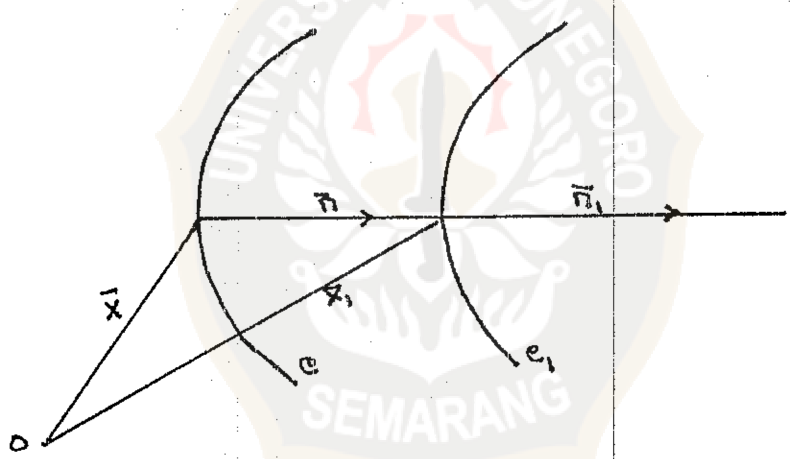
BAB II

PASANGAN GARIS BERTRAND

Definisi garis Bertrand yaitu sepasang garis lengkung C dan C_1 dimana normal utama dari kedua garis lengkung tersebut adalah bersamaan, dengan demikian normal utama dari garis lengkung C dan garis lengkung C_1 dapat diambil searah, ini berarti bahwa $\bar{n} = \bar{n}_1$



Persamaan garis Bertrand dapat dituliskan sebagai berikut

$$\bar{X}_1 = \bar{X} + \lambda \bar{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.1)$$

Dari persamaan diatas dapat diperlihatkan bahwa, jarak antara titik-titik yang berkorespondensi pada dua garis lengkung tersebut adalah konstan.

Kalau persamaan (1.1) didiferensialkan terhadap s kemudian dengan menggunakan rumus Serret dan Frenet, maka

$$\bar{X}_1' = \bar{X}' + \lambda' \bar{n} + \lambda \bar{n}'$$

$$\bar{t}_1 \frac{ds_1}{ds} = \bar{t} + \lambda' \bar{n} + \lambda(\tau \bar{b} - k \bar{t})$$

$$= (1 - \lambda k)\bar{t} + \lambda' \bar{n} + \lambda \tau \bar{b} \ ..(1.2)$$

Oleh karena garis singgung $\bar{t}_1$ tegak lurus pada normal utama disuatu titik pada garis lengkung tersebut , maka

$$\bar{n} \cdot \bar{t}_1 \frac{ds_1}{ds} = (1 - \lambda k)\, \bar{n} \cdot \bar{t} + \lambda' \bar{n} \cdot \bar{n} + \lambda \tau\, \bar{n} \cdot \bar{b}$$

sehingga didapat $\lambda' = 0$ atau λ = konstan , maka ter - buktilah bahwa jarak antara titik-titik yang sesuai adalah konstan.

Selanjutnya kita buktikan bahwa sudut antara garis-garis singgung yang berkorespondensi pada dua garis lengkung tersebut adalah konstan.

$$\bar{t}_1 \cdot \bar{t} = \text{Cos } \emptyset \quad (\text{ konstan }) \quad ....(1.3)$$

Jika didiferensialkan terhadap s, maka akan diperoleh :

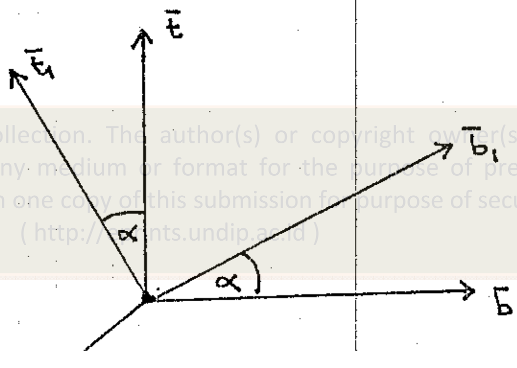
$$\bar{t}_1' \cdot \bar{t} + \bar{t}_1 \cdot \bar{t}' = - \text{Sin } \emptyset \cdot \emptyset'$$

$$k_1 \, \bar{n}_1 \cdot \bar{t} \, \frac{ds_1}{ds} + k \, \bar{n} \cdot \bar{t}_1 = - \text{Sin } \emptyset \cdot \emptyset \quad ......(1.4)$$

