B A B II

L U A S A N

Telah kita ketahui bahwa kurva ialah tempat kedu - dukan titik-titik yang koordinatnya merupakan fungsi dari sebuah parameter tunggal. Sekarang kita mendefinisikan - suatu luasan sebagai tempat kedudukan titik-titik yang - koordinatnya merupakan fungsi dari dua parameter bebas u,v. Jadi

$$x = f_1(u,v), \qquad y = f_2(u,v), \qquad z = f_3(u,v). \quad .... \quad (1)$$

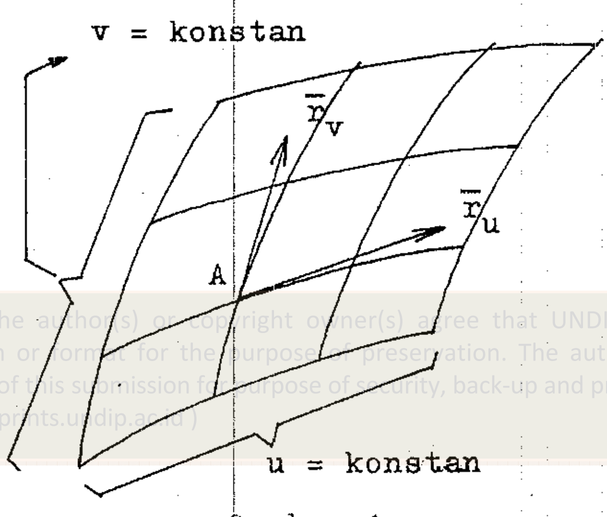
merupakan persamaan parameter suatu luasan. Dapatlah kita mengerti bahwa satu atau lebih fungsi f itu mungkin hanya memuat sebuah parameter tunggal. Sebagai contoh, silinder dapat didefinisikan dengan persamaan

$$x = f_1(u), \qquad y = f_2(u), \qquad z = f_3(u,v).$$

Dalam bentuk vektor persamaan luasan kita tulis

$$\overline{r} = \overline{r}\,(u,v) = r_1\overline{e}_1 + r_2\overline{e}_2 + r_3\overline{e}_3. \quad .... \quad (2)$$

Jika u konstan dalam persamaan (1) dan (2), maka $\overline{r}$ hanya bergantung pada satu parameter dan karena itu mendefini - sikan sebuah kurva pada luasan, yaitu kurva parameter v = konstan. Dengan cara yang sama u = konstan mewakili kurva parameter yang lain. Bila konstan itu bervariasi, maka luas- an tertutup oleh sebu-



Gambar 1

ah jaring kurva parameter. Dua kurva parameter yang melalui titik A membentuk keluarga tak berhingga banyak kurva v = konstan dan keluarga tak berhingga banyak kurva u = konstan. Pada titik A vektor $\bar{r}_u$ menyinggung kurva v = konstan dan vektor $\bar{r}_v$ menyinggung kurva u = konstan, dengan

$$\bar{r}_u = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \qquad \bar{r}_v = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}.$$

(u,v) disebut juga koordinat kurvilinier sebuah titik.

II.1. BENTUK FUNDAMENTAL PERTAMA.

Suatu relasi $\phi(u,v) = 0$ antara koordinat kurvilinier menyatakan sebuah kurva pada luasan. Kurva semacam ini dapat ditulis dengan persamaan

$$u = u\,(t), \qquad v = v\,(t).$$

Vektor $d\bar{r}/dt$ suatu titik A pada luasan yaitu

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{r}_u \frac{du}{dt} + \bar{r}_v \frac{dv}{dt}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

menyinggung kurva dan juga luasan. Dalam bentuk yang bebas dari pemilihan parameter, persamaan menjadi

$$d\bar{r} = \bar{r}_u\, du + \bar{r}_v\, dv. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

dengan du, dv memenuhi syarat $\phi_u\, du + \phi_v\, dv = 0$.

Jarak antara dua titik A dan B pada kurva didapat dengan mengintegralkan ds,

$$ds^2 = dr_1^{\,2} + dr_2^{\,2} + dr_3^{\,2}.$$

$$= d\bar{r} \cdot d\bar{r}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

sepanjang kurva. Dengan mensubstitusikan persamaan (4) ke dalam persamaan (5) kita mendapat

$$ds^2 = (\bar{r}_u\, du + \bar{r}_v\, dv) \cdot (\bar{r}_u\, du + \bar{r}_v\, dv)$$

$$= E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

dengan

$$E = \bar{r}_u . \bar{r}_u, \qquad F = \bar{r}_u . \bar{r}_v, \qquad G = \bar{r}_v . \bar{r}_v. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

merupakan fungsi dari parameter u,v. Sekarang jarak A dan B pada kurva u = u (t), v = v (t) dapat dinyatakan oleh

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\, F\, \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\; dt$$

Pernyataan (6) untuk ds^2 disebut bentuk fundamental pertama dari luasan. Akar kwadratnya dapat diambil sebagai panjang $|d\bar{r}|$ yang disebut elemen garis. Karena ds merupakan panjang garis,

$$E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2$$

selalu positif kecuali untuk du = dv = 0. Dalam teori luasan riil, bentuk ini disebut definit positif.

$$ds^2 = \frac{1}{E}\,(E\, du + F\, dv)^2 + \frac{EG - F^2}{E}\, dv^2$$

dan

$$E = \bar{r}_u . \bar{r}_u > 0$$

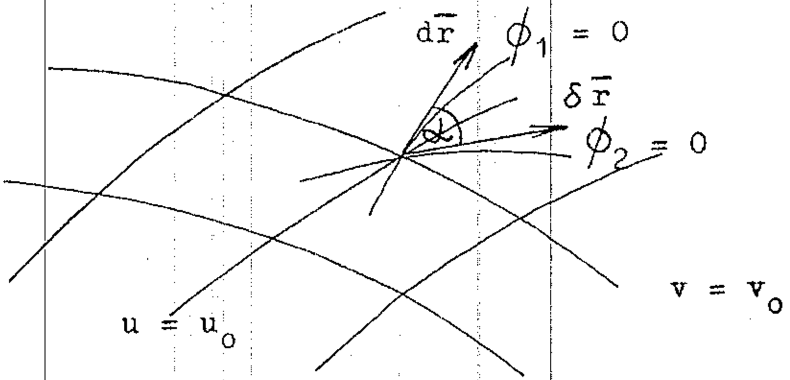
maka

$$EG - F^2 > 0.$$

Dengan bantuan E, F, G kita dapat menyatakan sudut antara dua jurusan garis singgung yang dinyatakan oleh

$$d\bar{r} = \bar{r}_u\, du + \bar{r}_v\, dv \quad \text{pada kurva } \phi_1(u,v) = 0 \text{ dan}$$

$$\delta\bar{r} = \bar{r}_u\, \delta u + \bar{r}_v\, \delta v \quad \text{pada kurva } \phi_2(u,v) = 0$$



