BAB II

PERSAMAAN GAYA GERAK DARI LAGRANGE UNTUK PARTIKEL TUNGGAL

II.1 Pertimbangan-pertimbangan.

Salah satu dari beberapa rumus hukum-hukum dinamika yang fundamental (baku) dapat diambil sebagai dasar untuk sumber penyimpulan daripada persamaan Lagrange. Dalam uraian ini kami akan mulai dengan hukum gaya geraknya Newton, kemudian akan disimpulkan apa hubungannya dengan kepunyaan Lagrange. Cara pendekatan ini diikuti karena akan dapat langsung membawa dari wilayah yang asing ke dalam wilayah-wilayah yang kita kenal dengan menelusuri salah satu jalur yang mudah membuat kita mengerti pokok-pokok secara ilmu alam maupun secara mathematik. Sebagai satu cara lebih lanjut untuk meniadakan masalah-masalah yang membingungkan, kami disini akan membatasi diri sendiri pada penyimpulan dan pertimbangan hal persamaan gaya gerak Lagrange untuk partikel tunggal dahulu.

II.2 Penyimpulan Rumus-rumus Lagrange Untuk Partikel Tunggal tanpa gesekan (friction).

Demi kejernihan persoalan marilah kita bersikap lebih spesifik lagi dengan mengasumsikan bahwa gerakan daripada partikel yang sedang kami teliti adalah terbatas pada satu bidang permukaan yang mulus (tanpa gesekan) seperti misalnya sebuah bidang atau bidang bola.

Misal F dengan komponen-komponennya F_x, F_y, F_z mewakili vektor dari gaya (misal yang disebabkan oleh pegas, gravitasi, gesekan dan lain-lain) yang bekerja pada partikel. Kemudian dengan mengasumsikan massa konstan yaitu m dan bahwa x, y, z adalah koordinat-koordinat pada sumbu kartesius, kita dapat menuliskan persamaan gaya gerak menurut Newton sebagai berikut:

$$F_x = m\ddot{x}$$

$$F_y = m\ddot{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 2.1\ )$$

$$F_z = m\ddot{z}$$

Dimana:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Dan F_x samadengan komponen dari gaya F pada sumbu x.

F_y samadengan komponen gaya F pada sumbu y.

F_z samadengan komponen gaya F pada sumbu z.

Pada tahap ini akan diteliti dahulu hasil usaha δW yang telah dilakukan oleh F, kalau diimajinasikan bahwa partikel itu telah mengalami perubahan jarak yang sangat kecil sekali yaitu δS dengan komponen-komponennya yaitu:

δx, δy, δz.

jadi: $\delta W = F\,\delta S \cos(\ F, \delta S\ )$

$$= F_x\,\delta x + F_y\,\delta y + F_z\,\delta z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\ 2.2\ )$$

Sekarang dengan mengalikan ruas kiri dan ruas kanan dari persamaan (2.1) dengan δx, δy, δz maka akan didapat:

$$F_x\,\delta x = m\ddot{x}\,\delta x$$

$$F_y\,\delta y = m\ddot{y}\,\delta y$$

$$F_z\,\delta z = m\ddot{z}\,\delta z$$

Dengan menjumlahkan semua persamaan di atas, maka kita akan memperoleh:

$$F_x\,\delta x + F_y\,\delta y + F_z\,\delta z =$$

$$m\ddot{x}\,\delta x + m\ddot{y}\,\delta y + m\ddot{z}\,\delta z$$

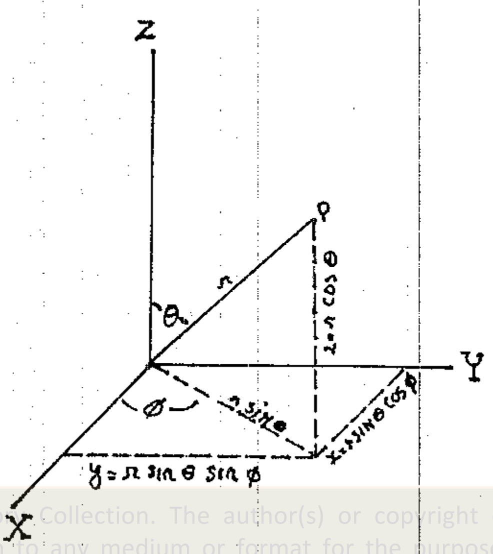
$$F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z =$$
$$m (\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z)$$
$$m (\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z) =$$
$$F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3)$$

Ruas kanan dari persamaan (2.3) hanya merupakan usaha yang dilakukan oleh F. Mengingat bahwa gaya gerak itu terbatas pada suatu bidang saja maka koordinat-koordinat x, y, dan z dapat dinyatakan sebagai fungsi-fungsi daripada koordinat-koordinat q_1 dan q_2 dan kemudian dapat diindikasikan sebagai berikut:

$$x = x (q_1, q_2)$$
$$y = y (q_1, q_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4)$$
$$z = z (q_1, q_2)$$

Contoh untuk memperlihatkan arti dari (2.4) adalah sebagai berikut:

Kalau kita mengandaikan bahwa permukaan batasannya berbentuk bidang bola dengan jari-jari yang konstan yaitu:r.