Oleh karena normal utama tegak lurus pada garis singgung garis singgung dari kedua garis lengkung tersebut, ini berarti bahwa $\bar{n}_1 \cdot \bar{t} = 0$ dan $\bar{n} \cdot \bar{t}_1 = 0$, dengan demikian kita dapatkan :

$- \text{Sin } \emptyset \cdot \emptyset' = 0$ atau $\emptyset' = 0$, sehingga kita peroleh $\emptyset$ = konstan, akibatnya Cos $\emptyset$ = 0 , $\bar{t}_1 . \bar{t}$ = konst. jadi dapat disimpulkan bahwa garis singgung garis singgung pada dua garis lengkung diatas membuat sudut konstan pada titik-titik yang berkorespondensi, misalkan

Oleh karena normal utama dari dua garis lengkung adalah bersamaan, maka binormal-binormal dari dua garis lengkung tersebut membuat sudut yang sama pula yaitu α , jadi sudut α diukur dari $\bar{b}_1$ ke $\bar{b}$ dan dari $\bar{t}_1$ ke $\bar{t}$.



Dari perhitungan diatas $\lambda' = 0$, maka persamaan (1.2) menjadi :

$$\bar{t}_1 \frac{ds_1}{ds} = (1 - \lambda k)\,\bar{t} + \lambda \tau \bar{b} \quad \ldots\ldots\ldots (1.5)$$

Kalau kedua ruas dari persamaan (1.5) kita kalikan dengan skalar $\bar{b}_1$ dan dengan memperhatikan diagram diatas didapat

$$\bar{b}_1 \cdot \bar{t} \frac{ds_1}{ds} = (1 - \lambda k)\,\bar{b}_1 \cdot \bar{t} + \lambda \tau \bar{b}_1 \cdot \bar{b}$$

$$0 = (1 - \lambda k) \operatorname{Sin} \alpha + \lambda \tau \operatorname{Cos} \alpha$$

$$\tau = \frac{(\lambda k - 1)}{\lambda} \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha} = \frac{(\lambda k - 1)}{\lambda} \operatorname{tg} \alpha . (1.6)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa sumbu-sumbu untuk garis lengkung C dan untuk garis lengkung C_1 terdapat hubungan antara kelengkungan dan torsi.

Kita perhatikan diagram diatas, maka dapat kita nyatakan bahwa :

$$\bar{t}_1 = \bar{t} \operatorname{Cos} \alpha - \bar{b} \operatorname{Sin} \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.7)$$

Dengan menyamakan persamaan (1.5) dengan (1.7) maka didapat hubungan bahwa :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} \alpha &= (1 - \lambda k) \frac{ds}{ds_1} \\ \operatorname{Sin} \alpha &= - \lambda \tau \frac{ds}{ds_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.8)$$

Oleh karena relasi antara garis lengkung C dan garis lengkung C_1 merupakan relasi timbal balik (reciprocal) maka titik $\bar{X}$ sepanjang normal di $\bar{X}_1$ mempunyai jarak $(- \lambda)$ dan $\bar{t}$ membuat sudut $(- \alpha)$ terhadap $\bar{t}_1$, oleh karena berkorespondensi dengan persamaan (1.8) maka didapat :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} (- \alpha) &= \operatorname{Cos} \alpha = (1 + \lambda k_1) \frac{ds_1}{ds} \\ \operatorname{Sin} (- \alpha) &= - \operatorname{Sin} \alpha = \lambda \tau \frac{ds_1}{\ldots} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1.9)$$

