BAB II

RUANG EUCLID DAN RUANG HERMIT

II.1. RUANG EUCLID

Definisi 2.1.

Misal V ruang vektor atas field $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ = himpunan semua bilangan nyata. Produk skalar (hasil kali skalar) pada V adalah suatu perkawanan yang mana untuk setiap pasangan elemen - elemen v, w $\in$ V dikawankan (dihubungkan) dengan suatu skalar dalam $\mathbb{R}$, yang ditulis dengan $\langle v,w \rangle$ atau v.w yang memenuhi sifat - sifat sebagai berikut :

1. $\langle v,w \rangle = \langle w,v \rangle$, untuk setiap v,w $\in$ V .
2. $u,v,w \in V \Longrightarrow \langle u,v+w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle$.
3. $x \in \mathbb{R}$,u, v $\in V \Longrightarrow \langle xu,v \rangle = \langle u,xv \rangle = x.\langle u,v \rangle$.

Definisi 2.2.

Produk skalar pada V disebut definit positip, jika

1. $\langle v,v \rangle \geqslant 0$, untuk setiap v $\in$ V,&
2. $\langle v,v \rangle > 0 \Longrightarrow v \neq 0$.

Selanjutnya dari definisi definit positip di atas dapat disimpulkan, jika $\langle v,v \rangle = 0$, maka v = 0. demikian juga jika v = 0, maka $\langle v,v \rangle = 0$.

Sehingga definisi definit positip di atas dapat ditulis dengan bentuk lain yaitu :

Definisi 2.2' :

Produk skalar pada V disebut definit positip, jika

1. $\langle v,v \rangle \geqslant 0$, untuk setiap v $\in$ V, &
2. $\langle v,v \rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.

Definisi 2.3 :

Produk skalar pada V disebut non degenerate, jika

$$(\forall v \in V)\left[\{(\forall w \in V).\langle v,w\rangle = 0\} \Longrightarrow v = 0\right].$$

Akibat 2.1 :

Produk skalar yang definit positip pasti non degenerate.

Bukti :

Andaikan produk skalar yang diketahui tidak non degenerate, maka :

$$(\exists v \in V)\left[\{(\forall w \in V).\langle v,w\rangle = 0\} \;\&\; v \neq 0\right].$$

Ambil $w = v$, maka $(\exists v \in V).\langle v,v\rangle = 0 \;\&\; v \neq 0$.

Jadi $(\exists v \in V).\langle v,v\rangle = 0 \;\&\; v \neq 0$.

Padahal diketahui $(\forall v \in V).\langle v,v\rangle = 0 \Longrightarrow v = 0$.

Kontradiksi.

Jadi yang benar produk skalar yang definit positip pasti non degenerate.

Contoh :

2.1. Misal $V = \mathbb{R}^n$.

Suatu pemetaan $f : (x,y) \longmapsto x.y$ yaitu yang mengawankan setiap pasangan $x,y \in \mathbb{R}^n$ dengan dot produk mereka, adalah merupakan produk skalar yang definit positip.

(Catatan : $x,y \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow x.y = x_1.y_1 + x_2.y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n y_n$).

2.2. Misal V ruang vektor dari fungsi - fungsi berharga reel yang kontinu pada $[0,1]$.

Didefinisikan : $f,g \in V \Longrightarrow \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t).g(t)\,dt$.

Dengan sifat - sifat dari integral dapat diperlihatkan bahwa definisi di atas merupakan produk skalar yang definit positip.

Definisi 2.4 :

Ruang vektor atas himpunan semua bilangan nyata dengan produk skalar yang definit positip disebut ruang Euclid (Euclidean vector space).

Definisi 2.5 :

Misal V ruang Euclid .

Elemen - elemen $v, w \in V$ disebut ortogonal, jika $\langle v,w \rangle = 0$, ditulis dengan $v \perp w$.

Misal S subset dari V, V = ruang Euclid .

$S^{\perp}$ = himpunan semua elemen - elemen $w \in V$ yang tegak lurus dengan setiap elemen - elemen $v \in S$, atau

$S^{\perp} = \{ w \in V \mid \langle w,v \rangle = 0, \ \forall v \in S \}$.

Dapat dibuktikan bahwa $S^{\perp}$ merupakan ruang bagian dari V yang disebut ruang ortogonal dari S.

Bukti :

Ambil w_1, w_2 sebarang dalam $S^{\perp}$ dan $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ sebarang.