Gambar 2.1

Dengan melihat gambar diatas maka kita akan mendapatkan:

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.5)$$
$$z = r \cos\theta$$

Untuk sementara ini waktu tidak diperhitungkan di dalam persamaan (2.4), dan di sini kita mengasumsikan bahwa sumbu-sumbu x, y, dan z adalah statis. Perubahan-perubahan nyata yang terjadi adalah δx, δy dan δz.
Dari persamaan (2.4) kita akan mendapatkan persamaan seperti di bawah ini:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2$$
$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.6)$$
$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2$$

Setelah kita mendapatkan persamaan (2.6) maka kita dapat mensubtitusikan ke dalam persamaan (2.3) dan kemudian kita mendapat persamaan sebagai berikut:

$$\delta W = m\left\{ \ddot{x}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2\right) + \right.$$
$$+ \ddot{y}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2\right) +$$
$$\left. + \ddot{z}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2\right)\right\}$$
$$= F_x\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2\right) +$$
$$+ F_y\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2\right) +$$

$$+ F_z \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_2 \right)$$

Jadi dapat kita tuliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \delta W &= m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \\ &\quad + m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_2} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) \delta q_2 \\ &= \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \\ &\quad + \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_2} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_2} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) \delta q_2 \end{aligned} \quad \text{..(2.7)}$$

δW dari (2.7) adalah berfungsi sebagai satu perubahan δS. Karena q_1 dan q_2 adalah variable yang independent, marilah kita menfokuskan pada δW atau hasil usaha dengan menganggap bahwa yang bersifat variable adalah q_1 dan dianggap bahwa koordinat yang lainnya konstan (misal $\delta q_2 = 0$). Maka persamaan (2.7) akan menjadi seperti dibawah ini:

$$\begin{aligned} \delta W_{q_1} &= m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 \\ &= \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 \end{aligned} \quad \text{..(2.8)}$$

Pada tahap ini kita akan memanfaatkan penerapan persamaan-persamaan berikut ini:

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) - \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \quad \text{......(2.9)}$$

$$\frac{\partial x}{\cdot} = \frac{\partial \dot{x}}{\cdot} \quad \text{......................................(2.10)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 2.11\ )$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.10) dan (2.11) ke dalam persamaan (2.9) maka kita akan mendapat:

$$\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\ 2.12\ )$$

Dan dengan sedikit pertimbangan lebih lanjut maka kita akan dapat menyusun persamaan sebagai berikut:

$$\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)}{\partial \dot{q}_1}\right\} - \frac{\partial\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)}{\partial q_1} \quad \ldots\ldots\ldots (\ 2.13\ )$$

Dengan cara yang sama maka kita akan mendapatkan sebagai berikut:

$$\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right)}{\partial \dot{q}_1}\right\} - \frac{\partial\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right)}{\partial q_1}$$

$$\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial\left(\frac{\dot{z}^2}{2}\right)}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\left(\frac{\dot{z}^2}{2}\right)}{q_1}$$

Dengan mensubtitusikan $\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}$, $\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1}$ dan $\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1}$ ke dalam persamaan (2.8) maka kita akan mendapat persamaan sebagai berikut:

$$\delta W_{q_1} = m\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)}{\partial \dot{q}_1}\right\} - \frac{\partial\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)}{\partial q_1} + \right.$$

$$+ \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right)}{\partial \dot{q}_1}\right\} - \frac{\partial\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right)}{\partial q_1} +$$

$$+ \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\dot{z}^2}{2}\right)}{\partial \dot{q}_1}\right\} - \frac{\partial\left(\frac{\dot{z}^2}{2}\right)}{\partial q_1}\Bigg]\, \delta q_1$$

$$= m\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)}{\partial \dot{q}_1}\right\} + \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right)}{\partial \dot{q}_1}\right\} + \right.$$

$$+ \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\dot{z}^2}{2}\right)}{\partial \dot{q}_1}\right\} - \frac{\partial\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)}{\partial q_1} - \frac{\partial\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right)}{\partial q_1} -$$

$$\left. - \frac{\partial\left(\frac{\dot{z}^2}{2}\right)}{\partial q_1}\right]\delta q_1$$

$$\delta W_{q_1} = m\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right)}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial\left(\frac{\dot{z}^2}{2}\right)}{\partial \dot{q}_1}\right\} - \right.$$

$$\left. - \left\{\frac{\partial\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)}{\partial q_1} + \frac{\partial\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right)}{\partial q_1} + \frac{\partial\left(\frac{\dot{z}^2}{2}\right)}{\partial q_1}\right\}\right]\delta q_1$$

$$= m\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2}\right)\right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2}\right)\right]\delta q_1$$

$$= \left[\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left\{\frac{m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}{2}\right\}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial q_1}\left\{\frac{m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}{2}\right\}\right] q_1$$

Maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\delta W_{q_1} = \left[\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} \right\} - \right.$$

$$\left. - \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} \right\} \right] \delta q_1 \quad ..(\ 2.14\ )$$

$$= \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1$$

Karena $\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ adalah energi kinetik dari suatu partikel dan diberi simbol T (dimana $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{S}^2$) , maka persamaan dari (2.14) dapat dituliskan seperti dibawah ini:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \quad ....(\ 2.15\ )$$

$$F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1}$$

Apabila sekarang yang dianggap bersifat variable adalah q_2 dan $\delta q_1 = 0$, maka hasil usaha δW_{q_2} yang diasosiasikan dengan satu variabel di dalam q_2 saja, akan terjadi hal yang sama yakni:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = \quad ....(\ 2.16\ )$$

$$F_x \frac{\partial x}{\partial q_2} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_2} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_2}$$

Persamaan (2.15) dan (2.16) adalah rumus-rumus ciptaan Lagrange.

Dan secara umumnya:

$$F_x \frac{\partial x}{\partial q_r} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_r} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_r} = F_{q_r} \quad ....(\ 2.17\ )$$

Dimana q_r adalah sebuah koordinat yang tampil di T.

Dengan demikian maka rumus-rumus persamaan Lagrange secara umum dapat ditulis:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = F_{q_r} \quad \text{..................(2.18)}$$

Disini kelihatan bahwa untuk sebuah partikel yang mempunyai dua tingkat kebebasan, maka terdapatlah dua buah persamaan Lagrange. Dan sekarang apabila kita mengasumsikan bahwa sebuah partikel yang mempunyai tiga tingkat kebebasan (tanpa adanya gesekan pada partikel tersebut), maka persamaan (2.4) masing-masing akan mengandung unsur-unsur q_1, q_2 dan q_3 seperti tertera dibawah ini:

$$x = x\ (\ q_1,\ q_2,\ q_3\ )$$

$$y = y\ (\ q_1,\ q_2,\ q_3\ )$$

$$z = z\ (\ q_1,\ q_2,\ q_3\ )$$

Dan akhirnya kita akan mendapatkan tiga buah rumus dari persamaan Lagrange. Pada umumnya akan ada sejumlah rumus persamaan model Lagrange yang sesuai dengan jumlah tingkat kebebasan yang ada.

Sekarang dengan menganggap bahwa q_1, q_2, dan q_3 masing-masing adalah merupakan bariabel yang independen dan dengan mengikuti prosedur yang diuraikan di atas secara seksama, maka sebuah rumus persamaan model Lagrange yang relevan dengan setiap dari ketiga koordinat yang ada akan didapat pula.

II.3 Hal-hal Yang Penting Pada Rumus-rumus persamaan model Lagrange.

Rumus-rumus persamaan differinsial mengenai gaya gerak untuk problema yang manapun tentunya akan didapatkan dengan melaksanakan langkah-langkah yang diindikasikan pada (2.18).

sebuah persamaan yang berlaku secara umum untuk suatu usaha yang telah dilakukan oleh suatu gaya (dimana komponen-komponennya F_x, F_y, dan F_z).

Dengan menganggap bahwa q_1 yang bersifat variabel dan koordinat yang lainnya konstan (misal $\delta q_2 = 0$), hal tersebut bisa didapat jika q_2 dianggap konstan. Kemudian δx, δy, δz akan didapat dari (2.4) sebagai berikut:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1$$

Kemudian dengan mensubstitusikan δx, δy dan δz ke dalam persamaan :

$$\delta W = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

akan didapatkan sebagai berikut:

$$\delta W_{q_1} = F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1$$

$$= \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1$$

Kemudian persamaan tersebut diatas dapat dituliskan secara singkat seperti sebagai berikut :

$$\delta W_{q_1} = F_{q_1} \cdot \delta q_1$$

Secara umum dapat dituliskan seperti dibawah ini:

$$\delta W_{q_r} = F_{q_r} \cdot \delta q_r \quad \text{.......................} (2.19)$$

Di dalam proses menentukan δW_{q_r}, yang merupakan hasil dari suatu usaha dapat dianggap positif atau negatif, tergantung dari apakah gayanya mempercepat atau memperlambat. Kalau partikelnya punya tiga tingkat kebebasan maka usaha totalnya akan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\delta W_{total} = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \delta q_1 + \\ +(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \delta q_2 + \quad \ldots (2.20) \\ +(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \delta q_3$$

II.4 Mengintegrasikan Rumus-rumus persamaan differensial gaya gerak.

