BAB VI

TEOREMA SPEKTRAL

Teorema 6.1 :

Misal V adalah ruang Euclid yang berdimensi hingga, $T : V \longrightarrow V$ suatu pemetaan Simetri yang mempunyai nilai karakteristik $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ yang berlain-lainan.

Untuk masing - masing λ_i,

$$V_i = \{ x \in V \mid T(x) = \lambda_i . x \}$$

adalah suatu ruang bagian dari V yang disebut ruang karakteristik (eigen space), dan E_i adalah proyeksi ortogonal pada V_i . Maka :

1. $T(V_i) \subseteq V_i$, untuk setiap i .
2. $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots\ldots \oplus V_r$.
3. $E_i . E_j = 0$, untuk setiap $i \neq j$.
4. $E_1 + E_2 + \ldots + E_r = I$, dengan $I : V \longrightarrow V$ pemetaan satuan pada V.
5. $T = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots\ldots + \lambda_r E_r$.

Bukti :

1. Ambil sebarang elemen $v \in V_i$, maka $T(v) = \lambda_i . v$.
   Karena V_i ruang bagian dari V, maka $\lambda_i . v \in V_i$.
   Sehingga $T(v) \in V_i$, untuk setiap $v \in V_i$.
   Jadi terbukti bahwa $T(V_i) \subseteq V_i$, atau V_i invariant terhadap T.

2. Misal dim (V) = n .

Karena T pemetaan simetri maka T dapat diwakili oleh suatu matriks n x n simetri. Karena nilai karakteristik dari suatu matriks n x n simetri adalah riil, maka suku-banyak karakteristik dari T yaitu

$P_T(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} . (t - \lambda_2)^{m_2} .... (t - \lambda_r)^{m_r}$,

dengan $m_1 + m_2 + ... + m_r = n$.

sehingga $\dim (V) = n = m_1 + m_2 + ... + m_r$.

Sekarang pandang pemetaan $T | V_i : V_i \longrightarrow V_i$.

Misal $\dim (V_i) = k_i$, maka $P_{T|V_i}(t) = (t - \lambda_i)^{k_i}$.

Karena $P_{T|V_i}(t) \mid P_T(t)$, maka

$$(t - \lambda_i)^{k_i} \mid (t - \lambda_1)^{m_1} (t - \lambda_2)^{m_2} .... (t - \lambda_r)^{m_r}.$$

Sehingga $k_i \leqslant m_i$.

Jadi $\dim (V_i) \leqslant m_i$.

Pandang $V = V_i \oplus V_i^{\perp}$, dimana $T(V_i) \subseteq V_i$.

Maka menurut teorema 4.6, $T(V_i^{\perp}) \subseteq V_i^{\perp}$.

Selanjutnya pandang pemetaan linier

$$T_1 = T \mid V_i : V_i \longrightarrow V_i \text{ dan}$$

$$T_2 = T \mid V_i^{\perp} : V_i^{\perp} \longrightarrow V_i^{\perp} .$$

Maka $P_T(t) = P_{T_1}(t) . P_{T_2}(t)$.

$$= (t - \lambda_i)^{k_i} . P_{T_2}(t) .$$

Andaikan $k_i < m_i$, maka ada faktor $t - \lambda_i$ dalam $P_{T_2}(t)$.

Berarti λ_i = salah satu nilai karakteristik dari $T | V_i^{\perp}$.

Maka $(\exists z \in V_i^{\perp}) [z \neq 0 \ \& \ T(z) = \lambda_i . z]$.

Maka $z \in V_i \cap V_i^{\perp}$, sehingga z = 0. Kontradiksi.

Jadi yang benar $k_i \geqslant m_i$.

Karena $k_i \leqslant m_i$ dan $k_i \geqslant m_i$, maka $k_i = m_i$.

Sehingga terbukti dim $(V_i^\bullet) = m_i$, untuk setiap i .