Ambil v sebarang dalam S.

$$\begin{aligned}\langle k_1 w_1 + k_2 w_2, v \rangle &= \langle k_1 w_1, v \rangle + \langle k_2 w_2, v \rangle = k_1 . \langle w_1, v \rangle \\ &\quad + k_2 . \langle w_2, v \rangle \\ &= k_1 . 0 + k_2 . 0 = 0 .\end{aligned}$$

Sehingga $\langle k_1 w_1 + k_2 w_2 , v \rangle = 0$, untuk setiap $v \in S$.

Jadi $k_1 w_1 + k_2 w_2 \in S^{\perp}$.

Jadi $S^{\perp}$ ruang bagian dari V

Sekarang ambil U = ruang bagian dari V yang dibangun oleh elemen - elemen S.

Jika w tegak lurus pada S dan v_1 , $v_2 \in S$, maka $\langle w, v_1 + v_2 \rangle = 0$

Demikian juga jika $c \in \mathbb{R}, v \in S$, maka $\langle w, cv \rangle = 0$.
Sehingga w tegak lurus dengan kombinasi linier elemen - elemen dalam S.
Jadi w <u>tegak lurus</u> pada U .

<u>Contoh</u> :

2.3. Misal (a_{ij}) = matriks m x n dalam $\mathbb{R}$.
$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_m$ adalah vektor-vektor baris dari (a_{ij}).
$X = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ adalah vektor kolom .
Pandang sistem persamaan linier yang homogen yaitu :

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} (*)$$

Atau dapat juga ditulis;

$$A_1 X = 0, \quad A_2 X = 0, \ldots\ldots\ldots, A_m X = 0 .$$

Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan di- atas adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$.
Misal W ruang vektor yang dibangun oleh $\{A_1, \ldots\ldots, A_m\}$.
U = ruang vektor yang terdiri dari semua vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^n$ yang tegak lurus dengan $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_m$.
Maka U adalah ruang vektor dari penyelesaian sistem persamaan (*).
Perlu dicatat bahwa $\{A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_m\}$ boleh tak bebas linier, sehingga dim (W) $\leq$ m.
Selanjutnya dim (U) = dim ($W^{\perp}$) disebut <u>dimensi ruang solusi</u> dari sistem persamaan linier yang homogen.

Definisi 2.6 :

Misal V ruang Euclid .

Panjang (norm) dari suatu elemen $v \in V$, ditulis dengan $\|v\|$, didefinisikan sebagai $\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$ dan diambil suatu bilangan $\geqslant 0$.

Jika $v \in V$ dan $\|v\| = 1$, maka v disebut vektor satuan .

Jika $v \in V$ dan $v \neq 0$, maka $\frac{v}{\|v\|}$ = vektor satuan, sebab

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1 .$$

Sekarang ambil $v_i \neq 0 \in V$, dimana $i = 1, 2, \ldots, n$.

Misal v_i saling tegak lurus yaitu $\langle v_i , v_j \rangle = 0$, untuk $i \neq j$, c_i = komponen dari v sepanjang v_i yaitu $c_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$.

Maka $v - c_1v_1 - c_2v_2 - \ldots\ldots - c_nv_n$ tegak lurus dengan $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$, sebab

$$\langle v - c_1v_1 - \ldots\ldots - c_nv_n, v_1 \rangle = \langle v, v_1 \rangle - c_1 \langle v_1, v_1 \rangle - \ldots - c_n \cdot \langle v_n , v_1 \rangle = \langle v, v_1 \rangle - \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot \langle v_1, v_1 \rangle = \langle v, v_1 \rangle - \langle v, v_1 \rangle = 0.$$

Secara sama, $\langle v - c_1v_1 - \ldots\ldots - c_nv_n, v_2 \rangle = 0$, ...

$\ldots\ldots\ldots\ldots, \langle v - c_1v_1 - \ldots\ldots - c_nv_n, v_n \rangle = 0$.

Definisi 2.7 :

Misal V ruang Euclid .

$\{ v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n \}$ basis dari V dinamakan basis ortogonal, jika $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, untuk $i \neq j$.

Khususnya jika $\|v_i\| = 1$, untuk setiap i, maka disebut basis ortonormal.