Dengan perkalian yang sesuai dari (1.8) dan (1.9) , maka diperoleh relasi sebagai berikut :

$$\mathrm{Cos}^2 \alpha = (1 - \lambda k)(1 + \lambda k_1) \frac{ds}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds}$$

$$= (1 - \lambda k)(1 + \lambda k_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.10)$$

Demikian pula untuk :

$$\mathrm{Sin}^2 \alpha = (- \lambda\tau)(- \lambda\tau_1) \frac{ds}{ds_1} \quad \frac{ds_1}{ds}$$

$$= \lambda^2 \tau\tau_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.11)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa :

1. Jika P dan P_1 adalah titik-titik yang berkorespondensi pada sepasang garis Bertrand dan O , O_1 adalah pusat-pusat kelengkungan, maka perpotongan dalam ruang (POP_1O_1) adalah konstan.
   Teorema ini dinyatakan oleh Mannhein , sehingga
   $\mathrm{Cos}^2 \alpha = (1 - \lambda k) (1 + \lambda k_1)$
   dinamakan dalil Mannhein .
2. Dua kurva atau sepasang garis bertrand tersebut mempunyai torsi-torsi yang bertanda sama dan perkalian torsi-torsi tersebut adalah konstan.
   Teorema ini dinyatakan oleh Schell, dengan demikian
   $\tau\tau_1 = \dfrac{\mathrm{Sin}^2 \alpha}{\lambda^2}$, dinamakan dalil Schell

II.2 KEJADIAN KHUSUS DARI GARIS BERTRAND

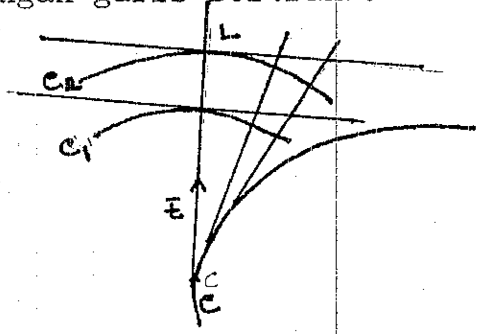
1. Kita perhatikan persamaan (1.6), maka dengan mengambil $\tau \neq 0$, $\alpha \neq 0$ dan $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ garis lengkung yang bersamaan dinamakan pasangan garis Bertrand .

2. Jika $\tau = 0$, setiap kurva mempunyai tak berhingga bentuk Bertrand, disini $\alpha = 0$.
3. Jika $\tau \neq 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ maka kita mempunyai kurva dengan kelengkungan konstan. Tiap-tiap kurva C dan kurva C_1 merupakan tempat kedudukkan pusat - pusat kelengkungan dari kurva yang lain.
4. Jika kelengkungan k = konstan dan torsi τ= konstan pada lingkaran helix, maka membentuk pasangan Bertrand dalam jumlah yang tak terbatas, dimana semua merupakan bentuk lingkaran helix .
5. Jika sebuah kurva C dengan kelengkungan konstan dan sebuah kurva C dengan torsi konstan, yang kemudian berkorespondensi satu-satu, maka garis singgung garis singgung dititik P dan P_1 yang berkorespondensi adalah sejajar, kemudian tempat kedudukkan titik P dan P_1 dengan jarak yang konstan dinamakan garis Bertrand.

CONTOH PASANGAN GARIS BERTRAND

Perlihatkan bahwa dua involuta pada satu bidang kurva membentuk pasangan garis Bertrand.