Di sini merupakan suatu fakta yang tidak menguntungkan, tetapi menjadi suatu fakta pula yang harus dihadapi setiap sarjana praktek , yakni bahwa di dalam sebagian besar kasus yang timbul adalah bahwa rumus-rumus dari gaya gerak begitu berbelit-belit sehingga untuk itu tidak tersedia metode untuk mengintegrasikannya.
Tetapi masih untung juga, karena pada masa sekarang ini alat-alat komputer banyak memberi pertolongan kepada kita. Dengan menggunakan alat komputer itu, maka cara-cara penyelesaian yang berdasarkan pola-pola grafik dan numerik terhadap rumus-rumus persamaan yang dahulunya dianggap mustahil tetapi sekarang dapat lebih mudah terselesaikan dengan baik dan bahkan sekarang dapat disimpulkan dengan baik. Setelah kita membaca uraian di atas tadi, maka kita akan dapat menyelesaikan persoalan-persoalan rumit yang kita hadapi.

II.5 Contoh-contoh yang Ilustratif.

Untuk dapat memahami sekaligus meresapi suatu persoalan maka kita membutuhkan banyak contoh. Karena contoh-contoh merupakan cara yang terbaik untuk menjelaskan suatu pokok persoalan yang ingin kita ketahui.
Dibawah ini tertera beberapa contoh diantaranya sebagai berikut:

Contoh 2.1

Gerak dari suatu bola yang berlubang, dimana bola tersebut dapat bergerak pada seutas kawat yang kaku dan berbentuk parabolis.

Bola tadi yang bermassa m bebas untuk meluncur di sepanjang kawat kaku yang berbentuk parabolis tadi.

Dimana kawat tersebut mempunyai persamaan $y = bx^2$, dan kawat tadi terletak mendatar.

Mengingat bahwa gerakan bola itu terbatas pada satu jalur saja, maka bola tadi hanya mempunyai satu kebebasan gerak. Dengan demikian akan terdapat dua persamaan yaitu:

$y = bx^2$ dan

$z = c$ (konstan)

Padahal kita tahu bahwa:

$$T = \tfrac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right)$$

$$\dot{y} = 2b\dot{x}x$$

$$\dot{z} = 0$$

Kemudian $\dot{y} = 2b\dot{x}x$ dan $\dot{z} = 0$ disubstitusikan ke dalam T yang nantinya akan diperoleh:

$$T = \tfrac{1}{2} m \left\{ \dot{x}^2 + (2b\dot{x}x)^2 + 0 \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 4b^2\dot{x}^2x^2)$$

$$= \tfrac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + 4b^2x^2)$$

Kemudian:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} (1 + 4b^2x^2)$$

$$= m\dot{x} + 4mb^2\dot{x}x^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + 4mb^2\ddot{x}x^2 + 8mb^2\dot{x}^2x$$

$$= m\ddot{x} (1 + 4b^2x^2) + 8mb^2\dot{x}^2x$$

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 (1 + 4b^2x^2)$$
$$= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + 2b^2m\dot{x}^2x^2$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 4 b^2m\dot{x}^2x$$

Dengan menggunakan persamaan dari Lagrange maka akan didapatkan:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = F_x$$
$$m\ddot{x} + 4mb^2\ddot{x}x^2 + 8mb^2\dot{x}^2x - 4b^2m\dot{x}^2x = F_x$$
$$m\ddot{x} + 4mb^2\ddot{x}x^2 + 4mb^2\dot{x}^2x = F_x$$
$$m\ddot{x} (1 + 4b^2x^2) + 4mb^2\dot{x}^2x = F_x$$

Dengan menggunakan persamaan (1.19), maka nantinya akan mendapatkan harga dari F_x.