Contoh :

2.4. Vektor - vektor satuan standart dari $\mathbb{R}^n$ dengan dot produk biasa adalah basis ortonormal dari $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1 :

Jika V ruang Euclid yang berdimensi hingga, $W \neq V$ ruang bagian dari V dan $\{ w_1 , w_2 \ldots\ldots\ldots w_m \}$ adalah basis ortogonal dari W, maka terdapatlah vektor - vektor w_{m+1}, ... , w_n dalam V sedemikian sehingga, $\{ w_1, \ldots\ldots\ldots , w_m, w_{m+1}, \ldots\ldots , w_n \}$ adalah basis ortogonal dari V.

Bukti :

Teorema ini dibuktikan dengan induksi matematik pada k ($k = 1, \ldots\ldots\ldots , n - m$).

$\{ w_1, \ldots\ldots, w_n \}$ basis ortogonal dari W, jadi

$\{ w_1, \ldots\ldots, w_m \}$ bebas linier, karena $W \subset V$ maka $w_1, \ldots\ldots\ldots , w_m \in V$. Jadi pasti dapat ditemukan v_{m+1}, ..., $v_n \in V$ sedemikian sehingga

$\{ w_1, \ldots\ldots , w_m, v_{m+1}, \ldots\ldots , v_n \}$ adalah basis dari V.

Tentu saja basis ini bukan basis ortogonal.

Sekarang misal W_{m+1} adalah ruang vektor yang dibangun oleh $\{ w_1, \ldots\ldots , w_m , v_{m+1} \}$.

Jika diambil $w_{m+1} = v_{m+1} - c_1 w_1 - \ldots\ldots\ldots - c_m w_m$

dimana

$$c_1 = \frac{\langle v_{m+1} , w_1 \rangle}{\langle w_1 , w_1 \rangle}, \ldots\ldots\ldots\ldots, c_m = \frac{\langle v_{m+1} , w_m \rangle}{\langle w_m , w_m \rangle}$$

Maka w_{m+1} tegak lurus dengan $w_1, \ldots\ldots\ldots\ldots , w_m$

Pasti $w_{m+1} \neq 0$ sebab andaikan $w_{m+1} = 0$, maka $v_{m+1} - c_1w_1 - \ldots\ldots - c_mw_m = 0$ berarti $\{v_{m+1}, w_1, \ldots, w_m\}$ tak bebas linier, kontradiksi dengan $\{v_{m+1}, w_1, \ldots, w_m\}$ bebas linier.

Jadi $v_{m+1} = w_{m+1} + c_1w_1 + \ldots\ldots + c_mw_m$. Sehingga v_{m+1} terletak dalam ruang yang dibangun oleh $\{w_1, \ldots\ldots, w_m, w_{m+1}\}$.

Jadi $\{w_1, \ldots\ldots w_m, w_{m+1}\}$ basis ortogonal dari W_{m+1}.

Jika benar untuk $r = k$, maka benar untuk $r = k + 1$.

Menurut induksi hipotesa maka benar untuk $r = k$, jadi $\{w_1, \ldots\ldots, w_m, w_{m+1}, \ldots\ldots, w_{m+k}\}$ basis ortogonal dari W_{m+k}.

Jadi proses diulang sampai dimensi dari $W_{m+k} = \dim(V) = n$.

Jadi jika $m + k = n$, maka $k = n - m$.

Dengan proses yang sama seperti di atas maka dari v_{m+k+1} akan didapat w_{m+k+1} sedemikian sehingga,

$\{w_1, \ldots\ldots, w_{m+1}, \ldots\ldots, w_{m+k+1}\}$ basis ortogonal dari W_{m+k+1}.

Jadi benar untuk setiap n (terbukti).

Selanjutnya proses di atas disebut proses <u>ortogonalisasi Gram - Schmidt</u> .

<u>Akibat 2.2</u> :

<u>Jika V ruang Euclid yang berdimensi hingga dan $V \neq \{0\}$, maka V mempunyai basis ortogonal.</u>

<u>Bukti</u> :

Misal $\dim(V) = n$, karena $V \neq \{0\}$ maka terdapatlah $v_1 \neq 0 \in V$.

Selanjutnya jika W ruang bagian dari V yang dibangun oleh $\{v_1\}$, maka $\{v_1\}$ adalah basis dari W. Maka menurut teorema 2.1 didapat $\{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n\}$ basis ortogonal dari V.