Penyelesaian :



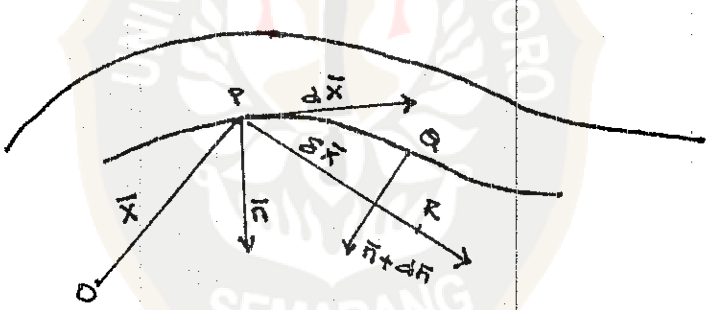
Jika C_1 dan C_2 adalah Involuta-involuta dari bidang kurva C dititik yang berkorespondensi sepanjang garis singgung L dari C . Garis singgung garis singgung di C_1 dan C_2 adalah tegak lurus L , Oleh karena normal utama dari C_1 , C_2

BAB III

PASANGAN GARIS SEKAWAN

III.1 PENGERTIAN JURUSAN SEKAWAN

Ambil titik P dan Q sebagai titik-titik yang berdekatan pada permukaan, sedang $\overline{PR}$ merupakan garis potong dari bidang-bidang singgung yang melalui titik P dan Q . Apabila titik Q mendekati titik P, maka dalam kedudukkan limit, arah $\overline{PQ}$ dan $\overline{PR}$ dinamakan jurusan sekawan dititik P.



Secara analitik bahwa dua jurusan akan sekawan , apabila diambil $\bar{n}$ sebagai normal satuan dititik P dan parameternya u dan v, sedangkan $\bar{n} + d\bar{n}$ merupakan normal satuan dititik Q, dengan parameter u + du dan v + dv , maka vektor singgung $\overline{PQ} = d\,\bar{X} = \bar{X}_u\,du + \bar{X}_v\,dv$ ....(1.1)

Jika R dengan parameter u + u dan v + v mendekati P dan searah dengan garis potong bidang-bidang yang menyinggung dititik P dan Q , maka vektor $\overline{PR}$ yang dinotasikan $\delta\bar{X}$, maka $\overline{PR} = \delta\bar{X} = \bar{X}_u\,\delta u + \bar{X}_v\,\delta v$ ....(1.2)

Oleh karena $\overline{PR}$ sejajar dengan bidang-bidang singgung yang melalui P dan Q, maka $\bar{X}$ tegak lurus pada $\bar{n}$ dan $\bar{n} + d\bar{n}$, sehingga $\overline{PQ}$ dan $\overline{PR}$ merupakan jurusan sekawan di P.

Oleh karena $\delta\bar{X} \perp \bar{n}$ $\Big\}$ maka $\delta\bar{X} \perp d\bar{n}$

Oleh karena $\delta \bar{X} \perp d\bar{n}$, maka berarti bahwa $\delta \bar{X} \cdot d\bar{n} = 0$

Padahal kita tahu bahwa :

$$\left.\begin{aligned} \delta \bar{X} &= \bar{X}_u \; \delta u + \bar{X}_v \; \delta v \\ d\bar{n} &= \bar{n}_u \; du + \bar{n}_v \; dv \end{aligned}\right\}$$

Maka didapat bahwa :

$$(\bar{X}_u \; \delta u + \bar{X}_v \; \delta v) \cdot (\bar{n}_u \; du + \bar{n}_v \; dv) = 0$$

atau

$$\bar{X}_u \cdot \bar{n}_u \, \delta u \, du + \bar{X}_u \cdot \bar{n}_v \, \delta u \, dv + \bar{X}_v \cdot \bar{n}_u \, \delta v \, du + \bar{X}_v \cdot \bar{n}_v \, \delta v \, dv = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.3)$$

Oleh karena normal permukaan tegak lurus pada vektor $\bar{X}_u$ dan vektor $\bar{X}_v$, maka berlaku $\bar{n} \cdot \bar{X}_u = 0$ dan $\bar{n} \cdot \bar{X}_v = 0$

kalau didiferensialkan terhadap u dan v maka diperoleh :

$$\bar{n}_u \cdot \bar{X}_u + \bar{n} \cdot \bar{X}_{uu} = 0 \Longrightarrow \bar{n}_u \cdot \bar{X}_u = -\bar{n} \cdot \bar{X}_{uu} = -L$$

$$\bar{n}_v \cdot \bar{X}_u + \bar{n} \cdot \bar{X}_{uv} = 0 \Longrightarrow \bar{n}_v \cdot \bar{X}_u = -\bar{n} \cdot \bar{X}_{uv} = -M$$

