, \ldots, u_m$ vektor-vektor dalam ruang-vektor untuk mana $\{ v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n \}$ merupakan basisnya.

Jika $m > n$, maka $\{ u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m \}$ bergantung-linier.

Bukti :

Andaikan $\{ u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m \}$ bebas-linier. $\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ basis, maka merupakan sistim-generator ruang-vektornya, dan karena $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ bebas-linier maka dengan menggunakan teorema penukaran dari GRASSMAN-STEINITZ, $\{ u_1, u_2, \ldots, u_n \}$ merupakan sistim-generator dan karena bebas-linier maka merupakan basis ruang-vektor nya, sehingga untuk $m > n$, maka dapat diketemukan $d_1, d_2, \ldots\ldots, d_m$ skalar-skalar dalam lapangan F, sedemikian

sehingga $u_m = d_1 u_1 + d_2 u_2 + \ldots\ldots + d_n u_n$

$$1 u_m - d_1 u_1 - d_2 u_2 - \ldots\ldots - d_n u_n = \theta$$

$1 \neq \theta$ maka $\{ u_1, u_2, \ldots, u_n, u_m \}$ bergantung-linier kontradiksi, pengandaian salah, yang benar $\{ u_1, u_2, \ldots, u_m \}$ bergantung-linier.

Teorema II.3.4.

Diberikan ruang-vektor V lewat lapangan F.

Jika $\{ v_1, v_2, \ldots, v_m \}$ dan $\{ u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n \}$ masing-masing merupkan basis dari V , maka

$m = n$.

Difinisi II.3.3.

Banyaknya elemen suatu basis dari ruang-vektor V, disebut dimensi dari ruang-vektor V, dan dituliskan dengan notasi $d(V)$.

Ruang-vektor yang mempunyai basis yang terdiri atas berhingga elemen, atau ruang-vektor nol, dikatakan mempunyai dimensi berhingga.

Dalam penulisan ini hanya akan dibicarakan ruang-vektor yang mempunyai dimensi berhingga. Hingga untuk selanjutnya, jika dibicarakan ruang - vektor, dimaksudkan ruang-vektor yang mempunyai dimensi berhingga.

Teorema II.3.5.

Misalkan V ruang vektor lewat lapangan F, Jika $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ himpunan-bagian terbesar bebas-linier dalam V, maka $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ merupakan basis dari V.

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merupakan sistim generator dari V.

Misal w sembarang vektor dalam V, karena $\{v_1, \ldots, v_n\}$ himpunan-bagian terbesar bebas linier dalam V, maka $\{v_1, \ldots\ldots, v_n, w\}$ bergantung-linier.

Karena $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n, w\}$ bergantung-linier maka dapat diketemukan $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ skalar-skalar tidak semua nol dalam F sedemikian hingga :

$a_0 w + a_1 v_1 + a_1 v_2 + \ldots\ldots + a_n v_n = \theta$.

Jelas $a_0 \neq 0$, maka mempunyai invers a_0^{-1} dalam lapangan F , jadi

$w = -a_0^{-1} a_1 v_1 - a_0^{-1} a_2 v_2 - \ldots\ldots\ldots - a_0^{-1} a_n v_n$

w sembarang vektor dalam V, dan w dapat dijadikan sebagai kombinasi-linier dari $\{v_1, \ldots\ldots, v_n\}$ maka $\{v_1, \ldots, v_n\}$ merupakan sistim-generator dari V, dan karena $\{v_1, \ldots\ldots, v_n\}$ bebas linier, maka : $\{v_1, \ldots\ldots, v_n\}$ merupakan basis dari V.

Teorema II.3.6.

$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektor-vektor bebas-linier - dalam ruang-vektor berdimensi n, maka $\{v_1, \ldots, v_n\}$ membentuk basis ruang-vektornya.

Bukti :

Berdasar Teorema II.3.3. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merupakan himpunan-bagian terbesar bebas-linier - dalam ruang-vektornya. Dan menurut Teorema II.3.5 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ basis ruang-vektornya.

Teorema II.3.7

Dalam V ruang-vektor berdimensi n, jika W ruang-bagian dari V juga berdimensi n, maka W = V.

Bukti :

Basis dari W, dapat diambil sebagai basis - dari V.

Teorema II.3.8.

Dalam V ruang-vektor berdimensi n, misal

$v_1, \ldots, v_r$ vektor-vektor bebas-linier

dengan r bilangan bulat positip , $r < n$.

Maka dapat diketemukan vektor-vektor

$v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots\ldots, v_n$ dalam V, sehingga-

$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots\ldots, v_n\}$ basis dari V.