Selanjutnya jika $\{v_1, \ldots\ldots, v_m\}$ basis sebarang dari V, maka dengan proses ortogonalisasi Gram -Schmidt- dapat ditentukan basis ortogonal dari V sebagai berikut:

$w_{m+1} = v_{m+1} - c_1 w_1 - \ldots\ldots\ldots - c_m w_m$, dimana

$$c_1 = \frac{\langle v_{m+1}, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}, \ldots\ldots\ldots\ldots, c_m = \frac{\langle v_{m+1}, w_m \rangle}{\langle w_m, w_m \rangle}$$

Sehingga ;

$m = 0 \Longrightarrow w_1 = v_1$.

$$m = 1 \Longrightarrow w_2 = v_2 - c_1 w_1 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1$$

....

....

....

$$m = n - 1 \Longrightarrow w_n = v_n - c_1 w_1 - \ldots\ldots\ldots - c_{n-1} w_{n-1}$$

$$= v_n - \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 - \ldots\ldots - \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\langle w_{n-1}, w_{n-1} \rangle} \cdot w_{n-1}$$

Jadi $\{w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots, w_n\}$ basis ortogonal dari V.

Demikian juga jika <u>basis ortogonal</u> di ketahui, maka dapat ditentukan <u>basis ortonormalnya</u> yaitu dengan membagi setiap vektor basis dengan panjangnya.

<u>Contoh</u> :

2.5. Tentukan basis ortonormal dari ruang vektor yang dibangun oleh $\{A = (1,1,0,1), B = (1,-2,0,0), C = (1,0,-1,2)\}$.

Penyelesaian :

$A' = A = (1,1,0,1)$.

$$B' = B - \frac{B.A}{A.A} . A =$$

$$= (1,-2,0,0) - \frac{(1,-2,0,0).(1,1,0,1)}{(1,1,0,1).(1,1,0,1)} . (1,1,0,1)$$

$$= (1,-2,0,0) - \left(-\frac{1}{3}\right)(1,1,0,1) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$C' = C - \frac{C.A}{A.A} . A - \frac{C.B'}{B'.B'} . B'$$

$$= (1,0,-1,2) - \frac{(1,0,-1,2).(1,1,0,1)}{(1,1,0,1).(1,1,0,1)} . (1,1,0,1)$$

$$- \frac{(1,0,-1,2).(\frac{4}{3},-\frac{5}{3},0,\frac{1}{3})}{(\frac{4}{3},-\frac{5}{3},0,\frac{1}{3}).(\frac{4}{3},-\frac{5}{3},0,\frac{1}{3})} . \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$= (1,0,-1,2) - \frac{3}{3}(1,1,0,1)$$

$$- \frac{2}{\frac{42}{9}} . \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$= (1,0,-1,2) - (1,1,0,1) - \left(\frac{4}{7}, -\frac{5}{7}, 0, \frac{1}{7}\right) =$$

$$= \left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right).$$

Jadi $\{ A' = (1,1,0,1),\ B' = \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right),$

$C' = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right) \}$ adalah basis ortogonal dari ruang vektor yang dibangun oleh $\{A, B, C\}$.

Selanjutnya $X = \dfrac{A'}{\|A'\|} = \dfrac{(1,1,0,1)}{\sqrt{1+1+0+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1)$.

$$Y = \frac{B'}{\|B'\|} = \frac{\frac{1}{3}(4,-5,0,1)}{\frac{1}{3}\sqrt{16 + 25 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{42}}(4,-5,0,1) .$$

$$Z = \frac{C'}{\|C'\|} = \frac{\frac{1}{7}(-4,-2,-1,6)}{\frac{1}{7}\sqrt{16+4+1+36}} = \frac{1}{\sqrt{57}}(-4,-2,-1,6) .$$

Jadi $\{X,Y,Z\}$ adalah basis ortonormal dari ruang vektor yang dibangun oleh $\{A,B,C\}$.

Teorema 2.2 :

Misal V ruang Euclid dan dim (V) = n, W ruang bagian dari V dan dim (W) = r, $W^{\perp}$ = ruang ortogonal dari W . Maka dim ($W^{\perp}$) = n - r dan $V = W \oplus W^{\perp}$, atau dim (V) = dim (W) + dim ($W^{\perp}$).