$$\bar{n}_u \cdot \bar{X}_v + \bar{n} \cdot \bar{X}_{uv} = 0 \Longrightarrow \bar{n}_u \cdot \bar{X}_v = -\bar{n} \cdot \bar{X}_{uv} = -M$$

$$\bar{n}_v \cdot \bar{X}_v + \bar{n} \cdot \bar{X}_{vv} = 0 \Longrightarrow \bar{n}_v \cdot \bar{X}_v = -\bar{n} \cdot \bar{X}_{vv} = -N$$

Kalau disubstitusikan pada persamaan (1.3) didapatlah :

$$-L \, \delta u \, du - M \, \delta u \, dv - M \, \delta v \, du - N \, \delta v \, dv = 0$$

$$L \, \delta u \, du + M (\delta u \, dv + \delta v \, du) + N \, \delta v \, dv = 0$$

$$L + M \left(\frac{dv}{du} + \frac{\delta v}{\delta u} \right) + N \frac{dv}{du} \frac{\delta v}{\delta u} = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots(1.4)$$

atau

$$L \frac{\delta u}{\delta v} \frac{du}{dv} + M \left(\frac{\delta u}{\delta v} + \frac{du}{dv} \right) + N = 0 \; \ldots\ldots(1.4')$$

Persamaan (1.4) merupakan syarat perlu dan cukup bahwa jurusan $\delta v / \delta u$ sekawan dengan jurusan dv/du , jadi persamaan (1.4) merupakan syarat adanya dua jurusan sekawan disuatu titik pada permukaan .

Pandang dua arah pada permukaan yang persamaannya atau dapat dituliskan sebagai berikut :

$$P + 2Q \frac{dv}{du} + R \frac{dv^2}{du^2} = 0 \qquad \text{.........(1.5)}$$

Oleh karena persamaan (1.5) merupakan bentuk kwadrat $\frac{dv}{du}$

maka $\left(\frac{dv}{du}\right)_1 + \left(\frac{dv}{du}\right)_2 = - \frac{2Q}{R}$

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_1 \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)_2 = \frac{P}{R}$$

Maka syarat perlu dan cukup bahwa dua jurusan pada permukaan adalah sekawan apabila dipenuhi :

$$LR - 2MQ + NP = 0$$

Jika garis-garis kelengkungan sebagai garis parameter, maka jurusan garis parameter akan sekawan apabila dipenuhi syarat perlu dan cukup yaitu $M = 0$, sedangkan garis kelengkungan pada permukaan memenuhi syarat $M = 0$ dan $F = 0$ ini berarti bahwa jurusannya sekawan ortogonal.

III.2 SISTEM KURVA SEKAWAN

Jika diberikan famili kurva $\phi(u,v)$ = konstan. Jurusan $\frac{\delta u}{\delta v}$ untuk suatu kurva dibeberapa titik diberikan oleh : $\phi_u \delta u + \phi_v \delta v = 0 \Longrightarrow \frac{\delta u}{\delta v} = - \frac{\phi_v}{\phi_u}$

maka jurusan sekawan $\frac{du}{dv}$ dalam syarat (1.4') , menjadi :

$$L\left(-\frac{\phi_v}{\phi_u}\right)\frac{du}{dv} + M\left(-\frac{\phi_v}{\phi_u} + \frac{du}{dv}\right) + N = 0$$

$$\left(L\frac{\phi_v}{\phi_u} - M\right)\frac{du}{dv} + \left(M\frac{\phi_v}{\phi_u} - N\right) = 0$$

$$(L\phi_v - M\phi_u)\,du + (M\phi_v - N\phi_u)\,dv = 0 \qquad \text{....(2.1)}$$

Persamaan (2.1) dinamakan persamaan diferensial kurva ψ (u,v) = konstan. Dengan demikian kurva ini dengan kurva ϕ (u,v) = konstan dikatakan membentuk sistem sekawan. Jadi perpotongan dari dua kurva disatu titik pada tiap famili jurusannya adalah sekawan .