Dim (V) $= n = m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_r$.

Pandang $W = V_1 + V_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + V_r$.

Ambil sebarang $w \in V_i \cap V_j$, untuk setiap $i \neq j$.

Maka $T(w) = \lambda_i . w$ & $T(w) = \lambda_j . w$.

Sehingga $\lambda_i . w = \lambda_j . w$.

$$(\lambda_i - \lambda_j).w = 0 .$$

Karena $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, maka $w = 0$.

Jadi $W = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots\ldots \oplus V_r$, dan

Dim $(W) = m_1 + m_2 + \ldots\ldots\ldots + m_r = n$

Karena $W \subseteq V$ dan dim (W) = dim (V), maka W=V .

Jadi $\underline{V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots\ldots \oplus V_r}$ (terbukti) .

3. Ambil sebarang $v \in V_i$ dan $w \in V_j$, untuk $i \neq j$.
Maka $T(v) = \lambda_i . v$ dan $T(w) = \lambda_j . w$.

Karena $\lambda_i \neq \lambda_j$, maka menurut teorema 4.3, $v \perp w$.

Jadi terbukti bahwa $(\forall v \in V_i)(\forall w \in V_j)[[i \neq j \Longrightarrow v \perp w]]$.

Atau $(\forall i \neq j).V_i \perp V_j$.

Dan menurut teorema 5.2,

$$(\forall i \neq j).E_i . E_j = 0 .$$

atau

$$\underline{(\forall i \neq j)\ [\ E_i \ \& \ E_j \text{ saling } \perp\ ]} .$$

4. Ambil sebarang $v \in V$, maka

$(\exists!\, v_1, v_2, \ldots\ldots, v_r)\ [\, v_i \in V_i \;\&\; v =$

$= v_1 + v_2 + \ldots\ldots\ldots + v_r\,]$.

Maka $(E_1 + E_2 + \ldots\ldots + E_r)(v) =$

$= E_1(v) + E_2(v) + \ldots + E_r(v)$

$= E_1(v_1+v_2+\ldots+v_r)+\ldots+E_r(v_1+v_2+\ldots+v_r)$

$= E_1(v_1)+\ldots+E_1(v_r)+\ldots+E_r(v_1)+\ldots+E_r(v_r)$

$= v_1 + v_2 + \ldots + v_r = v = I(v)$, untuk setiap $v \in V$

Jadi $\underline{E_1 + E_2 + \ldots\ldots + E_r = I}$.

5. Ambil sebarang $v \in V$, maka

$(\exists!\, v_1, v_2, \ldots, v_r)$ [

$[\, v_i \in V_i \;\&\; v = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_r\,]$.

Maka $(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots\ldots + \lambda_r E_r)(v)$

$= \lambda_1 E_1(v) + \lambda_2 E_2(v) + \ldots + \lambda_r E_r(v)$

$= \lambda_1 E_1(v_1+v_2+\ldots+v_r) + \ldots + \lambda_r E_r(v_1+v_2+\ldots+v_r)$

$= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots\ldots + \lambda_r v_r$

$= T(v_1) + T(v_2) + \ldots\ldots + T(v_r)$

$= T(v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_r) = T(v)$.

Sehingga $T(v) = (\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots\ldots + \lambda_r E_r)(v)$,

untuk setiap $v \in V$.

Jadi terbukti bahwa $\underline{T = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_r E_r}$

Selanjutnya penulisan pemetaan $T : V \longrightarrow V$ dalam hubungan $T = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_r E_r$, seperti pada teorema 6.1 dinamakan <u>bentuk Spektral</u>-

Remark :

Jika salah satu nilai karakteristik $\lambda_i = 0$, misal $\lambda_r = 0$, maka bentuk Spektral pemetaan $T : V \longrightarrow V$ adalah

$$\underline{T = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots\ldots + \lambda_{r-1} E_{r-1}} .$$

Dalam hal ini $\underline{V_r = \text{Ker}\ (T)}$.