Bukti :

Jika $W = \{0\}$ atau W = V, tak ada yang perlu untuk dibuktikan . Selanjutnya jika $W \neq V$ dan $W \neq \{0\}$. Ambil $\{w_1, \ldots\ldots, w_r\}$ basis ortonormal dari W, maka menurut teorema 2.1 terdapatlah $u_{r+1}, \ldots\ldots\ldots, u_n$ dalam V sedemikian sehingga,

$\{w_1, \ldots\ldots, w_r, u_{r+1}, \ldots\ldots, u_n\}$ basis ortonormal dari V. Akan dibuktikan bahwa $\{u_{r+1}, \ldots\ldots, u_n\}$ basis ortonormal dari $W^{\perp}$.

Ambil $u \in W^{\perp}$ sebarang, maka terdapatlah skalar - skalar $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_r, \ldots\ldots\ldots, x_n$ dalam $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga,

$$u = x_1 w_1 + \ldots\ldots\ldots + x_r w_r + x_{r+1} u_{r+1} + \ldots\ldots, + x_n u_n .$$

Karena u tegak lurus pada W maka

$$\langle u, w_1 \rangle = 0$$

$$\langle x_1 w_1 + \ldots\ldots\ldots + x_n u_n, w_1 \rangle = 0$$

$x_1 . \langle w_1, w_1 \rangle + \dots\dots\dots + x_n . \langle u_n, w_1 \rangle = 0$

$x_1 = 0$.

Secara sama didapat , $x_2 = 0, \dots\dots\dots, x_r = 0$.

Jadi $u = x_{r+1} u_{r+1} + \dots\dots\dots + x_n u_n$, berarti u sebagai kombinasi linier dari $\{ u_{r+1}, \dots, u_n \}$.

Sebaliknya, ambil kombinasi linier sebarang dari $\{ u_{r+1}, \dots\dots\dots, u_n \}$,

yaitu $u = x_{r+1} u_{r+1} + \dots\dots + x_n u_n$, maka

$$\langle u, w_1 \rangle = \langle x_{r+1} u_{r+1} + \dots\dots + x_n u_n , w_1 \rangle$$
$$= x_{r+1} . \langle u_{r+1}, w_1 \rangle + \dots\dots + x_n . \langle u_n, w_1 \rangle$$
$$= x_{r+1} . 0 + \dots\dots + x_n . 0 = 0$$

Secara sama, $\langle u, w_2 \rangle = 0, \dots\dots, \langle u, w_r \rangle = 0$.

Jadi u tegak lurus pada W, sehingga $u \in W^{\perp}$

Karena u sebarang, maka $\{ u_{r+1}, \dots\dots\dots, u_n \}$ membangun $W^{\perp}$.

$u_{r+1}, \dots\dots\dots, u_n$ saling tegak lurus dan panjangnya = 1, sehingga $\{ u_{r+1}, \dots\dots\dots, u_n \}$ basis ortonormal dari $W^{\perp}$.

Jadi dim ($W^{\perp}$) = n - r, atau dim (V) =

= dim (W) + dim ($W^{\perp}$)

Selanjutnya ambil $v \in V$ sebarang, maka

v =kombinasi linier secara tunggal dari $\{ w_1, \dots, w_r \}$ +

kombinasi linier secara tunggal dari $\{ u_{r+1} , \dots\dots\dots, u_n \}$.

Maka v dapat dinyatakan secara tunggal sebagai w+u dengan $w \in W$ dan $u \in W^{\perp}$.

Jadi $V = W \oplus W^{\perp}$.

Contoh :

2.6. Ambil $V = \mathbb{R}^3$.

Misal $\{A,B\}$ adalah bebas linier dalam $\mathbb{R}^3$. Maka ruang vektor yang tegak lurus dengan A & B adalah berdemensi satu, selanjutnya jika $\{N\}$ basis dari ruang ini, maka setiap basis yang lain dari ruang ini adalah berbentuk $\{tN\}$, dimana $t \neq 0 \in \mathbb{R}$. Sekali lagi pandang $\mathbb{R}^3$, jika $N \neq 0 \in \mathbb{R}^3$, maka ruang vektor yang tegak lurus dengan N adalah ruang vektor yang berdimensi dua yaitu suatu bidang yang melalui titik pusat O.

II.2. RUANG HERMIT

Definisi 2.8 :

Misal V ruang vektor atas field $\mathbb{C}$, dimana $\mathbb{C}$ =himpunan semua bilangan kompleks.