Marilah sekarang kita mengasumsikan bahwa sumbu y adalah terletak vertikal dan dianggap bahwa satu-satunya gaya yang bekerja pada bola tersebut adalah gravitasi bumi. Kalau bola itu diberi perubahan sebesar $+ \delta x$, maka gerakan vertikalnyapun akan menempuh sejauh $+ \delta y$.
Maka usaha yang timbul karena adanya gravitasi bumi ialah:

$$\delta W = -mg \, \delta y.$$

Dari persamaan $y = bx^2$, maka akan didapatkan:

$$\delta y = 2bx \, \delta x.$$

Dengan mensubstitusikan $\delta y = 2bx \, \delta x$ ke dalam δW, maka akan didapatkan:

$$\delta W = -mg \, 2bx \, \delta x = F_x \, \delta x$$

Jadi:

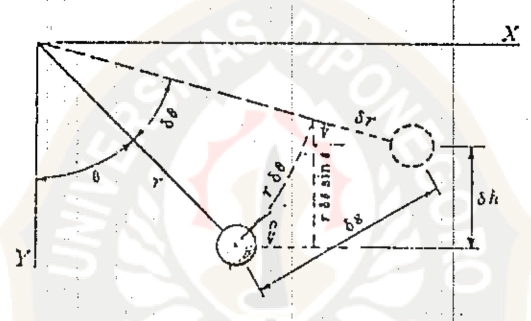
$$F_x = -mg2bx.$$

Dengan mensubstitusikan $F_x = -mg2bx$ ke dalam maka persamaan gaya geraknya akan diperoleh sebagai berikut:

$$m\ddot{x}\,(\,1 + 4b^2x^2\,) + 4m\dot{x}^2xb^2 =$$
$$-2mgbx.$$

Contoh 2.2

Bandulan pendulum (ayunan) yang diikatkan pada gelang karet (seperti pada gambar 2.2)



Gambar 2.2

Bola pendulum (ayunan) yang dianggap sebagai sebuah partikel yang bermassa m, mempunyai dua tingkat kebebasan. Dengan menggunakan r dan θ sebagai koordinat-koordinat. Marilah kita di sini menguraikan atau mengilustrasikan dua macam metode untuk mendapatkan gaya-gaya yang diuraikan. Hasil-hasil usaha yang dilakukan oleh gaya tarik bumi dan gelang karet dinyatakan sebagai berikut:

$$\delta W_{total} = -mg\,\delta h - k\,(\,r - r_o\,)\,\delta r,$$

Dimana r_o adalah panjang gelang karet yang belum terentang (sebelum diberi bandulan) dan k adalah koefisien gaya pegas dari karet.

Usaha di ruas kanan dari persamaan di atas diberi tanda negatif karena gaya yang dilakukan untuk melakukan suatu usaha berlawanan dengan gaya tarik bumi dan berlawanan pula dengan gelang karetnya.

$$\delta h = r\,\delta\theta \sin\theta - \delta r \cos\theta$$

Kemudian δh disubstitusikan ke dalam δW_{total} maka akan didapatkan:

$$\begin{aligned}\delta W_{total} &= -mg\,(r\,\delta\theta \sin\theta - \delta r \cos\theta) - \\ &\quad - k\,(r - r_o)\,\delta r \\ &= -mgr\,\delta\theta \sin\theta + mg\,\delta r \cos\theta - \\ &\quad - k\,(r - r_o)\,\delta r \\ &= -mgr\,\delta\theta \sin\theta - \\ &\quad - \{k\,(r - r_o) - mg\cos\theta\}\,\delta r.\end{aligned}$$

Jadi dari persamaan tersebut terlihat bahwa hasil usaha yang sesuai dengan perubahan yang terjadi pada r saja adalah:

$$\begin{aligned}\delta W_r &= -\{k\,(r - r_o) - mg\cos\theta\}\,\delta r \\ &= F_r\,\delta r\end{aligned}$$

Maka dapat dituliskan bahwa:

$$F_r = -k\,(r - r_o) + mg\cos\theta$$

Sedangkan hasil usaha yang sesuai dengan perubahan yang terjadi pada θ saja adalah:

$$\begin{aligned}\delta W_\theta &= -mgr\sin\theta\,\delta\theta \\ &= F_\theta\,\delta\theta\end{aligned}$$

Maka dapat dituliskan bahwa:

$$F_\theta = -mgr\sin\theta.$$

Marilah sekarang kita akan menemukan F_r dan F_θ dengan cara langsung menerapkan rumus:

$$F_{q_r} = F_x \frac{\partial x}{\partial q_r} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_r} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_r}$$

Dengan memperhitungkan gaya tarik buminya dan kemampuan merentang dari gelang karetnya, maka kita dapat melihat komponen-komponen pada sumbu x dan y dari gaya yang ada pada bola pendulum yaitu:

$$F_x = -k(r - r_o)\sin\theta$$

$$F_y = mg - k(r - r_o)\cos\theta$$

Dari gambar di atas dapat ditentukan bahwa:

$$x = r\sin\theta$$

$$y = r\cos\theta$$

Kemudian dapat kita peroleh:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta$$