Gambar 2

$$\cos\alpha = \frac{d\bar{r}\,.\,\delta\bar{r}}{|d\bar{r}||\delta\bar{r}|}$$

$$= \frac{\bar{r}_u.\bar{r}_u\;du\,\delta u + \bar{r}_u.\bar{r}_v\;(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \bar{r}_v.\bar{r}_v\;dv\,\delta v}{|d\bar{r}||\delta\bar{r}|}$$

$$= \frac{E\;du\,\delta u + F\;(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\;dv\,\delta v}{\sqrt{E\;du^2 + 2F\;du\;dv + G\;dv^2}\,.\,\sqrt{E\,\delta u^2 + 2f\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}$$

$$= E\,\frac{du}{ds}\frac{\delta u}{\delta s} + F\,\left(\frac{du}{ds}\frac{\delta v}{\delta s} + \frac{dv}{ds}\frac{\delta u}{\delta s}\right) + G\,\frac{dv}{ds}\frac{\delta v}{\delta s}. \;\ldots\ldots\; (8)$$

Dari hasil ini dapat kita tulis beberapa pernyataan yaitu

1. Bila $\alpha = \pi/2$ kita memperoleh syarat dua jurusan or - thogonal pada luasan ialah

   $E\;du\;\;u + F\;(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\;dv\,\delta v = 0$

   bila $dv/du = V'_1$ dan $\delta v/\delta u = V'_2$ maka persamaan ini da pat kita tulis

   $$E + F\;(V'_1 + V'_2) + G\;V'_1\;V'_2 = 0. \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (9)$$

   Pandang persamaan differensial

   $P\;du^2 + 2\;Q\;du\;dv + R\;dv^2 = 0$

   atau bila $dv/du = V'$ persamaan menjadi

   $P + 2\;Q\;V' + R\;V'^2 = 0$

   persamaan ini menyatakan dua jurusan pada suatu luasan misal V'_1 dan V'_2. Jadi

$$V'_1 + V'_2 = -\frac{2Q}{R}, \qquad V'_1\, V'_2 = \frac{P}{R}$$

sehingga syarat kedua jurusan itu orthogonal ialah

$$E + F\left(-\frac{2Q}{R}\right) + G\left(\frac{P}{R}\right) = 0$$

atau

$$ER - 2\,FQ + GP = 0. \qquad \ldots\ldots (10)$$

2. Bila Θ sudut antara garis parameter u = konstan dan v = konstan, maka Θ dinyatakan oleh

$$\cos\Theta = \frac{F\,dv\,\delta u}{\sqrt{G\,dv^2}.\sqrt{E\,\delta u^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

$$\sin\Theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} = \frac{H}{\sqrt{EG}} \qquad \ldots\ldots (11)$$

dengan H didefinisikan $H = \sqrt{EG - F^2}$. .... (12)

3. Jadi tampak bahwa kurva-kurva parameter membentuk sistim orthogonal bila F = 0. .... (13)

II.2. BIDANG SINGGUNG DAN NORMAL.

Semua vektor $d\bar{r}/dt$ melalui titik A menyinggung luasan dan memenuhi hubungan (3), maka dari itu terletak - dalam bidang yang dibentuk oleh vektor $\bar{r}_u$ dan $\bar{r}_v$. Bidang ini ialah bidang singgung di titik A pada luasan itu. Persamaannya ialah

$$\bar{R} = \bar{r} + \lambda\,\bar{r}_u + \mu\,\bar{r}_v, \qquad \lambda, \mu \text{ parameter.} \qquad \ldots\ldots (14)$$

Normal pada luasan di titik A ialah garis melalui titik A tegaklurus bidang singgung di A. Jadi normal itu tegaklurus vektor $\bar{r}_u$ dan vektor $\bar{r}_v$, berarti sejajar dengan vektor $\bar{r}_u \times \bar{r}_v$. Bila sebagai normal satuan kita ambil $\bar{N}$, misal $\bar{N} = \lambda\,\bar{r}_u \times \bar{r}_v$

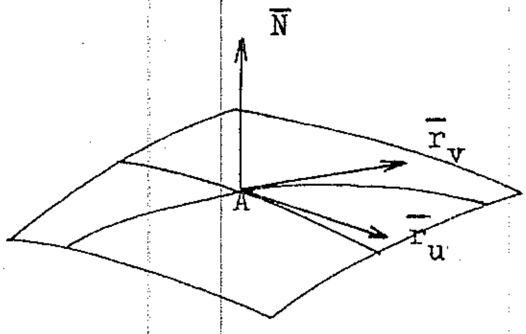
maka

$$|\overline{N}| = \lambda\, |\overline{r}_u \times \overline{r}_v|$$

$$1 = \lambda\, |\overline{r}_u|\, |\overline{r}_v| \sin \Theta$$

$$1 = \lambda \sqrt{E} \sqrt{G} \frac{H}{\sqrt{EG}}$$

$$\lambda = \frac{1}{H}$$



Gambar 3

Jadi

$$\overline{N} = \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{H} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Contoh : Luasan singgung yang dapat dihamparkan.

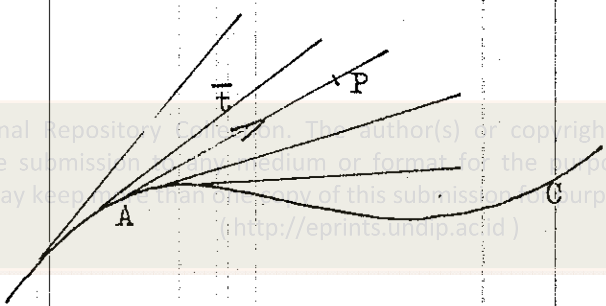
Totalitas semua titik pada garis-garis singgung suatu kurva C dalam ruang merupakan luasan singgung ke kurva C. Jadi luasan itu memuat tak berhingga banyak garis lurus yang disebut garis pelukis dari luasan itu. Jika kurva C dinyatakan oleh persamaan

$$\overline{r} = \overline{r}\,(s),$$

dengan vektor singgung satuan $\overline{t} = \overline{t}\,(s)$, maka persamaan luasan singgung ke kurva C ialah

$$\overline{R}\,(s,v) = \overline{r}\,(s) + v\,\overline{t}\,(s), \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

dengan v jarak titik P pada garis pelukis ke titik A di - mana garis pelukis itu menyinggung kurva C.