Bukti :

Ambil sebarang $x \in V_r$, maka $T(x) = \lambda_r . x = 0.x = 0$

Maka $x \in \text{Ker}(T)$, sehingga $V_r \subseteq \text{Ker}(T)$.

Ambil sebarang $x \in \text{Ker}(T)$, maka $T(x) = 0$,

atau $(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots\ldots + \lambda_{r-1} E_{r-1} + \lambda_r E_r)(x) = 0$.

$$\lambda_1 E_1(x) + \lambda_2 E_2(x) + \ldots + \lambda_{r-1} E_{r-1}(x) + \lambda_r E_r(x) = 0 .$$

Karena $\lambda_r = 0$, maka

$$\lambda_1 E_1(x) + \ldots\ldots + \lambda_{r-1} E_{r-1}(x) = 0 = \lambda_r . x$$

$$T(x) = \lambda_r . x .$$

Maka $x \in V_r$, sehingga $\text{Ker}(T) \subseteq V_r$.

Jadi $\text{Ker}(T) = V_r$

Selanjutnya penulisan bentuk Spektral hanya dikaitkan dengan nilai - nilai karakteristik yang $\neq 0$. Jadi dalam bentuk spektral

$$T = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 \ldots\ldots + \lambda_r E_r,$$

dimaksudkan untuk $\lambda_i \neq 0$

Jika $\mathcal{E}_i$ basis ortonormal dari $E_i(V)$, maka

$\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \ldots\ldots \cup \mathcal{E}_r = \mathcal{E}$ adalah <u>basis ortonormal</u> dari $T(V)$.

<u>Bukti</u> :

Ambil sebarang $y \in T(V)$, maka $y = T(x)$ untuk suatu $x \in V$.

Maka $(\exists!\, v_1, v_2, \ldots\ldots, v_r)\ [\ v_i \in V_i\ \&\ x = $

$= v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_r\ ]$.

Sehingga $y = T(x) = T(v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_r)$

$= T(v_1) + T(v_2) + \ldots\ldots + T(v_r)$

$= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots\ldots + \lambda_r v_r$.

Karena $v_i \in E_i(V)$ (sebab E_i proyeksi pada V_i),maka v_i dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\mathcal{E}_i$, jadi $v_i = a_i . \mathcal{E}_i$, dengan $a_i \in \mathbb{R}$ dan $a_i \neq 0$.

Maka $y = \lambda_1 a_1\ \mathcal{E}_1 + \lambda_2 a_2\ \mathcal{E}_2 + \ldots\ldots + \lambda_r a_r\ \mathcal{E}_r$

$= \mu_1 \mathcal{E}_1 + \mu_2 \mathcal{E}_2 + \ldots\ldots + \mu_r \mathcal{E}_r$.

Jadi $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \ldots\ldots \cup \mathcal{E}_r$ membangun $T(V)$.

Selanjutnya akan dibuktikan $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \ldots\ldots \cup \mathcal{E}_r$ bebas linier.

Ambil kombinasi linier sebarang yaitu

$$\beta_1 \mathcal{E}_1 + \beta_2 \mathcal{E}_2 + \ldots\ldots + \beta_r \mathcal{E}_r = 0.$$

Perhatikan bahwa $\beta_i \mathcal{E}_i \in E_i(V)$ dan $0 = 0 + 0 + \ldots\ldots + 0$, dengan $0 \in E_i(V)$.

Karena $0 \in T(V)$ adalah sebagai jumlahan yang tunggal dari $0 \in E_i(V)$, maka $\beta_i\ \mathcal{E}_i = 0$, berarti $\beta_i = 0$, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots\ldots, r$.

Jadi $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \ldots\ldots \cup \mathcal{E}_r$ bebas linier.

Jadi $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \ldots\ldots \cup \mathcal{E}_r$ basis ortonormal dari $T(V)$.

