BAB I

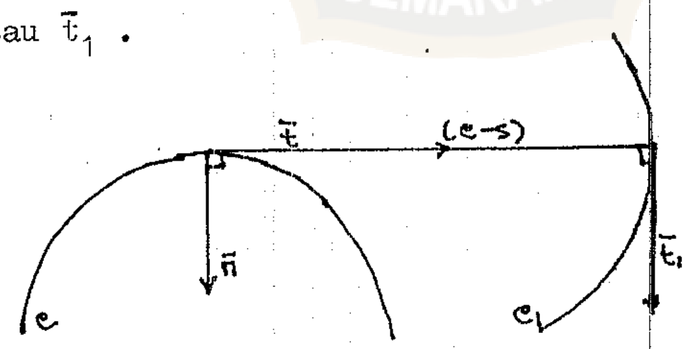
PASANGAN GARIS INVOLUTA DAN EVOLUTA

I.1 DEFINISI INVOLUTA DAN EVOLUTA

Andaikata diketahui sebuah kurva $\vec{X} = \vec{X}(s)$, seperti kita ketahui bahwa himpunan garis-garis singgung kurva tersebut membentuk suatu permukaan yang dinamakan permukaan singgung kurva $\vec{X} = \vec{X}(s)$.

Misalkan satu kurva C_1 yang terletak pada permukaan singgung kurva $\vec{X} = \vec{X}(s)$ dan memotong garis-garis singgung tersebut saling tegak lurus, maka dinamakan Involuta kurva $\vec{X} = \vec{X}(s)$.

Dengan kata lain Involuta adalah sepasang garis lengkung C dan C_1, sedemikian sehingga garis singgung disuatu titik pada C tegak lurus pada garis singgung pada C_1 atau $\vec{t}_1$.



Jika C diberikan sebagai $\vec{X} = \vec{X}(s)$ tadi dan $\vec{X}_1$ adalah satu titik pada Involuta C_1, dimana C_1 memotong garis garis singgung di $\vec{X}(s)$.

Jadi persamaan Involuta dapat ditulis sebagai berikut ;

$$\vec{X}_1 = \vec{X} + \lambda \vec{t} \qquad \text{......................} (1.1)$$

dimana $\lambda = f(s)$.

Vektor singgung Involuta adalah :

$$\bar{X}_1{}' = \bar{X}' + \lambda' \, \bar{t} + \lambda \, \bar{t}'$$

$$\bar{t}_1 \frac{ds_1}{ds} = \bar{t} + \lambda' \, \bar{t} + \lambda k \bar{n}$$

$$= (1 + \lambda') \bar{t} + \lambda k \bar{n}$$

dan tegak lurus vektor singgung $\bar{t}$ pada garis lengkung C,

maka $\quad \bar{t}.\bar{t}_1 \frac{ds_1}{ds} = (1 + \lambda') \bar{t}.\bar{t} + \lambda k \bar{t}.\bar{n}$

$$0 = (1 + \lambda')$$

maka $\lambda' = -1$, sehingga $\lambda = c - s$

Jadi untuk setiap nilai c, terdapatlah persamaan Involuta

$$\bar{X}_1 = \bar{X}(s) + (c-s) \bar{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.2)$$

dimana parameter s pada persamaan (1.2) merupakan panjang busur dari kurva C, dengan demikian maka $\bar{X}_1{}'$ bukan merupakan vektor satuan.

Apabila persamaan (1.2) nilai s diketahui, maka secara lengkap dapat diperoleh Involuta yang kita maksud. Jika dua Involuta berkorespondensi untuk nilai-nilai c_1 , c_2 dari C, maka tiap-tiap bagian dari garis singgung antara kurva-kurva mempunyai panjang $c_1 - c_2$, oleh karena itu Involuta membentuk sistem kurva yang sejajar dengan permukaan singgung. dan dari definisi $\bar{t}$ adalah garis singgung dan nilai s diatas, maka suatu Involuta dapat dihasilkan dengan cara yang sama.

Pandang persamaan (1.2) diatas, maka garis singgung Involuta dapat diperoleh sebagai berikut :

$$\bar{t}_1 = (c - s) k \bar{n} \frac{ds}{ds_1}$$

Oleh karena garis singgung Involuta sejajar dengan normal utama kurva yang diberikan, maka dapat diambil $\bar{t}_1 = \bar{n}$,

sehingga diperoleh $\quad \frac{ds_1}{ds} = (c - s) k$

Dengan mendiferensialkan $\bar{t}_1 = \bar{n}$ terhadap s, maka kita dapatkan kelengkungan k_1 dari Involuta, yaitu

$$k_1 = \frac{\sqrt{\tau^2 + k^2}}{(c - s)\, k}$$

Adapun normal utama dan binormal satuan dari Involuta adalah :

$$\bar{n}_1 = \frac{\tau\bar{b} - k\,\bar{t}}{\sqrt{\tau^2 + k^2}} \quad , \quad \bar{b}_1 = \bar{t}_1 x \bar{n}_1 = \frac{\tau\bar{t} + k\,\bar{b}}{\sqrt{\tau^2 + k^2}}$$