$\overline{R}_s = \overline{t} + v\kappa\dot{\overline{n}}$, $\qquad \overline{R}_v = \overline{t}$

$E = \overline{R}_s.\overline{R}_s = (\overline{t} + v\kappa\overline{n}).(\overline{t} + v\kappa\overline{n}) = 1 + v^2\kappa^2$

$F = \overline{R}_s.\overline{R}_v = (\overline{t} + v\kappa\overline{n}).\overline{t} = 1$

$G = \overline{R}_v.\overline{R}_v = \overline{t}.\overline{t} = 1$

$H = \sqrt{EG - F^2} = v\kappa$

$$\overline{N} = \frac{\overline{R}_s \times \overline{R}_v}{H} = \frac{(\overline{t} + v\kappa\overline{n}) \times \overline{t}}{v\kappa} = -\overline{b}$$

Jadi bidang singgung sepanjang sebuah garis pelukis berimpit dengan bidang oskulasi suatu titik pada kurva C yang dilalui garis pelukis itu. Karena itu,

Bidang singgung titik-titik sepanjang sebuah garis pelukis pada luasan singgung yang dapat dihamparkan adalah sama.

II.3. LUASAN YANG DAPAT DIHAMPARKAN.

Luasan singgung yang dapat dihamparkan, kerucut - dan silinder mempunyai bidang singgung yang tetap sepan - jang sebuah garis pelukisnya. Luasan semacam ini dapat - dipandang sebagai selubung dari suatu keluarga bidang - bidang berparameter satu. Akan kita tunjukkan bahwa hanya luasan semacam itu yang menjadi selubung suatu keluarga - bidang-bidang berparameter satu.

Persamaan

$$\overline{r}.\overline{a} + p = 0, \qquad a' = \frac{d\overline{a}}{du} \neq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

dengan $\overline{a}$ dan p merupakan fungsi dari sebuah parameter u dan $\overline{a}$ tegaklurus bidang, dapat kita ambil untuk mewakili keluarga bidang-bidang yang dimaksud. Dua buah bidang dari keluarga bidang-bidang itu yang bersesuaian dengan nilai parameter u dan u_1 akan berpotongan menurut sebuah garis lurus dengan persamaan

$$\bar{r}.\bar{a}(u) + p(u) = 0, \qquad \bar{r}.\bar{a}(u_1) + p(u_1) = 0$$

yang juga terletak pada bidang

$$\frac{\bar{r}.\left\{\bar{a}(u_1) - \bar{a}(u)\right\} + \left\{p(u_1) - p(u)\right\}}{u_1 - u} = 0.$$

Jika u_1 mendekati u, garis dalam kedudukan limit dan persamaan menjadi

$$\bar{r}.\bar{a} + p = 0, \quad \bar{r}.\bar{a}' + p' = 0, \quad p' = \frac{dp}{du}. \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (18)$$

Garis ini disebut garis karakteristik bidang (17).

Dua buah garis karakteristik yang bersesuaian de - ngan nilai parameter u dan u_1 akan berpotongan di sebuah titik yang memenuhi persamaan

$$\bar{r}.\bar{a}(u) + p(u) = 0, \qquad \bar{r}.\bar{a}'(u) + p'(u) = 0,$$
$$\bar{r}.\bar{a}(u_1) + p(u_1) = 0, \qquad \bar{r}.\bar{a}'(u_1) + p'(u_1) = 0$$

yang juga terletak pada bidang-bidang

$$\frac{\bar{r}.\left\{\bar{a}(u_1) - \bar{a}(u)\right\} + \left\{p(u_1) - p(u)\right\}}{u_1 - u} = 0,$$

$$\frac{\bar{r}.\left\{\bar{a}'(u_1) - \bar{a}'(u)\right\} + \left\{p'(u_1) - p'(u)\right\}}{u_1 - u} = 0.$$

Jika u_1 mendekati u, titik dalam kedudukan limit, persa - maan menjadi

$$\bar{r}.\bar{a} + p = 0, \quad \bar{r}.\bar{a}' + p' = 0, \quad \bar{r}.\bar{a}'' + p'' = 0. \ \ldots\ldots \ (19)$$

Titik ini disebut titik karakteristik dari bidang (17)dan terletak pada garis karakteristik. Bila $\bar{a}.(\bar{a}' \times \bar{a}'') = 0$, Padahal vektor $\overline{a}$ tegaklurus bidang (17). Bila vektor $\overline{a}(u)$ sejajar dengan sebuah bidang β, bidang-bidang (17) sejajar dengan jurusan-jurusan yang tegaklurus bidang β. Dalam hal ini selubung dari bidang-bidang (17) merupakan silinder dengan garis pelukis tegaklurus ke bidang β.

Bila titik karakteristik sama untuk semua bidang (17), selubung merupakan kerucut yang dibentuk oleh semua garis-garis karakteristik.

Dalam hal biasa, tempat kedudukan titik-titik karakteristik itu merupakan sebuah kurva C. Akan kita tunjukkan bahwa garis-garis karakteristik itu menyinggung kurva C pada titik-titik karakteristiknya. Untuk itu pandang persamaan (19), penyelesaian $\overline{r}$ dari persamaan ini merupakan fungsi u, karena itu differensial persamaan pertama dan kedua dari persamaan (19) ialah

$$\overline{r}'.\overline{a} + \overline{r}.\overline{a}' + p' = 0, \qquad \overline{r}'.\overline{a}' + \overline{r}.\overline{a}'' + p'' = 0.$$