Misal $\mathcal{E} = \{ e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1m_1}, \ldots, e_{r1}, e_{r2}, \ldots, e_{rm_r} \}$, dan nilai karakteristik yang $\neq 0$ dari $T : V \longrightarrow V$ adalah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_r$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ untuk $i \neq j$).

Maka $T = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots\ldots + \lambda_r E_r$.

Terhadap basis $\mathcal{E}$ ini, T dapat ditulis :

$$\underline{T = \lambda_1 \cdot \langle e_{11}, - \rangle \cdot e_{11} + \ldots\ldots + \lambda_r \cdot \langle e_{rm_r}, - \rangle \cdot e_{rm_r}} .$$

Basis ortonormal $\mathcal{E}$ ini disebut <u>basis Spektral</u> dari $T : V \longrightarrow V$.

<u>Bukti</u> :

Ambil sebarang $v \in V$, maka

$$T(v) = (\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots\ldots + \lambda_r E_r)(v)$$
$$= \lambda_1 E_1(v) + \lambda_2 E_2(v) + \ldots\ldots + \lambda_r E_r(v)$$
$$= \lambda_1 \cdot \langle e_{11}, v \rangle \cdot e_{11} + \ldots\ldots + \lambda_1 \cdot \langle e_{1m_1}, v \rangle \cdot e_{1m_1}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots + \lambda_r \cdot \langle e_{r1}, v \rangle \cdot e_{r1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \lambda_r \cdot \langle e_{rm_r}, v \rangle \cdot e_{rm_r} .$$

Sehingga $T(v) = \lambda_1 \cdot \langle e_{11}, v \rangle \cdot e_{11} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_r \cdot \langle e_{rm_r}, v \rangle \cdot e_{rm_r}$, untuk setiap $v \in V$

Atau dapat ditulis :

$$\underline{T = \lambda_1 \cdot \langle e_{11}, - \rangle \cdot e_{11} + \ldots + \lambda_r \cdot \langle e_{rm_r}, - \rangle \cdot e_{rm_r}} .$$

Selanjutnya ambil $\{ e_{im_i} \}$ sebagai vektor satuan standart, maka

$$T(e_{11}) = \lambda_1 \cdot \langle e_{11}, e_{11} \rangle \cdot e_{11} + \ldots + \lambda_r \cdot \langle e_{rm_r}, e_{11} \rangle \cdot e_{rm_r}$$
$$= \lambda_1 e_{11} .$$

$$T(e_{12}) = \lambda_1 \cdot \langle e_{11}, e_{12} \rangle \cdot e_{11} + \lambda_1 \cdot \langle e_{12}, e_{12} \rangle \cdot e_{12} + \ldots$$
$$+ \lambda_r \cdot \langle e_{rm_r}, e_{12} \rangle \cdot e_{rm_r} = \lambda_1 e_{12} .$$

....

....

$$T(e_{21}) = \lambda_1 \cdot \langle e_{11}, e_{21} \rangle \cdot e_{11} + \ldots + \lambda_2 \cdot \langle e_{21}, e_{21} \rangle \cdot e_{21} + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_r \cdot \langle e_{rm_r}, e_{21} \rangle \cdot e_{rm_r} = \lambda_2 e_{21} .$$

....

....

....

$$T(e_{rm_r}) = \lambda_1 \cdot \langle e_{11}, e_{rm_r} \rangle \cdot e_{11} + \ldots + \lambda_r \cdot \langle e_{rm_r}, e_{rm_r} \rangle \cdot e_{rm_r}$$
$$= \lambda_r \, e_{rm_r} .$$

Jadi terhadap basis Spektral $\mathcal{E}$ ini, T diwakili oleh matriks diagonal :