Untuk dua famili kurva dinamakan membentuk sistem sekawan, apabila garis singgung pada tiap-tiap famili kurva disemua titik potong mempunyai arah-arah sekawan .

Misalkan diberikan dua famili kurva sebagai berikut : ϕ (u,v) = konstan , ψ (u,v) = konstan. maka dapat ditentukan syarat bahwa keduanya membentuk sekawan. Jurusan dari dua kurva yang melalui suatu titik (u , v) adalah :

$$\phi_u \, \delta u + \phi_v \, \delta v = 0 \Longrightarrow \frac{\delta u}{\delta v} = -\frac{\phi_v}{\phi_u}$$

$$\psi_u \, du + \psi_v \, dv = 0 \Longrightarrow \frac{du}{dv} = -\frac{\psi_v}{\psi_u}$$

Akibatnya jurusan dari dua kurva akan sekawan, apabila :

$$L \frac{\delta u}{\delta v} \frac{du}{dv} + M \left(\frac{\delta u}{\delta v} + \frac{du}{dv} \right) + N = 0$$

$$L \left(-\frac{\phi_v}{\phi_u} \right) \left(-\frac{\psi_v}{\psi_u} \right) + M \left(-\frac{\phi_v}{\phi_u} - \frac{\psi_v}{\psi_u} \right) + N = 0$$

$$L \phi_v \psi_v - M (\phi_v \psi_u + \phi_u \psi_v) + N \phi_u \psi_u = 0 \quad \ldots(2.2)$$

Persamaan (2.2) merupakan syarat perlu dan cukup bahwa dua famili kurva membentuk sistem kurva sekawan.

Secara khusus jika garis-garis parameter dengan v = konstan dan u = konstan merupakan suatu sistem sekawan apabila dipenuhi M = 0 , dengan demikian M = 0 merupakan syarat perlu dan cukup bahwa garis-garis parameter membentuk sistem kurva sekawan.

garis parameter, maka $F = 0$ dan $M = 0$, dengan demikian dapat dikatakan bahwa garis-garis kelengkungan membentuk sistem kurva sekawan yang ortogonal.

Sebaliknya jika suatu sistem dari kurva-kurva yang ada dan diambil sebagai garis-garis parameter, maka $F = 0$ dan $M = 0$ dengan demikian dapat terlihat bahwa garis-garis parameter adalah garis-garis kelengkungan .

Garis-garis kelengkungan yang diambil sebagai garis-garis parameter dan jurusan du/dv dan $\delta u/ \delta v$ adalah inklinasi untuk kurva v = konstan (dv = 0) dan θ , θ' adalah sudut yang dibuat oleh sepasang jurusan sekawan dengan garis singgung kurva, maka

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin} \theta &= \sqrt{G}\ \frac{dv}{ds} \\ \operatorname{Cos} \theta &= \sqrt{E}\ \frac{du}{ds} \end{aligned}\right\}$$

maka $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{G}{E}}\ \frac{dv}{du}$ atau $\frac{dv}{du} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{G/E}}$ ..(2.3)

Begitu pula sekawannya , maka didapatlah :

$$\operatorname{tg} \theta' = \sqrt{\frac{G}{E}}\ \frac{\delta v}{\delta u} \quad \text{atau} \quad \frac{\delta v}{\delta u} = \frac{\operatorname{tg} \theta'}{\sqrt{G/E}} \qquad ..(2.3')$$

Jika persamaan (2.3) dan (2.3') disubstitusikan pada persamaan (1.4) dan dengan mengingat bahwa $M = 0$, maka didapat syarat dua arah sekawan sebagai berikut :

$$L + N \left(\frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{G/E}} \right) . \left(\frac{\operatorname{tg} \theta'}{\sqrt{G/E}} \right) = 0$$

$L\,G + N\,E \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \theta' = 0$, ini berarti bahwa

$$\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \theta' = - \frac{L\,G}{N\,E} = - \frac{k_a}{k_b} \qquad ....(2.4)$$