BAB III

RUANG DUAL

Misal V adalah ruang vektor atas field K (K =him punan semua bilangan nyata atau bilangan kompleks).

V^* = himpunan semua pemetaan linier dari V ke K .

atau

$$V^* = \{ f : V \longrightarrow K \mid f = \text{ pemetaan linier } \}.$$

Jika $f \in V^*$ dan $v \in V$, maka $f(v)$ akan disajikan de- ngan notasi $\langle f,v \rangle$.

Selanjutnya elemen - elemen dalam V^* dinamakan fungsional (pada V) .

Didefinisikan pula suatu operasi pada V^* yaitu :

$$f_1, f_2 \in V^* \Longrightarrow \langle f_1 + f_2, v \rangle =$$
$$= \text{df.} \langle f_1, v \rangle + \langle f_2, v \rangle .$$

$$f \in V^*,\ k \in K \Longrightarrow \langle kf, v \rangle =$$
$$= \text{df.}\ k \cdot \langle f,v \rangle .$$

Perhatikan pula bahwa,

$$\langle f, v_1 + v_2 \rangle = \langle f, v_1 \rangle + \langle f, v_2 \rangle ,\ v_1, v_2 \in V .$$
$$\langle f, kv_1 \rangle = k \cdot \langle f, v_1 \rangle .$$

Sehingga operasi - operasi yang didefinisikan di atas se suai dengan definisi produk skalar, tetapi sesungguhnya- bahwa notasi $\langle f,v \rangle$ adalah dua komponen yang ter letak dalam ruang yang berbeda.

Dapat dibuktikan bahwa V^* adalah ruang vektor atas K,yang disebut ruang Dual.

Bukti :

Ambil f_1, f_2, f_3 sebarang dalam V^*

1. V^* adalah tertutup terhadap adesi sebab jumlah dua pemetaan linier adalah pemetaan linier.

2. $\langle (f_1+f_2) + f_3, v \rangle = \langle f_1+f_2, v \rangle + \langle f_3, v \rangle$
$= \{ \langle f_1, v \rangle + \langle f_2, v \rangle \} + \langle f_3, v \rangle$
$= \langle f_1, v \rangle + \{ \langle f_2, v \rangle + \langle f_3, v \rangle \}$
$= \langle f_1, v \rangle + \langle f_2+f_3, v \rangle$
$= \langle f_1+(f_2+f_3), v \rangle$, untuk setiap $v \in V$.

   Sehingga $(f_1+f_2)+f_3 = f_1 + (f_2+f_3)$.

3. Ada elemen netral yaitu pemetaan nol (ditulis dengan 0), sebab $\langle 0 + f_1, v \rangle = \langle 0, v \rangle + \langle f_1, v \rangle$
$= 0 + \langle f_1, v \rangle$
$= \langle f_1, v \rangle$, untuk setiap $v \in V$.

   Sehingga $0 + f_1 = f_1$.

4. Setiap $f \in V^*$ mempunyai invers yaitu $g = -f \in V^*$, sebab $\langle g + f, v \rangle = \langle g, v \rangle + \langle f, v \rangle$
$= \langle -f, v \rangle + \langle f, v \rangle$
$= - \langle f, v \rangle + \langle f, v \rangle = 0$
$= \langle 0, v \rangle$,untuk setiap $v \in V$.

   Sehingga $g + f = 0$

5. Komutativitas dipenuhi, sebab
$\langle f_1 + f_2, v \rangle = \langle f_1, v \rangle + \langle f_2, v \rangle$

$= \langle f_2 + f_1, v \rangle$, untuk setiap $v \in V$.

Sehingga $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$.

Jadi V* merupakan abelian grup terhadap addisi.

1. $\langle (a+b) f, v \rangle = (a+b). \langle f, v \rangle$
$= a. \langle f, v \rangle + b. \langle f, v \rangle$
$= \langle af, v \rangle + \langle bf, v \rangle$
$= \langle af+bf, v \rangle$, untuk setiap $v \in V$.

Sehingga $(a + b) f = af + bf$.

2. $\langle a (f+g), v \rangle = a. \langle f+g, v \rangle$
$= a(\langle f, v \rangle + \langle g, v \rangle)$
$= a. \langle f, v \rangle + a. \langle g, v \rangle$
$= \langle af, v \rangle + \langle ag, v \rangle$
$= \langle af + ag, v \rangle$, untuk setiap $v \in V$.