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\
0 & & \ddots & & & & & & & \vdots \\
0 & & & \lambda_1 & & & & & & 0 \\
0 & & & & \lambda_2 & & & & & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
0 & & & & & & \lambda_2 & & & 0 \\
\vdots & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
0 & & & & & & & & \lambda_r & 0 \\
0 & & & & & & & & & \ddots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & & & & & \lambda_r & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & & & & & 0 & \lambda_r
\end{pmatrix}$$

Teorema 6.2 :

Misal V ruang Euclid yang berdimensi hingga ;

$V = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_r$;

E_i = proyeksi ortogonal pada M_i, untuk setiap i = = 1, 2, ... , r, dimana $E_i \perp E_j$ untuk setiap $i \neq j$; dan $T = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots + \alpha_r E_r$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ untuk setiap $i \neq j$.

Maka :

1. $T = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots + \alpha_r E_r$ pemetaan linier yang simetri.

2. $M_i = \{ x \in V \mid T(x) = \alpha_i . x \}$.

3. $\{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \}$ adalah Spektral dari T.

Bukti :

1. $T^* = (\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_r E_r)^*$

$= \alpha_1 E_1^* + \alpha_2 E_2^* + \ldots\ldots\ldots + \alpha_r E_r^*$

$= \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_r E_r$

$= T$.

Sehingga $T = T^*$.

Jadi $T = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots + \alpha_r E_r$ pemetaan simetri.

2. Karena $E_i \perp E_j$ untuk setiap $i \neq j$, maka $M_i \perp M_j$, jika $i \neq j$.

Ambil sebarang $x \in M_i$, maka

$T(x) = (\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots + \alpha_r E_r)(x)$

$= \alpha_1 E_1(x) + \ldots\ldots + \alpha_i E_i(x) + \ldots\ldots + \alpha_r E_r(x)$

$= \alpha_i . x$, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots\ldots, r$.

Sehingga $T(x) = \alpha_i . x$, untuk setiap $x \in M_i$.

Karena $V = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots\ldots \oplus M_r$, maka

$M_i = \{ x \in V \mid T(x) = \alpha_i . x \}$.

Jadi M_i = himpunan semua vektor karakteristik dari T dengan α_i sebagai nilai karakteristiknya.

3. Jadi $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_r\}$ Spektral dari T.

Akibat 6.1 :

Jika V ruang Euclid dan $V = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots\ldots \oplus M_r$;

E_i=proyeksi ortogonal pada M_i, untuk setiap i = 1,2,..,r,

dimana $E_i \perp E_j$ untuk setiap $i \neq j$.

Maka :

$$\{\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots\ldots + \alpha_r E_r \mid \alpha_i \neq \alpha_j, \forall i \neq j\} =$$

= himpunan semua pemetaan Simetri pada V dengan Spektral $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_r\}$.

Teorema 6.1, teorema 6.2 dan akibat 6.1, juga berlaku pada ruang Hermit. Bukti analoog.

Contoh :(membuat pemetaan Simetri dengan teorema Spektral).

6.1. Misal $V = \mathbb{R}^2$ dan ambil vektor sebarang $(1,2) \in \mathbb{R}^2$.

Maka $V = [(1,2)] \oplus [(1,2)]^{\perp}$.

Ambil E_1 : proyeksi ortogonal pada $[(1,2)]$,dan

E_2 : proyeksi ortogonal pada $[(1,2)]^{\perp}$.

Karena $[(1,2)]$ & $[(1,2)]^{\perp}$ saling $\perp$,

maka $E_1 \cdot E_2 = 0$.