Oleh karenanya:

$$F_r = F_x\frac{\partial x}{\partial r} + F_y\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= -k(r - r_o)\sin\theta \,.\, \sin\theta +$$
$$+ \{ mg - k(r - r_o)\cos\theta \} \cos\theta.$$

$$= -k(r - r_o)\sin^2\theta + mg\cos\theta -$$
$$-k(r - r_o)\cos^2\theta.$$

$$= -k(r - r_o)(\sin^2\theta + \cos^2\theta) +$$
$$+ mg\cos\theta$$

$$F_r = -k(r - r_o) + mg\cos\theta.$$

Kemudian untuk mencari F_θ :

$$x = r\sin\theta$$

$$y = r\cos\theta$$

$$\partial x$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = - r \sin \theta$$

$$F_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= - k (r - r_o) \sin \theta (r \cos \theta) +$$

$$+ \left\{ mg - k (r - r_o) \cos \theta \right\} (- r \sin \theta)$$

$$= - k r (r - r_o) \sin \theta \cos \theta -$$

$$- mgr \sin \theta + k r (r - r_o) \sin \theta \cos \theta$$

$$F_\theta = - mgr \sin \theta$$

Jadi hasil dari F_r dan F_θ sama dengan menggunakan cara sebelumnya.

II.6 Rumus-rumus persamaan Lagrange untuk partikel tunggal, dengan mengasumsikan bahwa kerangka referensi bergerak dan adanya gesekan yang bergerak.

Sampai sejauh ini kita telah menghindari pembahasan apapun yang bersangkutan dengan sistim-sistim yang melibatkan kerangka-kerangka referensi yang bergerak dan dengan adanya gesekan yang bergerak.

Tetapi berhubung dalam praktek banyak sekali problema dari jenis / tipe ini terjadi, maka sangat penting sekali kiranya bahwa penyimpulan-penyimpulan atau penerapan-penerapan sistim-sistim perumusan dari Lagrange untuk permasalahan-permasalahan seperti itu mendapat perhatian yang seksama dan teliti.

Marilah kita sekali lagi mengasumsikan bahwa kita sedang menangani sebuah partikel tunggal yang dapat bergerak dengan bebas di atas suatupermukaan yang mulus.

Selanjutnya kita akan mengasumsikan lagi bahwa koordinat hitung dalam kondisi dimana bidang permukaan tadi / atau kerangka referensinya bergerak.

Dengan mengikuti prosedur dari seksi II.2 secara mutlak, maka sekali lagi kita menulis:

$$m (\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z) =$$

$$F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

Dimana δx, δy, δz mewakili suatu proses perubahan yang mutlak dan F_x, F_y, dan F_z merupakan komponen-komponen dari suatu gaya yang bekerja pada suatu partikel.

Rumus-rumus persamaan untuk proses penjabaran yang berhubungan dengan x, y dan z untuk dijadikan q_1, q_2, dan t, dan sekarang akan diindikasikan sebagai:

$$x = f_1 (q_1, q_2, t)$$

$$y = f_2 (q_1, q_2, t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.21)$$

$$z = f_3 (q_1, q_2, t)$$

Hanya ada dua buah koordinat yang telah diuraikan tampil di dalam rumus persamaan ini, dan faktor waktu bisa masuk di dalamnya disebabkan oleh hadirnya gerakan-gerakan yang diasumsikan itu.

Rumus-rumus dari (2.21) akan menangani hal-hal yang ada hubungannya dengan gesekan dan gerakan-gerakan yang diasumsikan tadi.

Untuk mendapatkan δx, δy dan δz kita bisa menggunakan rumus dari persamaan (2.21), selanjutnya akan kita dapatkan:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial x}{\partial t} \delta t$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial y}{\partial t} \delta t$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_2 + \frac{\partial z}{\partial t} \delta t$$

Dengan mensubstitusikan δx, δy dan δz ke dalam persamaan:

$$m (\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z) =$$

$$F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z.$$

Akhirnya kita akan mendapatkan sebagai berikut:

$$m \left\{ \ddot{x} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial x}{\partial t} \delta t \right) + \right.$$

$$+ \ddot{y} \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial y}{\partial t} \delta t \right) +$$

$$+ \ddot{z} \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial z}{\partial t} \delta t \right) =$$

$$= F_x \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial x}{\partial t} \delta t \right) +$$

$$+ F_y \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial y}{\partial t} \delta t \right) +$$

$$+ F_z \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial z}{\partial t} \delta t \right)$$

$$+ m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_2} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) \delta q_2 +$$

$$+ m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial t} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial t} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) \delta t = \quad ..(2.22)$$

$$= \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 +$$

$$+ \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_2} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_2} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) \delta q_2 +$$

$$+ \left(F_x \frac{\partial x}{\partial t} + F_y \frac{\partial y}{\partial t} + F_z \frac{\partial z}{\partial t} \right) \delta t.$$