Sehingga $a(f + g) = af + ag$.

3. $\langle (ab) f, v \rangle = (ab). \langle f, v \rangle$
$= a(b). \langle f, v \rangle$
$= \langle a(b)f, v \rangle$, untuk setiap $v \in V$.

Sehingga $(ab) f = a(b)f$.

4. $\langle 1.f, v \rangle = 1. \langle f, v \rangle = \langle f, v \rangle$, untuk setiap $v \in V$

Sehingga $1.f = f$.

Jadi terbukti bahwa V* adalah ruang vektor atas K.

Contoh :

3.1. Ambil $V = K^n$.

$\varphi : K^n \longrightarrow K$ adalah proyeksi pada faktor pertama yaitu $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1$

maka φ = fungsional.

Secara sama untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$, di dapat suatu fungsional φ_i sedemikian sehingga,

$\varphi_i (x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

3.2. Misal V ruang Euclid .

Ambil v_o sebarang dalam V .

Maka pemetaan $f : v \longmapsto \langle v, v_o \rangle$, $v \in V$

adalah fungsional.

Bukti :

Ambil v_1, v_2 sebarang dalam V dan $k \in \mathbb{R}$ sebarang .

$$v_1 \xmapsto{f} f(v_1) = \langle v_1, v_o \rangle$$

$$v_2 \xmapsto{f} f(v_2) = \langle v_2, v_o \rangle$$

$$v_1 + v_2 \xmapsto{f} f(v_1 + v_2) = \langle v_1 + v_2, v_o \rangle$$

$$= \langle v_1, v_o \rangle + \langle v_2, v_o \rangle$$

$$= f(v_1) + f(v_2) .$$

Sehingga $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.

$$kv_1 \xmapsto{f} f(kv_1) = \langle kv_1, v_o \rangle$$

$$= k \cdot \langle v_1, v_o \rangle = k . f(v_1) .$$

Sehingga $f(k v_1) = kf(v_1)$.

Jadi f = fungsional.

3.3. Misal V ruang Hermit .

Ambil $v_o \in V$ sebarang .

Maka pemetaan $f : v \longmapsto \langle v, v_o \rangle$, $v \in V$

adalah fungsional .

Tetapi $g : v \longmapsto \langle v_o, v \rangle$ bukan fungsional , sebab $\langle v_o, \alpha v \rangle = \bar{\alpha} . \langle v_o, v \rangle$, untuk setiap $\alpha \in C$.

Teorema 3.1 :

Jika V ruang vektor atas K yang berdimensi n, dengan n = berhingga, maka V* berdimensi n .

Jadi dim (V) = dim (V*) .

Bukti :

Ambil $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah basis dari V

Didefinisikan suatu fungsional pada V yaitu :

$$\langle v_i^*, v_j \rangle = \text{df.} \begin{cases} 1, & \text{jika } i = j, \; i=1,\ldots,n \, . \\ 0, & \text{jika } i \neq j, \; j=1,\ldots,n \, . \end{cases}$$

Akan dibuktikan bahwa $\{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*\}$ adalah basis dari V*.

Ambil φ sebarang dalam V* dan $c_i = \langle \varphi, v_i \rangle$, $c_i \in K$.

Dibentuk $w = c_1 v_1^* + c_2 v_2^* + \ldots + c_n v_n^*$, maka

$$\langle w, v_1 \rangle = \langle c_1 v_1^* + \ldots + c_n v_n^*, v_1 \rangle$$

$$= \langle c_1 v_1^*, v_1 \rangle + \ldots + \langle c_n v_n^*, v_1 \rangle$$

$$= c_1 \langle v_1^*, v_1 \rangle + \ldots + c_n . \langle v_n^*, v_1 \rangle = c_1 \, .$$

Secara sama, $\langle w, v_2 \rangle = c_2, \ldots, \langle w, v_n \rangle = c_n$.

Padahal $c_i = \langle \varphi, v_i \rangle$,

berarti $\varphi = c_1 v_1^* + \ldots\ldots + c_n v_n^*$.

Sehingga φ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*\}$.

Jadi $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ adalah generator dari V^*.

Sekarang akan dibuktikan bahwa $\{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*\}$ bebas linier.

Misal $x_1 v_1^* + x_2 v_2^* + \ldots\ldots + x_n v_n^* = 0$, dengan $x_i \in K$.