Bukti :

Misal $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ basis dari V.

Maka jelas $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, \ldots u_n\}$ bergantung linier, dengan Teorema II.2.1. dapat diketemukan elemen-elemen dalam $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_n\}$ yang merupakan kombinasi-linier dari vektor-vektor sisanya.

Elemen ini jelas bukan salah satu dari para v, kita namakan u_i ($1 < i \leq n$) .

Jelas bahwa

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n\} \quad ..(1)$$

merupakan sistim-generator dari V.

Jika himpunan ini bebas-linier, maka merupakan basis dari V .

Sehingga teorema terbukti .

Jika bergantung linier, kembali diambil satu vektor diantara para u dalam (1), namakan u_j maka

$$\{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_{1-1}, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Juga merupakan sistim-generator V.

Jika himpunan ini bebas-linier, maka merupakan basis dari V .

Jika bergantung-linier, kembali diambil satu vektor diantara para u dalam (2) demikian seterusnya proses dilanjutkan dan diulang kembali , hingga didapat himpunan bebas-linier yang masih merupakan sistim generator dari V.

Himpunan inilah yang merupakan basis dari V.

Teorema II.3.9.

Misal V ruang-vektor berdimensi n

dan W ruang-bagian dari V.

Jika $W \neq \Theta$ maka W mempunyai basis dan

$d(W) \leqslant n$.

Bukti :

Misal $w_1 \neq \Theta \in W$, maka w_1 bebas linier.
Jika w_1 bukan himpunan terbesar bebas linier ,
dapat diketemukan $w_2 \in W$ sedemikian sehingga
$\{ w_1, w_2 \}$ bebas-linier
Proses dini diulangi lagi hingga suatu indek m
dengan m bilangan bulat positip , $m \leqslant n$ sehingga
$\{w_1, \ldots, w_m\}$ bebas-linier dan $\{w_1, \ldots, w_m\}$
himpunan bagian terbesar bebas-linier dalam W, ini
berarti $\{w_1, \ldots, w_m\}$ basis dari W, dan $d(W) \leqslant n$

Teorema II.3.10

V ruang-vektor berdimensi n lewat lapangan F

Misal $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sebarang himpunan

yang terdiri atas n buah vektor dalam ruang

vektor V.

Maka 1). A basis untuk $V \Longleftrightarrow A$ bebas-linier.

2). A basis untuk $V \Longleftrightarrow [A] = V$.

Bukti :

1) $\Longrightarrow$ A basis dari V maka A bebas-linier.

$\Longleftarrow$ A bebas-linier.

$v_1, \ldots, v_n$ bebas-linier

dan karena $d(V) = n$,

maka $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ himpunan bebas-linier

terbesar dalam V.

Dan dengan menggunakan Teorema II.3.5.

$\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ basis dari V.

2) $\Longrightarrow$ Jelas.

$\Longleftarrow$ $[A] = V$.

Berarti A sistim-generator dari V.

Akan dibuktikan bahwa A bebas-linier, andaikan A bergantung-linier, maka terdapat $a_1, \ldots, a_n$ skalar-skalar tidak-semua nol dalam lapangan F sedemikian sehingga $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots\ a_nv_n = \theta$

misal $a_1 \neq 0$ maka $\exists\ a_1^{-1} \in F$

$$v_1 = - a_1^{-1} (a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots\ldots + a_nv_n)$$

Ini berarti $[A] \neq V$. Kontradiksi, pengandaian salah, yang benar A bebas-linier

dan karena $[A] = V$,

Jadi A basis untuk V (terbukti).

II.4. HASIL-TAMBAH DAN HASIL-TAMBAH LANGSUNG.

Difinisi II.4.1.

Bila U dan W masing-masing merupakan ruang-bagian dari ruang-vektor V lewat lapangan F, maka himpunan yang elemen-elemen nya merupakan jumlahan dari elemen ruang-bagian U dengan elemen ruang-bagian W.

$$U + W = \{ v \in V \mid v = u + w \ \& \ u \in U \ \& \ w \in W \}$$

disebut hasil-tambah (sums) dari ruang-bagian U dengan ruang-bagian W.

Akan dibuktikan bahwa U + W merupakan ruang-bagian dari V, dan merupakan ruang-bagian - terkecil yang memuat ruang-bagian U dan memuat ruang-bagian W.