Dalam hal ini apabila yang dianggap bersifat variabel adalah q_1 dan $\delta q_2 = 0$, $\delta t = 0$. Maka persamaan (1.22) menjadi:

$$m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 =$$

$$\left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1$$

Demikian pula apabila q_2 dianggap variabel dan $\delta q_1 = 0$, $\delta t = 0$, maka akan diperoleh:

$$m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_2} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) \delta q_2 =$$

$$\left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_2} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_2} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) \delta q_2$$

Apabila t dianggap variabel dan $\delta q_1 = 0$ dan $\delta q_2 = 0$, maka akan diperoleh:

$$m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial t} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial t} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) \delta t =$$

$$\left(F_x \frac{\partial x}{\partial t} + F_y \frac{\partial y}{\partial t} + F_z \frac{\partial z}{\partial t} \right) \delta t.$$

Akhirnya dengan menerapkan persamaan-persamaan (2.9), (2.10) dan (2.11) seperti pada seksi II.2, maka persamaan model Lagrange seperti persamaan (2.15) akan diperoleh juga akhirnya.

Jadi walaupun kerangka-kerangka referensi yang sifatnya bergerak dan / atau dengan adanya gesekannya yang ikut bergerak tidak akan membuat perubahan pada persamaan model Lagrange yaitu: persamaan (2.18).

II.7 Membahas Mengenai Energi Kinetik, Gaya-gaya Yang Diuraikan dan Persoalan-persoalan Lainnya Bilamana Kerangka Referensinya Dan Gesekannya Ikut Bergerak.

Dalam hal ini pengertian tentang gaya-gaya yang telah diuraikan cukup penting sekali artinya.

Perhatikan bahwa di dalam persamaan:

$$F_x \frac{\partial x}{\partial q_r} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_r} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_r} \; \delta q_r =$$

$$F_{q_r} \delta q_r =$$

$$\delta W_{q_r}.$$

Di sini faktor t dianggap konstan.

Dan sekarang akan dianggap bahwa yang bersifat variabel adalah t dan $\delta q_1 = 0$, $\delta q_2 = 0$

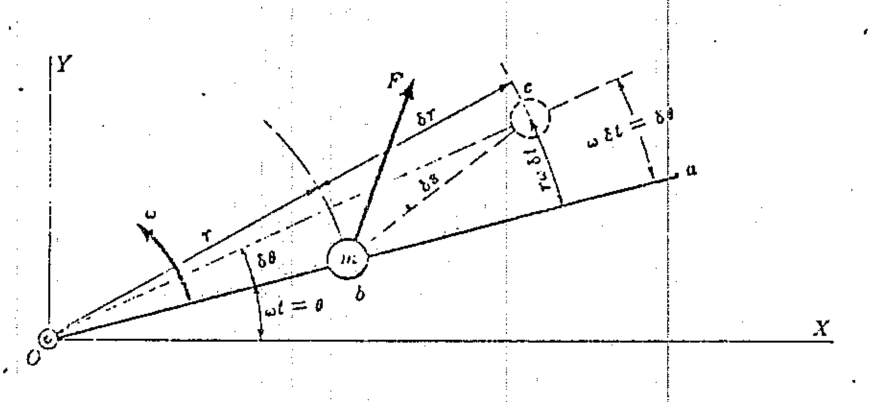
Maka dari persamaan (2.22) kita akan dapatkan persamaan sebagai berikut:

$$m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial t} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial t} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial t}\right)\delta t = \qquad \ldots(2.23)$$

$$\left(F_x\frac{\partial x}{\partial t} + F_y\frac{\partial y}{\partial t} + F_z\frac{\partial z}{\partial t}\right)\delta t$$

Dengan demikian kita dapat dengan mudah memperlihatkan bahwa ruas kanan dari persamaan (2.23) hanya merupakan suatu usaha yang telah dilakukan pada suatu partikel oleh gaya-gaya yang ada (termasuk pula gesekannya) pada saat kerangka referensinya dan gaya gesekan bergeser posisi sedikit dalam waktu δt.

Contoh 2.3



Gambar 2.3

Contoh sederhana yang berikut ini nantinya akan dapat menjernihkan sejumlah gagasan-gagasan pokok yang telah diuraikan di atas tadi.

Ada sebatang benda yang berbentuk pipa padat dan yang mempunyai sifat tak dapat melengkung dengan keliling per

(perhatikan pada gambar 2.3 di atas) .

Benda ini dibuat berputar dengan kecepatan konstan, dalam perputarannya ini benda tersebut selalu tegaklurus dengan garis yang melalui O dan tegak lurus dengan sumbu x dan sumbu y. Suatu bulatan dengan massa m mempunyai kebebasan untuk meluncur di sepanjang batangan benda yang mempunyai bentuk bulat padat itu di bawah pengaruh gaya F (disini sudah termasuk gesekannya).