Jika kita membandingkannya dengan persamaan (19) maka kita peroleh persamaan

$$\overline{r}'.\overline{a} = 0, \qquad \overline{r}'.\overline{a}' = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Ini berarti bahwa vektor singgung $\overline{r}'$ ke kurva C mempunyai arah yang sama dengan garis (18), karena vektor itu melalui titk karakteristik dan terletak pada garis karakteristik. Dengan cara yang sama kita differensialkan persamaan pertama dari persamaan (20),

$$\overline{r}'.\overline{a}' + \overline{r}''.\overline{a} = 0,$$

bila kita membandingkannya dengan persamaan kedua dari persamaan (20), maka

$$\overline{r}''.\overline{a} = 0.$$

Karena $\bar{r}'.\bar{a} = 0$, maka berarti vektor $\bar{r}' \times \bar{r}''$ sejajar dengan vektor $\bar{a}$. Maka dari itu bidang oskulasi kurva C pada titik karakteristik identik dengan bidang (17). Maka kita peroleh teorema :

Suatu keluarga tak berhingga banyak bidang-bidang yang tidak semuanya sejajar, mempunyai selubung berupa silinder, kerucut atau luasan singgung yang dapat dihamparkan. Selubung ini dibentuk oleh garis-garis karakteristik dari bidang-bidang itu, pada kerucut semua garis itu melalui sebuah titik karakteristik dan pada luasan singgung yang dapat dihamparkan, semua garis itu menyinggung tempat kedudukan titik-titik karakteristik.

Tempat kedudukan titik-titik karakteristik ini disebut garis balik. Pada kerucut, garis balik ini berupa sebuah titik.

Silinder, kerucut dan luasan singgung yang dapat dihamparkan merupakan jenis-jenis luasan yang dapat dihamparkan.

Karena garis pelukis - garis pelukis yang berurutan dari luasan yang dapat dihamparkan sebidang, maka bidang yang memuat garis pelukis pertama dan kedua dapat direbahkan sehingga berimpit dengan bidang yang memuat garis pelukis kedua dan ketiga. Kemudian kedua bidang bersamaan itu dapat direbahkan hingga berimpit dengan bidang yang memuat garis pelukis ketiga dan keempat, demikian seterusnya. Dengan cara ini seluruh luasan dapat dihamparkan menjadi sebuah bidang.

Sebaliknya kita dapat membuat suatu luasan yang dapat dihamparkan dengan melenturkan sebuah bidang tanpa dang itu tidak berubah. Ini dapat diperlihatkan oleh se - lembar kertas yang digulung mengelilingi sebuah silinder, dapat pula oleh selembar kertas berbentuk juring lingkaran yang dilekukan mengelilingi sebuah kerucut dengan jari jari lingkaran sebagai garis pelukis kerucut.

Luasan yang dapat dihamparkan terbentuk oleh garis garis lurus, tapi tidak semua luasan yang dibentuk oleh garis-garis lurus dapat dihamparkan. Luasan yang dapat dibentuk oleh garis-garis lurus disebut luasan atur.

II.4. BENTUK FUNDAMENTAL KEDUA.

Pandang suatu kurva C melalui sebuah titik A pada luasan

$\overline{r} = \overline{r}\,(s)$

dengan

$\frac{d\overline{r}}{ds} = \overline{t}$ vektor singgung satuan. Vektor

$$\overline{k} = \frac{d\overline{t}}{ds} = \kappa\,\overline{n}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

menyatakan laju perubahan vektor singgung satuan $\overline{t}$ sepanjang kurva C. $\overline{k}$ disebut vektor kelengkungan dan κ disebut kelengkungan. Vektor kelengkungan

$\overline{k}_n = \kappa_n\,\overline{N}$

disebut vektor kelengkungan normal dengan κ_n kelengkungan normal dan $\overline{N}$ normal satuan ke luasan.

Dengan mendifferensialkan persamaan $\overline{t}.\overline{N} = 0$ sepanjang kurva C kita memperoleh

$\frac{d\overline{t}}{ds}.\,\overline{N} + t.\,\frac{d\overline{N}}{ds} = 0$

atau

$$\kappa_n = - \frac{d\bar{r}.\ d\bar{N}}{d\bar{r}.\ d\bar{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

$\bar{N}$ dan $\bar{r}$ merupakan fungsi dari parameter u dan v. Dengan bantuan persamaan

$$d\bar{N} = \bar{N}_u\ du + \bar{N}_v\ dv, \qquad d\bar{r} = \bar{r}_u\ du + \bar{r}_v\ dv. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

κ_n dapat kita tulis sebagai berikut

$$\kappa_n = - \frac{(\bar{r}_u\ du + \bar{r}_v\ dv).(\bar{N}_u\ du + \bar{N}_v\ dv)}{E\ du^2 + 2F\ du\ dv + G\ dv^2}$$

$$= - \frac{\bar{r}_u.\bar{N}_u\ du^2 + (\bar{r}_u.\bar{N}_v + \bar{r}_v.\bar{N}_u)\ du\ dv + \bar{r}_v.\bar{N}_v\ dv^2}{E\ du^2 + 2F\ du\ dv + G\ dv^2}$$

atau

$$\kappa_n = \frac{L\ du^2 + 2M\ du\ dv + N\ dv^2}{E\ du^2 + 2F\ du\ dv + G\ dv^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

dengan

$$L = - \bar{r}_u.\bar{N}_u, \qquad 2M = -(\bar{r}_u.\bar{N}_v + \bar{r}_v.\bar{N}_u), \qquad N = - \bar{r}_v.\bar{N}_v. \quad (25)$$

fungsi dari parameter u,v.

E, F, G bergantung pada derivatif pertama $\bar{r}$ terhadap u dan v, karena itu

$$E\ du^2 + 2F\ du\ dv + G\ dv^2$$

disebut bentuk fundamental pertama, sedangkan bentuk

$$L\ du^2 + 2M\ du\ dv + N\ dv^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

disebut bentuk fundamental kedua karena, bila

$$\bar{r}_u.\bar{N} = 0, \qquad \bar{r}_v.\bar{N} = 0$$

kita differensialkan berturut-turut terhadap u,v maka

$$\overline{r}_{uu}.\overline{N} + \overline{r}_u.\overline{N}_u = 0, \qquad \overline{r}_{vu}.\overline{N} + \overline{r}_v.\overline{N}_u = 0,$$

$$\overline{r}_{uv}.\overline{N} + \overline{r}_u.\overline{N}_v = 0, \qquad \overline{r}_{vv}.\overline{N} + \overline{r}_v.\overline{N}_v = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Jadi L,M dan N dapat ditulis dengan

$$L = \overline{r}_{uu}.\overline{N}, \qquad M = \overline{r}_{uv}.\overline{N}, \qquad N = \overline{r}_{vv}.\overline{N} \; . \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Yang berarti L,M dan N bergantung pada derivatif kedua $\overline{r}$ terhadap u dan v.