Ambil $u_1 + w_1 \in U + W$ & $u_2 + w_2 \in U + W$ & $a \in F$

$$(u_1+w_1) + (u_2+u_2) = u_1+w_1+u_2+w_2 = u_1+u_2+w_1+w_2$$
$$= (u_1+u_2)+(w_1+w_2) \in U + W$$

$$a\,(u_1+w_1) = au_1 + a\,w_1 \in U + W.$$

Jadi U + W merupakan ruang-bagian dari V.

Tinggal dibuktikan U + W ruang-bagian terkecil yang memuat ruang-bagian U dan ruang-bagian W .

Misal S merupakan ruang-bagian dari V yang memuat ruang-bagian U dan ruang-bagian W, maka S memuat semua vektor-vektor berbentuk u + w dengan $u \in U$ dan $w \in W$, Ini berarti S memuat U + W.

<u>Difinisi II.4.2</u>.

Bila W_1, W_2 dan W_3 masing-masing merupakan ruang -bagian dari ruang-vektor V lewat lapangan F dan setiap elemen dari W_1 dapat dinyatakan secara tunggal sebagai jumlahan elemen W_2 dengan elemen W_3 , maka ruang-bagian W_1 disebut sebagai <u>hasil-tambah langsung</u> (direct sums) dari ruang-bagian W_2 dengan ruang-bagian W_3 .

<u>Teorema II.4.1</u>.

U dan W masing-masing merupakan ruang-bagian dari ruang-vektor V lewat lapangan F.

$$V = U + W \ \&\ U \cap W = \{\theta\} \Longleftrightarrow V = U \oplus W$$

<u>Bukti</u> :

$\Longrightarrow$ Ambil v sebarang vektor dalam V.

$v \in V$ dan karena $V = U + W$ maka dapat diketemukan $u \in U$ & $w \in W$, sehingga $v = u + w$

Jadi $(\forall\, v \in V)\,(\exists.\; u \in U \;\&\; w \in W).\; v = u + v$

Tinggal dibuktikan bahwa adanya $u \in U$ dan $w \in W$

yang memenuhi $v = u + w$ adalah tunggal.

Misal terdapat $u' \in U$ dan $w' \in W$

sedemikian sehingga $u' + w' = v$.

Ini berarti $u + w = u' + w'$, maka $u - u' = w' - w$

Dan karena $u - u' \in U$, maka $w' - w \in U$

& $w' - w \in W$, maka $u - u' \in W$.

Jadi 1) $u - u' \in U$ & $u - u' \in W$, maka $u - u' \in U \cap W$.

dan karena diketahui $U \cap W = \{\theta\}$

maka $u - u' = \theta$ atau $u' = u$

2) $w' - w \in W$ & $w' - w \in U$, maka $w' - w \in U \cap W$

Maka $w' - w = \theta$ atau $w' = w$.

Ini berarti $V = U \oplus W$.

$\Longleftarrow$

$V = U \oplus W$

Maka $(\forall\, v \in V)\,(\exists!\; u \in U \;\&\; w \in W)\; v = u + w$

tinggal membuktikan bahwa $U \cap W = \{\theta\}$

Misalkan $v \in U \cap W$ maka $v \in U$ dan $v \in W$.

$$\left.\begin{array}{l} v \in U,\; v = v + \theta \text{ , maka } \theta \in W \\ \\ v \in W,\; v = \theta + v, \text{ maka } \theta \in U \end{array}\right\}\; \theta \in U \cap W.$$

Karena v dinyatakan secara tunggal sebagai jumlahan elemen U dengan elemen W, maka haruslah $v = \theta$ sehingga $U \cap W = \{\theta\}$ terbukti.

Teorema II.4.2.

V ruang-vektor berdimensi n lewat lapangan F

Jika U ruang-bagian dari V, maka dapat diketemukan W ruang-bagian dari V sedemikian sehingga

$V = U \oplus W$.

Bukti :

Misal $\{ w_1, w_2, \ldots, w_r \}$ basis dari W, jelas bebas-linier.

Menurut Teorema II.3.8., dapat diketemukan vektor-vektor $v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n$ dalam V sedemikian sehingga $\{ w_1, w_2, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n \}$ merupakan basis dari ruang-vektor V.

$\{ v_{r+1}, \ldots, v_n \}$ himpunan-bagian vektor-vektor bebas-linier, dan ini diambil sebagi sistim-generator ruang-bagian W.

Ambil elemen $v \in V$.

Karena $\{ w_1, w_2, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n \}$ basis dari V maka v dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi-linier darinya, jadi terdapat dengan tunggal barisan $a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n$ skalar-skalar dalam lapangan F sedemikian sehingga

$$v = a_1 w_1 + \ldots + a_r w_r + a_{r+1} v_{r+1} + \ldots + a_n w_n$$

maka $v = w + u$, dengan $w = a_1 w_1 + \ldots + a_r w_r$ dalam W, dan $u = a_{r+1} v_{r+1} + \ldots + \alpha_n u_n$ dalam U.