Maka $\langle x_1 v_1^* + x_2 v_2^* + \ldots + x_n v_n^*, v_1 \rangle = \langle 0, v_1 \rangle$.

$$x_1 . \langle v_1^*, v_1 \rangle + \ldots + x_n . \langle v_n^*, v_1 \rangle = 0 \, .$$

Secara sama, $x_2 = 0$, $x_3 = 0, \ldots\ldots\ldots, x_n = 0$.

Jadi $\{ v_1^* , v_2^* , \ldots\ldots , v_n^* \}$ bebas linier.

Karena $\{ v_1^*, v_2^*, \ldots\ldots, v_n^* \}$ generator yang bebas linier, maka $\{ v_1^*, v_2^*, \ldots\ldots, v_n^* \}$ adalah basis dari V^* dan disebut basis dual dari $\{ v_1 , v_2 , \ldots\ldots , v_n \}$.

Jadi terbukti bahwa dim (V) = dim (V*) = n .

Difinisi 3.1 :

Misal S adalah subset dari V, dan $\varphi \in V^*$.

φ adalah ortogonal (tegak lurus) pada S, jika

$\langle \varphi , v \rangle = 0$, untuk setiap $v \in S$.

Untuk selanjutnya ditulis $\varphi \perp S$.

Sekarang perhatikan $S^{\perp} = \{ \varphi \in V^* \mid \varphi \perp S \}$.

Dapat dibuktikan bahwa $S^{\perp}$ adalah ruang bagian dari V^* .

Bukti :

Ambil φ_1, φ_2 sebarang dalam $S^{\perp}$ dan $k_1, k_2 \in K$ sebarang, maka ;

$$\begin{aligned}\langle k_1\varphi_1 + k_2 \varphi_2 , v \rangle &= \langle k_1 \varphi_1 , v \rangle + \langle k_2 \varphi_2 , v \rangle \\ &= k_1 \cdot \langle \varphi_1 , v \rangle + k_2 \cdot \langle \varphi_2 , v \rangle \\ &= k_1 . 0 + k_2 . 0 = 0, \text{ untuk setiap } \\ &\quad v \in S.\end{aligned}$$

Sehingga $k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 \in S^{\perp}$.

Jadi $S^{\perp}$ adalah ruang bagian dari V^* .

Perhatikan bahwa setiap elemen dalam $S^{\perp}$ adalah tegak lurus pada ruang bagian dari V yang dibangun oleh S.

Teorema 3.2 :

Misal V ruang vektor berdimensi n atas K .

Jika W ruang bagian dari V dan $W^{\perp} =$

$= \{ \varphi \in V^* \mid \varphi \perp W \}$.

<u>maka dim (V) = dim (W) + dim ($W^{\perp}$)</u>

<u>Bukti</u> :

Misal $\{ w_1, w_2, \ldots, w_r \}$ adalah basis dari W, maka dapat ditemukan $w_{r+1}, w_{r+2}, \ldots, w_n$ sedemikian sehingga, $\{ w_1, w_2, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_n \}$ adalah basis dari V.

Ambil $\{ w_1^*, \ldots, w_r^*, w_{r+1}^*, \ldots, w_n^* \}$ adalah basis dual dari V^*.

Akan dibuktikan bahwa $\{ w_{r+1}^*, \ldots, w_n^* \}$ adalah basis dari $W^{\perp}$.

Karena $\{ w_{r+1}^*, \ldots, w_n^* \}$ bebas linier, maka cukup dibuktikan $\{ w_{r+1}^*, \ldots, w_n^* \}$ adalah generator dari $W^{\perp}$.

Ambil φ sebarang dalam $W^{\perp}$, maka terdapatlah skalar-skalar $c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n \in K$ sedemikian sehingga,

$$\varphi = c_1 w_1^* + \ldots + c_r w_r^* + c_{r+1} w_{r+1}^* + \ldots + c_n w_n^* .$$

Karena $\varphi \in W^{\perp}$, maka $\langle \varphi, w_i \rangle = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Sehingga,

$$\langle c_1 w_1^* + \ldots + c_r w_r^* + c_{r+1} w_{r+1}^* + \ldots + c_n w_n^*, w_1 \rangle = 0 .$$

$$c_1 . \langle w_1^*, w_1 \rangle + \ldots + c_r \langle w_r^*, w_1 \rangle + \ldots + c_n \langle w_n^*, w_1 \rangle = 0 .$$

$$c_1 = 0 .$$

Secara sama, didapat $c_2 = 0$, $c_3 = 0, \ldots, c_r = 0$.