Dari persamaan (27) tampak bahwa

$$\overline{r}_u.\overline{N}_v = \overline{r}_v.\overline{N}_u.$$

Jadi

$$L = -\,\overline{r}_u.\overline{N}_u, \qquad M = -\,\overline{r}_u.\overline{N}_v = -\,\overline{r}_v.\overline{N}_u, \qquad N = -\,\overline{r}_v.\overline{N}_v. \quad (29)$$

Jika $\kappa_n = 0$, maka

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Jadi kita mendapat dua jurusan garis pada luasan. Ini terjadi bilamana terdapat garis lurus pada luasan. Jurusan yang memenuhi persamaan (30) disebut jurusan asymtotik dan kurva yang mempunyai jurusan ini disebut kurva asymtotik.

II.5. KELENGKUNGAN GAUSS.

Sekarang kita mencari jurusan di suatu titik dengan kelengkungan normal maksimum atau minimum. Bila R jari-jari kelengkungan normal maka

$$\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

dengan mengambil $t = dv/du$ maka persamaan menjadi

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2M\ t + N\ t^2}{E + 2F\ t + G\ t^2} \ . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Bila koeffisien kedua bentuk kwadrat itu sebanding, maka R sama untuk semua nilai t. R tak berhingga untuk bidang dan R konstan untuk luasan bola. Untuk luasan yang lain R merupakan fungsi t. Akan kita cari nilai-nilai t untuk R maksimum dan R minimum. Nilai ekstreem R kita peroleh dengan mendifferensialkan persamaan terakhir terhadap t dan kemudian menyamakannya dengan nol. Maka

$$(M+Nt)(E+2Ft+Gt^2) - (F+Gt)(L+2Mt+Nt^2) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Jadi kita peroleh persamaan kwadrat

$$(FN-GM)t^2 + (EN-GL)t + (EM-FL) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Diskriminan paersamaan ini dapat dinyatakan oleh

$$(EN-GL)^2-4(FN-GM)(EM-FL) = 4\frac{H^2}{E^2}(EM-FL)^2+\left\{EN-GL-\frac{2F}{E}(EM-FL)\right\}^2$$

Bila luasan riil, parameternya juga riil. $E > 0$, tampak bahwa ruas kanan persamaan diatas positif. Jadi persamaan kwadrat (33) mempunyai dua akar riil yang berbeda.

Bila kita gunakan syarat (10) untuk kedua jurusan itu ternyata

$$ER - 2\ FQ + GP = 0.$$

Berarti kedua jurusan di titik-titik yang ditentukan oleh akar-akar persamaan (33) tegaklurus satu sama lain. Jadi

Dua buah jurusan berturut-turut dengan jari-jari kelengkungan maksimum dan minimum di suatu titik pada luasan membentuk sudut siku-siku.

Nilai-nilai limit dari R ini disebut jari-jari utama dari kelengkungan normal. Nilai-nilai R itu sama -

untuk bidang dan luasan bola. Untuk luasan riil yang lain nilai-nilai R ini dapat dicari dari persamaan (32) dan - (31) sebagai berikut

$$\frac{1}{R} = \frac{M + Nt}{F + Gt}$$

$$\frac{(L + 2M\ t + N\ t^2) - t(M + Nt)}{(E + 2F\ t + G\ t^2) - t(F + Gt)} = \frac{M + Nt}{F + Gt}$$

Jadi

$$\frac{1}{R} = \frac{L + Mt}{E + Ft} = \frac{M + Nt}{F + Gt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

atau dalam bentuk lain

$$(E + Ft) - R(L + Mt) = 0,$$

$$(F + Gt) - R(M + Nt) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Dengan mengeliminasi R kita mendapat persamaan

$$(E + Ft)(M + Nt) - (F + Gt)(L + Mt) = 0.$$

Yang dalam bentuk persamaan kwadrat ditulis

$$(FN-GM)t^2 + (EN-GL)t + (EN-FL) = 0$$

yang tidak lain adalah persamaan (33). Persamaan ini di - sebut persamaan garis kelengkungan. Dan dalam bentuk de - terminan adalah

$$\begin{vmatrix} E + Ft & F + Gt \\ L + Mt & M + Nt \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Persamaan (35) dapat juga ditulis

$$(E - RL) + (F - RM)t = 0,$$

$$(F - RM) + (G - RN)t = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Dengan mengeliminasi t dari persamaan ini kita mendapat persamaan kwadrat dalam R

$$(LN - M^2)R^2 + (2FM - GL - EN)R + (EG - F^2) = 0$$

$$(LN - M^2)R^2 - (GL + EN - 2FM)R + H^2 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Jika R_1 dan R_2 adalah akar-akar persamaan maka

$$R_1 + R_2 = \frac{GL + EN - 2FM}{LN - M^2}$$

$$R_1 \, R_2 = \frac{H^2}{LN - M^2}$$

Jika κ_1, κ_2 kelengkungan normal dengan jari-jari kelengkungan berturut-turut R_1, R_2. Maka kelengkungan rata-rata

$$M = \tfrac{1}{2}\,(\kappa_1 + \kappa_2) = \tfrac{1}{2}\,\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{R_1 + R_2}{R_1 \, R_2} = \frac{GL + EN - 2FM}{2H^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

dan kelengkungan total

$$K = \kappa_1 \, \kappa_2 = \frac{1}{R_1}\,\frac{1}{R_2}$$

$$= \frac{1}{R_1 \, R_2} = \frac{LN - M^2}{H^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

atau

$$K = \frac{T^2}{H^2}, \qquad \text{dengan } T^2 = LN - M^2.$$

K disebut juga kelengkungan Gauss.

Sekarang akan kami buktikan bahwa syarat cukup dan perlu bahwa suatu luasan dapat dihamparkan ialah kelengkungan Gauss sama dengan nol.

Bukti :

Untuk suatu luasan singgung yang dapat dihamparkan

$\overline{R}_s = \overline{t} + v\kappa\overline{n},$

$\overline{R}_v = \overline{t},$

$E = 1 + v^2\kappa^2, \quad F = 1, \quad G = 1, \quad H = v\kappa.$

$\overline{N} = \dfrac{-v\kappa\overline{b}}{v\kappa} = -\overline{b}.$

$\overline{R}_{ss} = \kappa\overline{n} + v\kappa(\tau\overline{b} - \kappa\overline{t}),$

$\overline{R}_{sv} = \kappa\overline{n},$

$\overline{R}_{vv} = 0,$

$L = -v\kappa\tau, \quad M = 0, \quad N = 0,$

Tampak bahwa $LN - M^2 = 0$.