Jadi setiap v elemen dari V dapat dengan tunggal dinyatakan sebagai hasil-tambah elemen-elemen U dan W, terbukti $V = U \oplus W$.

Teorema II.4.3.

Misal U dan W ruang-ruang bagian dari ruang-vektor V lewat lapangan F.

$$V = U \oplus W \Longrightarrow d(V) = d(U) + d(W)$$

Bukti :

Ambil $\{u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_r\}$ basis ruang-bagian U dan $\{w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots, w_s\}$ bais ruang-bagian W.

Maka $(\forall\ u \in U)(\exists!\ a_1, \ldots, a_r \in F).\ u = a_1u_1 + \ldots\ldots + a_ru_r$

dan $(\forall\ w \in W)(\exists!\ b_1, \ldots, b_s \in F).\ w = b_1w_1 + \ldots\ldots + b_sw_s$

Karena $V = U \oplus W$, maka

$(\forall\ v \in V)(\exists!\ u \in U\ \&\ w \in W).\ v = u + w$

Jadi $v = a_1u_1 + \ldots\ldots + a_ru_r + b_1w_1 + \ldots\ldots + b_sw_s$

Ini berarti untuk setiap elemen V dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi-linier dari $u_1, u_2, \ldots, u_r, w_1, \ldots\ldots\ldots, w_s$, atau $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ basis V

Dan berdasarkan difinisi dari dimensi, maka terbukti bahwa $d(V) = d(U) + d(W)$.

Teorema II.4.4.

Misal $W_1, W_2, \ldots, W_k$ ruang-ruang bagian dari ruang-vektor V lewat lapangan F, dan untuk - setiap j, $j = 1, 2, \ldots, k$, β_j basis untuk W_j

maka :

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k \Longleftrightarrow \beta = \bigcup_{j=1}^{k} \beta_j$$

basis untuk V.

Bukti :

Ambil $\beta_1 = \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1\delta_1}$ basis W_1.

$\beta_2 = \alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2\delta_2}$ basis W_2.

:

$\beta_j = \alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{j\delta_j}$ basis W_j

$1 \leq j \leq k$ ....1)

:

$\beta_k = \alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{k\delta_k}$ basis W_k.

$$\beta = \bigcup_{j=1}^{k} \beta_j = \bigcup_{j=1}^{k} \{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{j s_j}\}$$

bebas-linier.

Ambil $w_1 \in W_1$, maka $(\exists!\ c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1 s_1} \in F)$

$$w_1 = \sum_{i=1}^{s_1} c_{1i}\ \alpha_{1i}$$

$w_2 \in W_2$, maka $(\exists!\ c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2 s_2} \in F)$

$$w_2 = \sum_{i=1}^{s_2} c_{2i}\ \alpha_{2i}$$

$\vdots$

$w_j \in W_j$, maka $(\exists!\ c_{j1}, c_{j2}, \ldots, c_{j s_j} \in F)$

$$w_j = \sum_{i=1}^{s_2} c_{ji}\ \alpha_{ji} \qquad 1 \leq j \leq k \qquad \ldots.(2)$$

$\vdots$

$w_k \in W_k$, maka $(\exists!\ c_{k1}, c_{k2}, \ldots, c_{k s_k} \in F)$

$$w_k = \sum_{i=1}^{s_k} c_{ki}\ \alpha_{ki}$$

Karena $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots. \oplus W_k$

maka $(\forall\ v \in V)\ (\exists\ w_i \in W_i\ \&\ i = 1,2,\ldots,k)$.

$$v = w_1 + w_2 + \ldots. + w_k.$$

Ambil $v \in V$,

maka $v = \sum_{i=1}^{s_1} c_{1i}\ \alpha_{1i} + \sum_{i=1}^{2} c_{21}\ \alpha_{2i} + \ldots..+$

$$+ \sum_{i=1}^{s_k} c_{ki}\ \alpha_{ki}.$$

Jadi v merupakan kombinasi-linier dari

$\bigcup_{j=1}^{k} \{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots\ldots, \alpha_{j s_j}\}$

v sebarang dalam V, maka $\bigcup_{j=1}^{k} \{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{j s_j}\}$

$\bigcup_{j=1}^{k} \beta_j$ merupakan sistim-generator V.

Tinggal dibuktikan bahwa sistim-generator ini bebas-linier .