Kemudian torsi dari Involuta dapat dihitung, dengan mendiferensialkan $\bar{b}_1$ terhadap s , sehingga didapat :

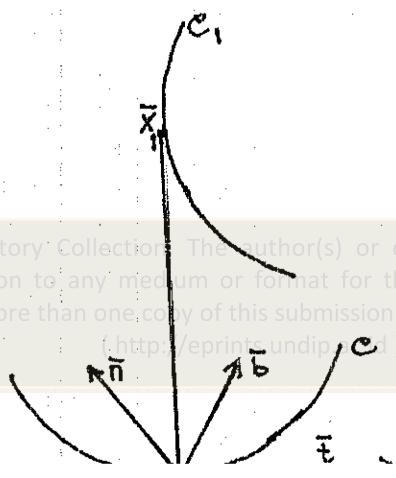
$$\tau_1 = \frac{k\,\tau' - k'\,\tau}{k(c - s)(k^2 + \tau^2)}$$

Persoalan sebaliknya yaitu jika diberikan kurva C atau Involuta dari kurva C_1, dengan demikian maka kurva C_1 dinamakan Evoluta dari kurva C. Jadi Evoluta adalah kurva kurva yang perpotongan garis-garis singgung dengan kurva C saling tegak lurus.

Jika kurva C diberikan dengan $\bar{X} = \bar{X}(s)$ dan jika $\bar{X}_1$ adalah titik pada Evoluta yang sesuai dengan titik $\bar{X}(s)$ pada C, maka persamaan Evoluta dapat dinyatakan sebagai :

$$\bar{X}_1 = \bar{X} + a_1\,\bar{n} + a_2\,\bar{b} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.3)$$

Oleh karena garis singgung pada C_1 tegak lurus pada C, maka titik $\bar{X}_1$ terletak pada bidang normal di titik $\bar{X}$ pada C .



Garis singgung Evoluta di $\overline{X}_1$ sejajar dengan $\overline{X}_1'$, maka dengan mendiferensialkan $\overline{X}_1$ terhadap s dan dengan mengingat rumus Serret dan Frenet maka kita peroleh :

$$\overline{X}_1' = \overline{X}' + a_1'\,\overline{n} + a_1\,\overline{n}' + a_2'\,\overline{b} + a_2\,\overline{b}'$$

$$\overline{t}_1 \frac{ds_1}{ds} = \overline{t} + a_1'\,\overline{n} + a_1 (\tau \overline{b} - k\,\overline{t}) + a_2'\,\overline{b} - a_2\,\tau\,\overline{n}$$

$$= (1 - a_1 k)\,\overline{t} + (a_1' - a_2 \tau)\,\overline{n} + (a_1\tau + a_2')\,\overline{b} \qquad \text{.............................(1.4)}$$

Oleh karena garis singgung pada C_1 tegak lurus garis singgung pada C, maka diperoleh bahwa $(1 - a_1 k) = 0$, sehingga didapatlah $a_1 = 1/k = \rho$ dan $a_1' = \frac{-1}{k^2} = \rho'$

Oleh karena $(1 - a_1 k) = 0$, maka persamaan (1.4) menjadi

$$\overline{t}_1 \frac{ds_1}{ds} = (a_1' - a_2\tau)\,\overline{n} + (a_1\tau + a_2')\,\overline{b}$$

$$\overline{t}_1 \cdot \overline{t} = 0 \quad ========\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \overline{t}_1 \perp \overline{t} \\ (a_1\,\overline{n} + a_2\,\overline{b}) \perp \overline{t} \end{array}\right\} \text{ sebanding}$$