Garis asymtotik didapat dari penyelesaian $L\,ds^2 = 0$, jadi terdapat garis-garis lurus pada luasan. Garis kelengkungan didapat dari penyelesaian

$$\begin{vmatrix} E + t & L \\ 1 + t & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$L\,(1 + t) = 0$

$ds + dv = 0$

$s + v = c, \qquad c = \text{konstanta}.$

Jadi terdapat garis-garis lurus dan kurva $s + v = c$, yakni involute dari garis balik.

Bila $\overline{r}\,(s)$ diganti suatu vektor konstan $\overline{a}$, maka persamaan diatas menjadi

$\overline{R} = \overline{a} + v\,\overline{t}\,(s),$

kerucut dengan titik puncak $\overline{a}$.

$\overline{R}_s = v\kappa\overline{n},$

$\overline{R}_v = \overline{t},$

$E = v^2\kappa^2, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad H = v\kappa,$

$\overline{N} = \dfrac{-v\kappa\overline{b}}{v\kappa} = -\overline{b}.$

$\overline{R}_{ss} = v\kappa(\tau\overline{b} - \kappa\overline{t}),$

$\overline{R}_{sv} = \kappa\overline{n},$

$\overline{R}_{vv} = 0,$

$L = -v\kappa\tau, \quad M = 0, \quad N = 0,$

Jadi $LN - M^2 = 0.$

Suatu silinder dinyatakan dengan persamaan

$\overline{R} = \overline{r}(s) + v\,\overline{a}$

dengan $\overline{a}$ vektor konstan.

$\overline{R}_s = \overline{t},$

$\overline{R}_v = \overline{a},$

$E = 1, \quad F = \overline{t}.\overline{a}, \quad G = \overline{a}.\overline{a}, \quad H = \sqrt{\overline{a}.\overline{a} - \overline{t}.\overline{a}}$

$\overline{N} = \dfrac{\overline{t} \times \overline{a}}{\sqrt{\overline{a}.\overline{a} - \overline{t}.\overline{a}}},$

$\overline{R}_{ss} = \kappa\overline{n},$

$\overline{R}_{sv} = 0,$

$\overline{R}_{vv} = 0,$

$L = \kappa\,\overline{n}.\overline{N}, \quad M = 0, \quad N = 0,$

Jadi $LN - M^2 = 0$. Berarti $K = 0$.

Sekarang kita buktikan bahwa $LN - M^2 = 0$ adalah syarat cukup agar suatu luasan dapat dihamparkan. Yaitu dengan menggunakan identitas :

$$LN - M^2 = (\overline{r}_u.\overline{N}_u)(\overline{r}_v.\overline{N}_v) - (\overline{r}_u.\overline{N}_v)(\overline{r}_v.\overline{N}_u)$$

$$= (\overline{r}_u \times \overline{r}_v).(\overline{N}_u \times \overline{N}_v)$$

$$= (\overline{N}, \overline{N}_u, \overline{N}_v)\, H$$

Tampak bahwa bila $LN - M^2 = 0$, maka $(\overline{N},\overline{N}_u,\overline{N}_v) = 0$.

Ada dua alternatif

1. $\overline{N}_u = 0$ atau $\overline{N}_v = 0$.

2. N_u dan N_v sa.u garis lurus.

Bila $\overline{N}_u = 0$ atau $\overline{N}_v = 0$ berarti $\overline{N}$ hanya tergantung pada satu parameter dan luasan merupakan selubung dari keluarga tak berhingga banyak bidang-bidang, jadi dapat dihamparkan. Bila $\overline{N}_u$ segaris dengan $\overline{N}_v$. Ambil persamaan garis asymtotik yang memenuhi $LN - M^2 = 0$, jadi

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = (\sqrt{L}\,du + \sqrt{N}\,dv)^2 = 0.$$

Bila v = konstan, maka $L = M = 0$ atau

$$\overline{r}_u.\overline{N}_u = \overline{r}_v.\overline{N}_u = 0$$

Jadi $\overline{N}_u = 0$, berarti kita kembali ke masalah 1.

Jadi teorema terbukti, karena kelengkungan Gauss

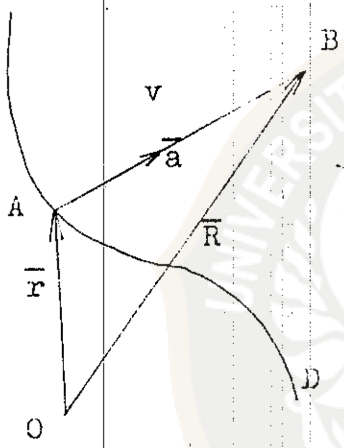
$$K = \frac{LN - M^2}{H^2}$$

Syarat perlu dan cukup bahwa suatu luasan dapat dihamparkan ialah kelengkungan Gauss sama dengan nol.

II.6. LUASAN ATUR.

Luasan atur yaitu luasan yang dapat dibentuk oleh gerakan sebuah garis lurus dalam ruang. Garis lurus - garis lurus yang membentuk luasan atur disebut garis pelukis. Pada luasan atur yang dapat dihamparkan, garis - garis itu menyinggung sebuah kurva. Umumnya luasan atur tak dapat dihamparkan dan disebut skew-surface atau - scroll.

kis riil ditentukan oleh sebuah kurva dan arah garis pelukis di titik potongnya dengan kurva tersebut. Kurva ini disebut garis lengkung arah, sedangkan kerucut yang terbentuk bila melalui sebuah titik kita tarik garis-garis sejajar dengan garis-garis pelukis disebut kerucut director.



Gambar 5

Pandang suatu titik A pada garis lengkung arah D dan $\bar{r}$ adalah vektor letak titik A, $\bar{a}$ vektor satuan yang menyatakan arah garis pelukis yang melalui A. $\bar{r}$ dan $\bar{a}$ merupakan fungsi dari panjang busur s yang diukur dari sebuah titik tetap pada kurva. Suatu titik B pada luasan atur ditentukan oleh persamaan

$$\bar{R} = \bar{r} + v\,\bar{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

dengan $\bar{R}$ vektor letak titik B dan v jarak AB, s,v parameter.

II.6.1. GARIS TEGAKLURUS BERSAMA DUA GARIS PELUKIS YANG BERURUTAN.