Andaikan bergantung linier, maka dapat diketemukan

$$b_{11}, \ldots, b_{1\delta_1}, b_{21}, \ldots, b_{\delta_2}, \ldots\ldots, b_{j1},$$

$$b_{j\delta_j}, \ldots\ldots, b_{k1}, \ldots, b_{k\delta_k}$$

skalar-sakalr tidak semua nol dalam lapangan F sedemikian sehingga :

$$\theta = \sum_{i=1}^{\delta_1} b_{1i}\alpha_{1i} + \sum_{i=1}^{\delta_2} b_{2i}\alpha_{2i} + \ldots\ldots +$$

$$\sum_{i=1}^{\delta_k} b_{ki}\, \alpha_{ki}$$

Misal $b_{11} \neq 0$, maka $\exists\, b_{11}^{-1} \in F$.

Ini berarti $\bigcup_{j=1}^{k} \{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{j\delta_j}$

tidak membangun seluruh V .

Sehingga $\bigcup_{j=1}^{k} \{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{j\delta_j}\}$

bukan sistim-generator V, kontradiksi .

Pengandaian salah , yang benar

$\bigcup_{j=1}^{k} \{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{j\delta_j}\}$ bebas-linier.

Karena $\bigcup_{j=1}^{k} \{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{j\delta_j}\}$ merupakan sistim-generator yang bebas-linier.

maka $\bigcup_{j=1}^{k} \{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{j\delta_j}\} = \bigcup_{j=1}^{k} \beta = \beta$

merupakan basis V ,

$\Longleftarrow$

$$\beta = \bigcup_{j=1}^{k} \beta_j = \bigcup_{j=1}^{k} \{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots\ldots, \alpha_{j\delta_j}$$

basis V.

maka untuk setiap vektor v dalam V dapat diketemu

kan $e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1d_1}, e_{21}, \ldots, e_{2d_2}, \ldots\ldots,$

$e_{j1}, \ldots, e_{jd_j}, \ldots\ldots, e_{k1}, \ldots\ldots, e_{kd_k}$.

skalar-skalar dalam lapangan F,

sedemikian sehingga :

$$v = e_{11}\alpha_{11} + \ldots + c_{1d_1}\alpha_{1d_1} + e_{21}\alpha_{21} + \ldots\ldots +$$

$$e_{2d_2}\alpha_{2d_2} + \ldots\ldots + e_{j1}\alpha_{j1} + \ldots + e_{jd_j}\alpha_{jd_j} \ldots$$

$$\ldots\ldots, + e_{k1}\alpha_{k1} + \ldots + e_{kl}\alpha_{kd_k}.$$

Karena $\{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1d_1}\}$ basis W_1 , maka

$$(\exists!\ w_1 \in W_1).\ w_1 = \sum_{i=1}^{d_1} e_{1i}\,\alpha_{1i}.$$

$\{\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2d_2}\}$ basis W_2 , maka

$$(\exists!\ w_2 \in W_2).\ w_2 = \sum_{i=1}^{d_2} e_{2i}\,\alpha_{2i}$$

$\vdots$

$\{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{jd_j}\}$ basis W_j , maka

$$(\exists!\ w_j \in W_j).\ w_j = \sum_{i=1}^{d_j} e_{ji}\,\alpha_{ji}.$$

$\vdots$

$\{\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{kd_k}\}$ basis W_k , maka

$$(\exists!\ w_k \in W_k).\ w_1 = \sum_{i=1}^{d_k} e_{ki}\,\alpha_{ki}.$$

Sehingga $v = w_1 + w_2 + \ldots + w_k$.

Dan karena terdapatnya w_j dalam W_j ($j = 1,2,\ldots,k$)

adalah tunggal, maka :

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots\ldots \oplus W_k \quad (\text{ terbukti }).$$

Akibat :

Jika $W_1, W_2, \ldots\ldots, W_k$ ruang-ruang bagian dari ruang-vektor V lewat lapangan F, maka berlaku

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots\ldots\ldots \oplus W_k \Longrightarrow$$

$$d(V) = d(W_1) + d(W_2) + \ldots\ldots + d(W_k)$$

Bukti:

Ambil $B_j = \{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots\ldots, \alpha_{jd_j}\}$ basis W_j

untuk $j = 1, 2, \ldots, k$

maka $B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j = \bigcup_{j=1}^{k} \{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots\ldots, \alpha_{jd_j}\}$

merupakan basis dari V, dan berdasarkan difinisi

maka $d(V) = d(W_1) + d(W_2) + \ldots\ldots + d(W_k)$