Jadi $\varphi = c_{r+1} w_{r+1}^* + \ldots + c_n w_n^*$

Berarti $W^{\perp}$ termuat dalam ruang yang dibangun oleh $\{ w_{r+1}^*, \ldots, w_n^* \}$.

Sebaliknya jika $r + 1 \leqslant j \leqslant n$, maka

$$\langle w_j^*, w_i \rangle = 0 \; , \; i = 1,2, \; \ldots \; , \; r.$$

Sehingga $w_j^* \in W^{\perp}$.

Berarti $W^{\perp}$ memuat ruang yang dibangun oleh

$\{ w_{r+1}^*, \ldots\ldots , w_n^* \}$

Jadi $\{ w_{r+1}^*, \ldots\ldots , w_n^* \}$ adalah generator dari $W^{\perp}$

$$\therefore \dim (V) = \dim (W) + \dim (W^{\perp})$$

Dari uraian (bukti) di atas jelas terdapat hubungan antara produk skalar pada ruang vektor, dan ruang Dual. Hubungan ini akan dicari sebagai berikut :

Ambil V ruang Euclid.

Selanjutnya dibentuk suatu relasi L_v yaitu :

$\underline{L_v : w \in V \longmapsto L_v (w) = \langle v,w \rangle \in \mathbb{R},}$

$\underline{\text{untuk sebarang } w \in V}$.

v = tertentu (berlaku untuk semua v dalam V).

Dapat dibuktikan bahwa L_v = pemetaan linier dari V ke $\mathbb{R}$, jadi $L_v \in V^*$.

<u>Bukti</u> :

Akan dibuktikan bahwa L_v merupakan suatu pemetaan.

Misal $w_1 \xmapsto{Lv} L_v (w_1) = \langle v,w_1 \rangle$

$w_2 \xmapsto{Lv} L_v (w_2) = \langle v,w_2 \rangle$

Selanjutnya jika $w_1 = w_2$, maka $\langle v,w_1 \rangle = \langle v,w_2 \rangle$, sehingga $L_v (w_1) = L_v (w_2)$.

Jadi $w_1 = w_2 \Longrightarrow L_v (w_1) = L_v (w_2)$.

Jadi L_v adalah suatu pemetaan.

Sekarang ambil w_1 dan w_2 sebarang dalam V dan $k \in \mathbb{R}$ sebarang sedemikian sehingga,

$$w_1 \xmapsto{L_v} L_v(w_1) = \langle v, w_1 \rangle$$

$$w_2 \xmapsto{L_v} L_v(w_2) = \langle v, w_2 \rangle$$

$$w_1 + w_2 \xmapsto{L_v} L_v(w_1+w_2) = \langle v, w_1+w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle = L_v(w_1) + L_v(w_2)$$

Sehingga $L_v(w_1+w_2) = L_v(w_1) + L_v(w_2)$.

$$kw_1 \xmapsto{L_v} L_v(kw_1) = \langle v, kw_1 \rangle = k.\langle v, w_1 \rangle = k.L_v(w_1)$$

Sehingga $L_v(kw_1) = k.L_v(w_1)$.

Jadi L_v = pemetaan linier dari V ke $\mathbb{R}$, atau

L_v = fungsional.

Untuk selanjutnya fungsional L_v disajikan dengan notasi $L_v = \langle v, - \rangle$.

Teorema 3.3 :

Misal V ruang Euclid yang berdimensi hingga.

Maka pemetaan $\varphi : v \in V \longmapsto L_v \in V^*$ adalah suatu isomorfisma.

Bukti :

Akan dibuktikan φ = linier.

Ambil v_1, v_2 sebarang dalam V dan k dalam $\mathbb{R}$ sebarang sedemikian sehingga,

$v_1 \xmapsto{\varphi} L_{v_1}$, $v_1+v_2 \xmapsto{\varphi} L_{v_1+v_2}$

$v_2 \xmapsto{\varphi} L_{v_2}$, $kv_1 \xmapsto{\varphi} L_{kv_1}$

Selanjutnya, $L_{v_1+v_2}(w) = \langle v_1+v_2, w \rangle$

$= \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$

$= L_{v_1}(w) + L_{v_2}(w)$

$= (L_{v_1} + L_{v_2})(w)$, untuk seti-

ap $w \in V$.