Dua garis lurus yang tidak sejajar mempunyai sebuah garis tegaklurus bersama. Dengan meniadakan luasan atur dengan garis pelukis-garis pelukis sejajar yaitu silinder, pandang dua garis pelukis yang berdekatan dari luasan atur. Kedua garis pelukis itu melalui garis lengkung arah D berturut-turut dengan arah $\bar{a}$, $\bar{a}+d\bar{a}$. Jika $\bar{u}$ -

kedua garis pelukis, maka vektor $\bar{u}$ tegaklurus ke $\bar{a}$ dan $\bar{a}+d\bar{a}$. Jadi

$\bar{u}.\bar{a} = 0, \qquad \bar{u}.(\bar{a}+d\bar{a}) = 0.$

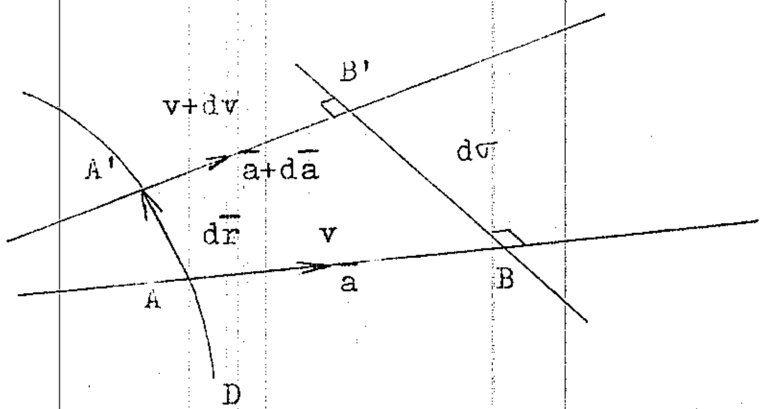
Untuk $ds \to 0$, maka

$\bar{u}.\bar{a}' = 0, \qquad \bar{a}' = \frac{d\bar{a}}{ds}$

Jadi $\bar{u}$ sejajar dengan vektor $\bar{a}' \times \bar{a}$. $\bar{a}$ adalah vektor sa - tuan dan jika $\bar{a}'.\bar{a}' = p^2$, maka vektor satuan garis tegaklurus bersama dua garis pelukis yang berurutan ialah

$$\bar{u} = \frac{\bar{a}' \times \bar{a}}{p}. \qquad (42)$$

Sekarang kita cari panjang garis tegaklurus bersama itu. Misal garis pelukis-garis pelukis itu melalui garis lengkung arah D di titik $A(\bar{r})$ dan $A'(\bar{r}+d\bar{r})$, BB' seg - men garis tegaklurus bersama kedua garis pelukis yang - berdekatan.



Gambar 6

Bila AB = v, A'B' = v+dv dan BB' = $d\sigma$,

$d\bar{r} + (v+dv)(\bar{a}+d\bar{a}) - d\sigma\,\bar{u} - v\,\bar{a} = 0$

Untuk $ds \to 0$, maka

$\bar{r}' + v\,\bar{a}' + v'\,\bar{a} - \bar{u}\,\sigma' = 0$

Karena $\bar{u}$ tegaklurus $\bar{a}$ dan tegaklurus $\bar{a}'$, maka

$$\bar{r}'.\bar{u} + v\bar{a}'.\bar{u} + v'\bar{a}.\bar{u} - \bar{u}.\bar{u}\,\sigma' = 0$$

$$\bar{r}'.\bar{u} + 0 + 0 - \sigma' = 0$$

Jadi

$$\sigma' = \bar{r}'.\bar{u} = \bar{r}'.\ \frac{\bar{a}' \times \bar{a}}{p}$$

$$\sigma' = \frac{[\bar{r}', \bar{a}', \bar{a}]}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

Bila $D = [\bar{r}', \bar{a}', \bar{a}]$ maka

$$\sigma' = \frac{D}{p}, \qquad \text{atau } d\sigma = \frac{D}{p}\,ds. \ \ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

II.6.2. GARIS PENGIKAT.

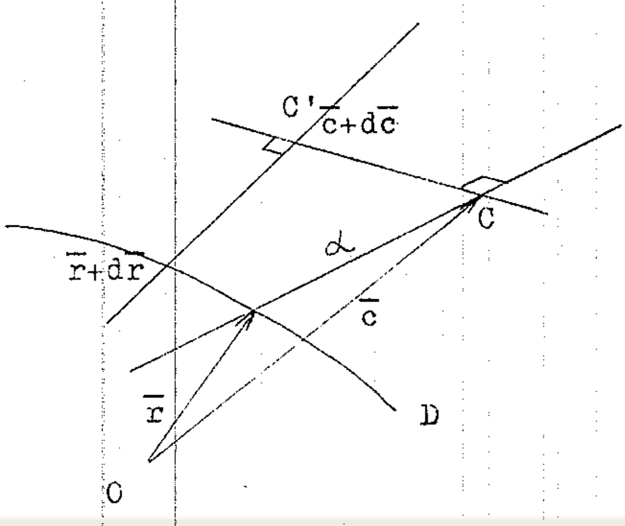
Pandang luasan atur dengan garis lengkung arah D, $\bar{r}$ dan $\bar{r}+d\bar{r}$ dua titik yang berdekatan, berturut-turut de - ngan arah $\bar{a}$ dan $\bar{a}+d\bar{a}$. C dan C' titik kaki garis tegaklu - rus bersama ke kedua garis pelukis, berturut-turut dengan vektor letak $\bar{c}$ dan $\bar{c}+d\bar{c}$.