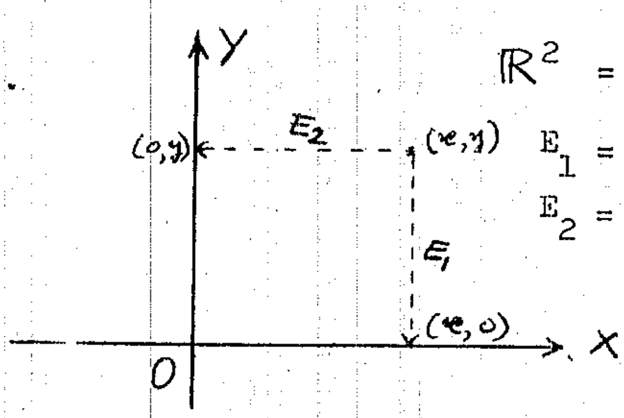
Maka :

$T = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$ adalah pemetaan simetri.

$$[(1,2)] = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid T(x) = \alpha_1 x\}.$$

$$[(1,2)]^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid T(x) = \alpha_2 x\}.$$

6.2.



$\mathbb{R}^2 = X \oplus Y$.

E_1 = proyeksi ortogonal pada X.

E_2 = proyeksi ortogonal pada Y.

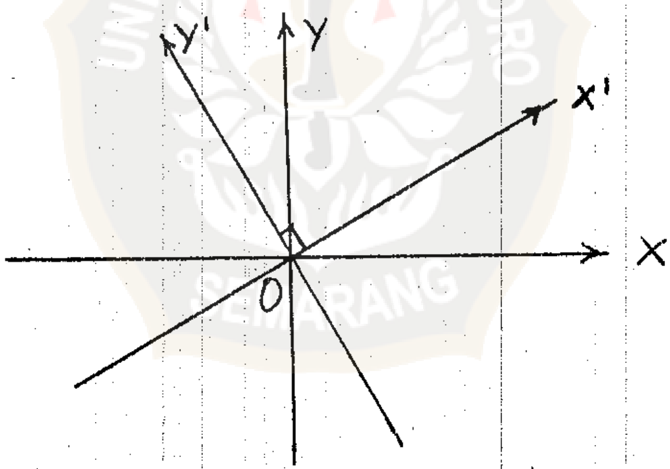
Karena $X \perp Y$, maka $E_1 \cdot E_2 = 0$.

Maka $T = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$ pemetaan simetri.

$X = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid T(x) = \alpha_1 x \}$.

$Y = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid T(y) = \alpha_2 y \}$.

6.3.



$\mathbb{R}^2 = X' \oplus Y'$.

$E_1 : (x', y') \longmapsto (x'0)$.

$E_2 : (x', y') \longmapsto (0, y')$.

Karena $X' \perp Y'$ maka $E_1 \cdot E_2 = 0$.

Maka $T = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$ pemetaan simetri dengan

$\{ \alpha_1, \alpha_2 \}$ Spektralnya.

$X' = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid T(x) = \alpha_1 . x \}$.

$Y' = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid T(x) = \alpha_2 . x \}$.

Dan $T(x,y) = (\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2)(x,y)$

$= \alpha_1 (x,0) + \alpha_2 (0,y)$

$= (\alpha_1 x, \alpha_2 y)$

Catatan :

1. Jika semua nilai karakteristik $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \neq 0$,

   maka $T = \lambda_1 E_1 + \ldots\ldots + \lambda_r E_r \cong$ matriks A yang

   similar dengan

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

   Sehingga $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots\ldots\ldots \lambda_r \neq 0$.

   Jadi A bijektif.

2. Jika salah satu nilai karakteristik = o , misal $\lambda_r = 0$

   Maka $V_r = \text{Ker}\ (T)$.

   Dan T tidak bijektif sebab $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{r-1} 0 = 0$.

3. Jika

$$\begin{array}{ccccccccc} V & = & V_1 & \oplus & V_2 & \oplus \ldots\ldots\ldots \oplus & V_{r-1} & \oplus & V_r \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_{r-1} & & \lambda_r \end{array}$$

   Jika $\lambda_r = 0$, maka Ker (T) = V_r.

   T tidak bijektif pada V.

   Maka $T : V \longrightarrow V$ simetri dan tidak bijektif.

   Tetapi $T' : V \setminus V_r \longrightarrow V \setminus V_r$ adalah bijektif.