Sehingga $L_{v_1+v_2} = L_{v_1} + L_{v_2}$.

$\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$.

$L_{kv_1}(w) = \langle kv_1, w \rangle = k.\langle v_1 w \rangle = k.L_{v_1}(w)$

$= (kL_{v_1})(w)$, untuk setiap $w \in V$.

Sehingga $L_{kv_1} = k\, L_{v_1}$

$\varphi(kv_1) = k\ \varphi(v_1)$.

Jadi φ = linior.

Sekarang ambil $v \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, maka $\varphi(v) = L_v = 0$,

berarti $L_v(w) = 0$, untuk setiap $w \in V$.

$\langle v, w \rangle = 0$, untuk setiap $w \in V$.

Karena V definit positip maka $v = 0$, sehingga ,

$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

Jadi φ = pemetaan linier yang injektif.

$\mathrm{Im}(\varphi)$ merupakan ruang bagian dari V^*.

Karena φ = injektif maka $\dim \left[\mathrm{Im}(\varphi) \right] = \dim (V)$.

Padahal dim (V) = dim (V^*), akibatnya dim $\left[\operatorname{Im}(\varphi) \right]$ =

= dim (V^*).

Sehingga Im (φ) = V^* berarti φ = surjektif.

Jadi φ = isomoffisma .

Akibat 3.1 :

Misal V ruang Euclid yang berdimensi hingga .

$f \in V^* \Longrightarrow (\exists! \, v \in V). \ f = L_v = \langle v, - \rangle$.

Bukti :

Karena φ = isomorfisma dari V ke V^* , maka $f \in V^*$ pasti sama dengan L_v, jadi $f = L_v = \langle v, - \rangle$.

Sekarang ambil V ruang Hermit yang berdimensi - hingga. Dibentuk suatu pemetaan L_w yaitu :

$L_w : v \in V \longmapsto L_w(v) = \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$,

untuk setiap $v \in V$.

w = tertentu (berlaku untuk semua $w \in V$)

Maka L_w = pemetaan linier dari V ke C, jadi $L_w \in V^*$.

Biasanya fungsional L_w disajikan dengan notasi

$L_w = \langle -, w \rangle$.

Selanjutnya dibentuk pula suatu pemetaan

$\varphi : w \in V \longmapsto L_w \in V^*$.

Maka φ = tidak linier, sebab $L_{\alpha w} = \bar{\alpha} L_w$, $\alpha \in C$.

Teorema 3.4 :

Misal V ruang Hermit yang berdimensi hingga .

Maka pemetaan $\varphi : w \in V \longmapsto L_w \in V^*$ adalah bijektif.

Jadi $\varphi : w \in V \longmapsto L_w \in V^*$ korespondensi 1 - 1

<u>Bukti</u> :

Misal $w_1 \xmapsto{\varphi} \varphi(w_1) = L_{w_1}$

$w_2 \xmapsto{\varphi} \varphi(w_2) = L_{w_2}$

Jika $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$, maka $L_{w_1} = L_{w_2}$

$$L_{w_1}(v) = L_{w_2}(v)$$

$$\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle$$

$$\langle v, w_1 \rangle - \langle v, w_2 \rangle = 0$$

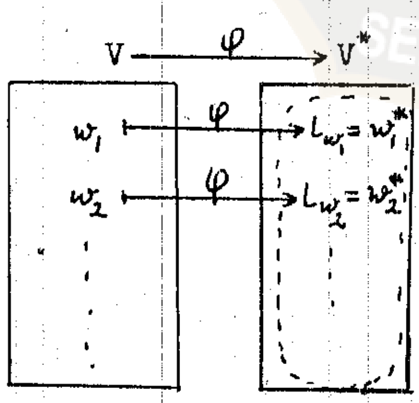
$\langle v, w_1 - w_2 \rangle = 0$, untuk setiap $v \in V$.

Karena V definit positip, maka $w_1 - w_2 = 0$, berarti $w_1 = w_2$.

Jadi jika $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$, maka $w_1 = w_2$, sehingga

φ = injektif.

Sekarang akan dibuktikan φ = surjektif



$w_1^* = L_{w_1} = \langle -, w_1 \rangle$

$w_2^* = L_{w_2} = \langle -, w_2 \rangle$

Akan dibuktikan bahwa Im (φ) itu ruang bagian dari V*.