Jadi

$$d\bar{c}.\bar{a} = 0, \qquad d\bar{c}.(\bar{a}+d\bar{a}) = 0$$

Untuk $ds \to 0$, maka

$$\bar{c}'.\bar{a} = 0, \qquad \bar{c}'.\bar{a}' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$



Titik C dapat dinyatakan dengan persamaan

$$\bar{c} = \bar{r} + \alpha\,\bar{a}, \ \ldots\ldots (46)$$

Gambar 7

dengan α jarak titik C ke garis lengkung arah D. Jika - persamaan (46) kita differensialkan terhadap s, maka kita

$$(\bar{r}' + \alpha' \bar{a} + \alpha \bar{a}').\bar{a}' = 0$$

$$\bar{r}'.\bar{a}' + \alpha' \bar{a}.\bar{a}' + \alpha \bar{a}'.\bar{a}' = 0$$

$\bar{a}'.\bar{a}' = p^2$ dan bila $\bar{r}'.\bar{a}' = q$. .... (47)

maka $q + p^2 \alpha = 0$, atau

$$\alpha = -\frac{q}{p^2}. \qquad (48)$$

Jarak α ini menentukan titik C pada setiap garis pelukis yaitu titik sentral. Bidang singgung pada titik-titik itu disebut bidang sentral, sedangkan persamaan

$$p^2 \alpha + q = 0. \qquad (49)$$

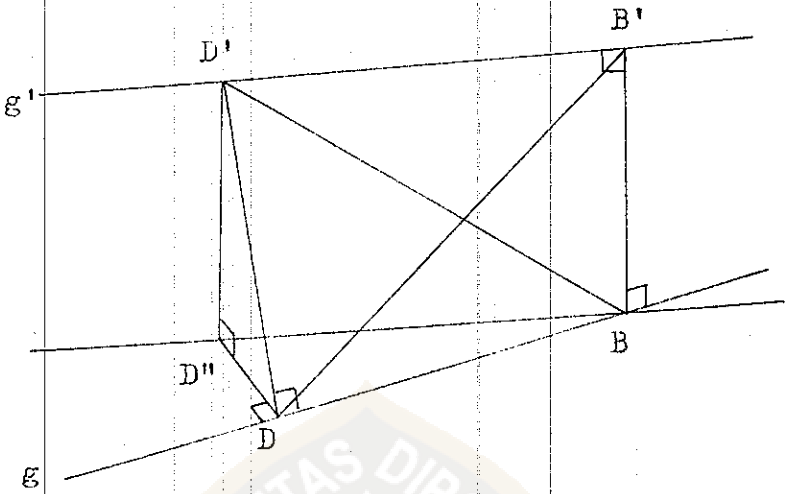
disebut persamaan parameter garis pengikat, yaitu tempat kedudukan titik-titik sentral dari luasan.

II.6.3. PARAMETER DISTRIBUSI.

Bidang singgung ke suatu luasan atur pada suatu titik B harus memuat garis pelukis yang melalui titik B. Pada luasan yang dapat dihamparkan bidang singgung itu menyinggung semua titik pada garis pelukis.

Akan kita lihat bahwa untuk skew-surface, bidang singgung berubah-ubah bila B bergerak sepanjang garis pelukis. Dengan mencari sudut antara bidang singgung pada B dan bidang singgung pada titik sentral C dari garis pelukis yang melalui B, kita tentukan sifat perubahan itu. Bidang singgung pada C disebut bidang sentral.

Pandang garis pelukis g dan g', BB' garis tegaklurus ke kedua garis pelukis. Melalui titik D pada g, gambar bidang normal ke g yang memotong g' di D' dan garis -



Gambar 8

Kedudukan limit bidang BDD' dan bidang B'BD bila g mendekati g' ialah bidang singgung pada titik D dan C kedudukan limit titik B. Sudut antara bidang-bidang ini misal - sudut ϕ' adalah sama dengan sudut DD'D" dan sudut antara garis pelukis g dan g', misal γ adalah sama dengan sudut DBD". Sudut BDD" dan sudut D'D"D siku-siku. Jadi

$$\mathrm{tg}\ \phi' = \frac{D\,D''}{D'D''} = \frac{DB\ \mathrm{tg}\,\gamma}{B'B}$$

Pada kedudukan limit, B adalah titik sentral C, maka kita peroleh

$$\mathrm{tg}\ \phi = \lim\ \mathrm{tg}\ \phi'$$

$$= \frac{(\alpha - u)\ d\gamma}{d\sigma} = \pm\ \frac{(\alpha - u)\ p^2}{D}$$

dengan $d\gamma^2 = \lim d\bar{a}^2 = p^2\ ds^2$.

Biasanya persamaan itu ditulis dalam bentuk

$$\mathrm{tg}\ \phi = \frac{\alpha - u}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Fungsi β yang didefinisikan itu disebut parameter distribusi, yaitu limit dari perbandingan jarak antara dua -

garis pelukis tersebut. Jadi

$$\beta = \frac{D}{p^2} \; . \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Maka kita peroleh teorema :

Tangent sudut antara bidang singgung ke suatu luasan atur pada suatu titik B dengan bidang sentral, seban - ding dengan jarak titik B ke titik sentral.

Jika B bergerak sepanjang suatu garis pelukis dari $-\infty$ sampai ke $+\infty$, ϕ bervariasi dari $-\pi/2$ sampai $+\pi/2$. Jadi bidang singgung pada titik yang tak berhingga jauh tegaklurus ke bidang sentral.

Sekarang akan kami buktikan bahwa syarat perlu dan cukup bahwa luasan atur dapat dihamparkan ialah $\beta = 0$.

Bukti :

Ambil suatu luasan atur

$$\bar{R} = \bar{r} + v\,\bar{a}, \qquad s,v \text{ parameter}. \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

$$\bar{R}_s = \bar{r}' + v\,\bar{a}',$$

$$\bar{R}_v = \bar{a},$$

$$\bar{N} = \frac{(\bar{r}' + v\,\bar{a}') \times \bar{a}}{H}$$

$$= \frac{\bar{r}' \times \bar{a}' + v\,\bar{a}' \times \bar{a}}{H} \; . \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

$$\bar{R}_{ss} = \bar{r}'' + v\,\bar{a}'',$$

$$\bar{R}_{sv} = \bar{a}',$$

$$\bar{R}_{vv} = 0,$$

$$L = (\bar{r}'' + v\,\bar{a}'').\bar{N},$$

$$M = \bar{a}'.\bar{N}$$

$$= \frac{\bar{a}'.(\bar{r}' \times \bar{a} + v\,\bar{a}' \times \bar{a})}{H}$$

$N = 0$.

Kelengkungan Gauss

$$K = \frac{LN - M^2}{H^2} = - \frac{D^2}{H^4}$$

Suatu luasan dapat dihamparkan bila hanya bila keleng - kungan Gauss sama dengan nol. Jadi disini $D^2 = 0$ atau $D = 0$.

$$\beta = \frac{D}{p^2} ,$$

Jadi suatu luasan dapat dihamparkan bila hanya bila $\beta = 0$ atau

Syarat perlu dan cukup bahwa suatu luasan atur dapat dihamparkan ialah $\beta = 0$.