Marilah kita menyusun persamaan gaya gerak benda bulatan tersebut dengan cara menggunakan persamaan (2.3) secara langsung, dimana untuk kasus ini hanya berbentuk:

$$m (\ddot{x} \, \delta x + \ddot{y} \, \delta y) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$
$$F_x \, \delta x + F_y \, \delta y$$

Kalau kita memperhatikan bulatan m itu maka kita akan menuliskan:

$$x = r \cos \omega t$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$
$$y = r \sin \omega t$$

Kemudian kita akan mendapatkan sebagai berikut:

$$\delta x = \delta r \cos \omega t - r \omega \delta t \sin \omega t$$
$$\ldots\ldots (C)$$
$$\delta y = \delta r \sin \omega t + r \omega \delta t \cos \omega t$$

Dari persamaan (B) maka kita juga bisa mendapatkan $\ddot{x}$ dan $\ddot{y}$ seperti sebagai berikut:

$$x = r \cos \omega t$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \omega t - r \omega \sin \omega t$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \omega t - \dot{r} \omega \sin \omega t -$$
$$- \dot{r} \omega \sin \omega t - r \omega^2 \cos \omega t.$$

$$y = r \sin \omega t$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \omega t + r \omega \cos \omega t$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \omega t + \dot{r} \omega \cos \omega t +$$

$$+ \dot{r} \omega \cos \omega t - r \omega^2 \sin \omega t.$$

Dengan mensubstitusikan δx, δy, $\ddot{x}$ dan $\ddot{y}$ ke dalam persamaan (A) maka kita akan mendapatkan sebagai berikut:

$$m (\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y) =$$

$$m \Big\{ (\ddot{r} \cos \omega t - \dot{r} \omega \sin \omega t - \dot{r} \omega \sin \omega t -$$

$$- r \omega^2 \cos \omega t) (\delta r \cos \omega t - r \omega \delta t \sin \omega t) +$$

$$+ (\ddot{r} \sin \omega t + \dot{r} \omega \cos \omega t + \dot{r} \omega \cos \omega t -$$

$$- r \omega^2 \sin \omega t) (\delta r \sin \omega t + r \omega \delta t \cos \omega t) =$$

$$m (\ddot{r} \delta r - r \omega^2 \delta r + 2 r \dot{r} \omega^2 \delta t) =$$

$$m \ddot{r} \delta r - m r \omega^2 \delta r + 2 m r \dot{r} \omega^2 \delta t =$$

$$(m \ddot{r} - m r \omega^2) \delta r + 2 m r \dot{r} \omega^2 \delta t.$$

Sedangkan:

$$F_x \delta x + F_y \delta y =$$

$$F_x (\delta r \cos \omega t - r \omega \delta t \sin \omega t) +$$

$$+ F_y (\delta r \sin \omega t + r \omega \delta t \cos \omega t) =$$

$$F_x \delta r \cos \omega t - F_x r \omega \delta t \sin \omega t +$$

$$+ F_y \delta r \sin \omega t + F_y r \omega \delta t \cos \omega t =$$

$$(F_x \cos \omega t + F_y \sin \omega t) \delta r +$$

$$+ (F_y \cos \omega t - F_x \sin \omega t) r \omega \delta t.$$

Karena:

$$m (\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y) =$$

Maka:

$$m(\ddot{r} - r\,\omega^2)\,\delta r + 2\,m\,r\,\dot{r}\,\omega^2\,\delta t =$$
$$(F_x \cos \omega t + F_y \sin \omega t)\,\delta r + \qquad \ldots .(\ D\ )$$
$$+ (F_y \cos \omega t - F_x \sin \omega t)\,r\,\omega\,\delta t.$$

Dari persamaan (D) di atas maka kita akan mendapatkan:

$$m(\ddot{r} - r\,\omega^2)\,\delta r = \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots .(\ E\ )$$
$$(F_x \cos \omega t + F_y \sin \omega t)\,\delta r$$

$$2\,m\,r\,\dot{r}\,\omega^2\,\delta t = \qquad \ldots\ldots .(\ F\ )$$
$$(F_y \cos \omega t - F_x \sin \omega t)\,r\,\omega\,\delta t$$

Dengan memperhatikan persamaan (E) maka kita akan tahu bahwa ruas kanan dari persamaan (E) hanya melukiskan suatu usaha oleh semua gaya yang ada untuk mengadakan perubahan δr pada sepanjang batangan bulat padat tersebut. Sedangkan persamaan (E) punya hubungan yang erat dengan persamaan (2.23).

Dan ruas kanan dari persamaan (F) akan memperlihatkan suatu usaha yang diperlukan untuk menghasilkan perubahan $r\,\omega\,\delta t$.