Suatu produk Hermit pada V adalah suatu aturan (cara) yang mana untuk setiap pasangan elemen - elemen $v,w \in V$ dikawankan dengan suatu bilangan kompleks, ditulis dengan $\langle v,w \rangle$, yang memenuhi sifat - sifat sebagai berikut :

1. $(\forall\, v,w \in V).\ \langle v,w \rangle = \overline{\langle w,v \rangle}$,
   dimana $\overline{\langle w,v \rangle}$ = bilangan kompleks sekawan.
2. $u,v,w \in V \Longrightarrow \langle u,v+w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle$.
3. $\alpha \in \mathbb{C} \Longrightarrow \langle \alpha u,v \rangle = \alpha \cdot \langle u,v \rangle$ &
   $\langle u, \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \cdot \langle u,v \rangle$.

Sekarang perhatikan bahwa jika $\langle w,v \rangle$ dan α bilangan nyata, maka $\overline{\langle w,v \rangle} = \langle w,v \rangle$ dan $\bar{\alpha} = \alpha$.

Jadi definisi produk Hermit pada V di atas sesuai dengan definisi produk skalar pada V (dimana V = ruang vektor atas field $\mathbb{R}$).

Karena $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, maka produk skalar pada V adalah subset dari produk Hermit. Jadi produk Skalar pada V pasti produk Hermit.

Definisi 2.9 :

Produk Hermit pada V disebut definit positip, jika

1. $(\forall v \in V).\ \langle v,v \rangle \geqslant 0$, &
2. $\langle v,v \rangle > 0 \Longrightarrow v \neq 0$.

Atau dapat juga ditulis dengan bentuk lain yaitu :

Produk Hermit pada V disebut definit positip, jika

1. $(\forall v \in V).\ \langle v,v \rangle \geqslant 0$, &
2. $\langle v,v \rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.

Contoh :

2.7. Ambil $V = \mathbb{C}^n$.

Jika $X = (x_1, \ldots, x_n)$ & $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ dalam $\mathbb{C}^n$, maka $\langle X,Y \rangle = \text{df}.\ x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.\bar{y}_i$.

Dapat dibuktikan bahwa $\langle X,Y \rangle$ adalah produk Hermit pada $\mathbb{C}^n$ yang definit positip.

Bukti :

1. $\langle X,Y \rangle = \overline{\langle Y,X \rangle}$, sebab $\overline{\langle Y,X \rangle} = \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i.\bar{x}_i}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i.x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i.\bar{y}_i = \langle X,Y \rangle.$$

2. $\langle Z,X+Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i(\overline{x_i + y_i}) = \sum_{i=1}^{n} z_i(\bar{x}_i + \bar{y}_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} z_i.\bar{x}_i + \sum_{i=1}^{n} z_i.\bar{y}_i = \langle Z,X \rangle + \langle Z,Y \rangle.$$

3. $\langle cX,Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} (cx_i).\bar{y}_i = c.\sum_{i=1}^{n}(x_i.\bar{y}_i) = c.\langle X,Y \rangle$.

$\langle X,cY \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i.(\overline{cy_i}) = \bar{c}.\sum_{i=1}^{n}(x_i.\bar{y}_i) = \bar{c}.\langle X,Y \rangle$.

4. $\langle X,X \rangle = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_n\bar{x}_n$.

$$= (a_1 + b_1 i)(a_1 - b_1 i) + \ldots + (a_n + b_n i)(a_n - b_n i)$$

$$= a_1^2 + b_1^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2 > 0, \text{ dan}$$

Definisi 2.10 :

Ruang vektor atas himpunan semua bilangan komplexs dengan produk Hermit yang definit positip disebut ruang Hermit (Hermitian vector space).

Jadi ruang Euclid adalah ruang Hermit .

Definisi 2.11 :

Misal V ruang Hermit .

Panjang (= norm) dari suatu elemen $v \in V$, ditulis dengan $\|v\|$, didefinisikan sebagai $\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$.

Karena $\langle v,v \rangle \geqslant 0$ dan sama dengan bilangan nyata, maka $\sqrt{\langle v,v \rangle}$ selalu ada dan diambil suatu bilangan $\geqslant 0$.

Untuk selanjutnya definisi - definisi tentang ortogonal, vektor satuan, basis ortogonal, basis ortonormal, ruang ortogonal, pada ruang Hermit didefinisikan sama seperti pada ruang Euclid.

Demikian juga teorema 2.1 dan teorema 2.2 pada ruang Euclid, berlaku pula pada ruang Hermit. Bukti analog pada ruang Euclid.