Ambil dua elemen sebarang dalam Im (φ) misal w_1^* dan w_2^*,

maka $w_1^* = \langle - , w_1 \rangle$

$w_2^* = \langle - , w_2 \rangle$

$$w_1^* - w_2^* = \langle -, w_1 \rangle - \langle -, w_2 \rangle = \langle -, w_1 - w_2 \rangle$$

$L \quad \in \text{Im}(\varphi)$

Sebab $w_1 - w_2 \in V$ dan φ = injektif .

Sehingga $w_1^* - w_2^* \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Jadi $\mathrm{Im}(\varphi)$ subgrup dari V^* terhadap addisi.

Ambil $c \in C$, $w^* \in \mathrm{Im}(\varphi)$, maka $w^* = L_w$.

$$cw^* = c.L_w = c.\langle -,w \rangle = \langle -,\bar{c}w \rangle = L_{\bar{c}w} \in \mathrm{Im}(\varphi).$$

Sehingga $cw^* \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

Jadi $\mathrm{Im}(\varphi)$ ruang bagian dari V^*.

Akan dibuktikan bahwa $\dim \left[\mathrm{Im}(\varphi) \right] = \dim (V)$.

Misal $\{ x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \}$ basis dari V, akan ditunjukkan bahwa $\{ \varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots\ldots, \varphi(x_n) \}$ basis dari $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Ambil sebarang $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$, maka $y = \varphi(x)$ untuk suatu $x \in V$.

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n .$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n) \\
&= L_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n} \\
&= \langle -, \alpha_1 x_1 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n \rangle \\
&= \langle -, \alpha_1 x_1 \rangle + \ldots\ldots + \langle -, \alpha_n x_n \rangle \\
&= \bar{\alpha}_1 . \langle -, x_1 \rangle + \ldots\ldots + \bar{\alpha}_n . \langle -, x_n \rangle \\
&= \bar{\alpha}_1 L_{x_1} + \ldots\ldots + \bar{\alpha}_n L_{x_n} \\
&= \bar{\alpha}_1 \varphi(x_1) + \ldots\ldots + \bar{\alpha}_n \varphi(x_n) .
\end{aligned}$$

Jadi $y = \varphi(x) = \bar{\alpha}_1 \varphi(x_1) + \ldots\ldots + \bar{\alpha}_n \varphi(x_n)$.

Ambil kombinasi linier sebarang,

$$\beta_1\varphi(x_1) + \beta_2\varphi(x_2) + \ldots\ldots + \beta_n\varphi(x_n) = 0$$

$$\varphi(\bar{\beta}_1 x_1) + \varphi(\bar{\beta}_2 x_2) + \ldots\ldots + \varphi(\bar{\beta}_n x_n) = 0$$

$$\varphi(\bar{\beta}_1 x_1 + \bar{\beta}_2 x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots + \bar{\beta}_n x_n) = 0$$

(sebab φ = homomorfisma grup terhadap addisi).

Karena φ = homomorfisma grup yang injektif, maka

$$\bar{\beta}_1 x_1 + \bar{\beta}_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots + \bar{\beta}_n x_n = 0 .$$

Maka $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \bar{\beta}_n = 0$.

Jadi $\beta_1 = \beta_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \beta_n = 0$.

Jadi $\{\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots\ldots, \varphi(x_n)\}$ adalah basis dari Im (φ).

Karena banyaknya n, maka dim (V) = dim $[\text{Im}(\varphi)]$ =n, padahal dim (V) = dim (V*), akibatnya dim $[\text{Im}(\varphi)]$ = = dim (V*).

Karena Im (φ) ruang bagian dari V* dan mempunyai dimensi yang sama dengan V* , maka Im (φ) = V*

Karena Im (φ) = V* dan φ = injektif, maka φ = surjektif. Jadi φ = bijektif.

<u>Akibat 3.2</u> :

<u>Misal V ruang Hermit yang berdimensi hingga .</u>

<u>$f \in V^* \Longrightarrow (\exists!\ w \in V).\ f = L_w = \langle -, w \rangle$.</u>

<u>Bukti</u> :

Karena $\varphi : w \longmapsto L_w$ korespondensi 1 - 1, maka $f \in V^*$ pasti sama dengan L_w, jadi $f = L_w = \langle -, w \rangle$.