maka diperoleh bahwa,

$$\frac{a_1' - a_2\tau}{a_1} = \frac{a_1\tau + a_2'}{a_2}$$

$$a_1' a_2 - a_2^2 \tau = a_1^2 \tau + a_1 a_2'$$

$$\rho' a_2 - a_2^2 \tau = \rho^2 \tau + \rho\, a_2'$$

$$\rho' a_2 - \rho\, a_2' = \tau (\rho^2 + a_2^2)$$

$$\tau = \frac{\rho' a_2 - \rho\, a_2'}{\rho^2 + a_2^2}$$

Jika persamaan tersebut diintegralkan, maka didapatlah

$$\emptyset + c = \int_0^s \tau\, ds$$

$$= \text{arc. tg } (- a_2/\rho)$$

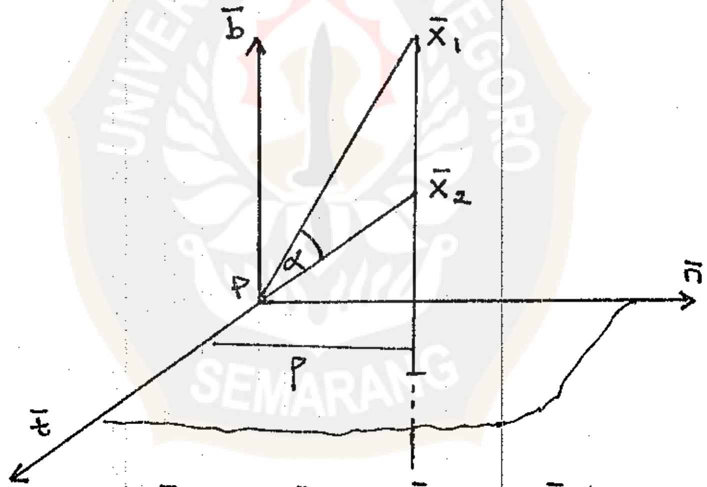
Sehingga $a_2 = - \rho \text{ tg } (\emptyset + c)$

Dengan mensubstitusikan harga- harga dari a_1 dan a_2 pada persamaan (1.3), maka diperoleh persamaan Evoluta ialah

$$\bar{X}_1 = \bar{X} + \rho\,\bar{n} - \rho\,\mathrm{tg}\,(\,\emptyset + c\,)\,\bar{b}$$

$$\bar{X}_1 = \bar{X} + \rho\left\{\bar{n} - \mathrm{tg}\,(\,\emptyset + c\,)\,\bar{b}\right\} \quad ....(1.5\,)$$

Dari persamaan Evoluta tersebut dapat ditarik kesimpulan bahwa sebuah titik Evoluta terletak pada garis yang tegak lurus pada bidang oskulasi kurva C dititik yang sesuai. Begitu pula sudut yang dibuat oleh dua garis - singgung disuatu titik pada kurva C, kedua Evoluta $\bar{X}_1$ dan $\bar{X}_2$ adalah konstan. Hal ini dapat diperlihatkan sebagai - berikut :



$$\mathrm{Cos}\ \alpha = \frac{(\,\bar{X}_1 - \bar{X}\,).(\,\bar{X}_2 - \bar{X}\,)}{|\bar{X}_1 - \bar{X}\,|\,|\,\bar{X}_2 - \bar{X}\,|}$$

Jika Evoluta $\bar{X}_1 = \bar{X} + \rho\left\{\bar{n} - \mathrm{tg}\,(\,\emptyset + c_1\,)\,\bar{b}\right\}$

$$\bar{X}_2 = \bar{X} + \rho\left\{\bar{n} - \mathrm{tg}\,(\,\emptyset + c_2\,)\,\bar{b}\right\}$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstan, maka setelah beberapa perhitungan dapat dituliskan $\mathrm{Cos}\ \alpha = \mathrm{Cos}\,(\,c_1 - c_2\,)$

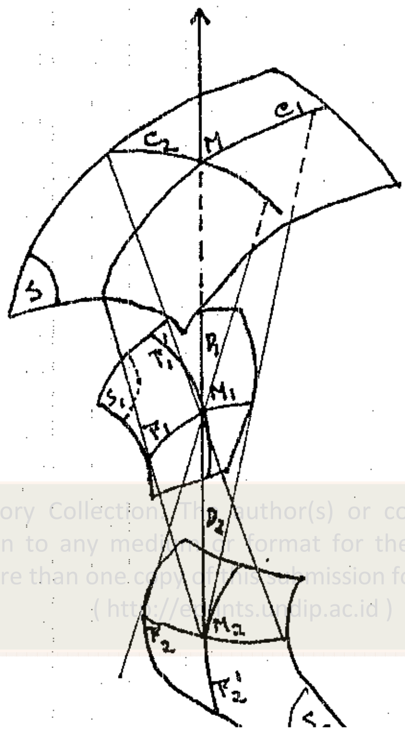
dengan demikian maka terbuktilah bahwa Cos α tidak tergantung pada parameter s kurva C, ini berarti bahwa Cos α adalah suatu konstan, demikian pula α sendiri juga merupakan konstanta.

Sekarang apabila kurva C sebagai Evoluta yang tak terbatas, maka normal-normal kurva C merupakan garis singgung untuk Evoluta yang satunya. Yang mana merupakan perubahan melalui sudut yang sama berkorespondensi dengan bidang normal C, dengan demikian normal-normal yang baru merupakan garis singgung Evoluta yang lain dari C.

Tiap-tiap sistem normal-normal untuk C merupakan garis singgung permukaan yang merupakan garis balik. Oleh karena itu Evoluta C merupakan garis-garis balik dari garis singgung permukaan yang tak terbatas, yang semuanya melewati C .

I.2 INVOLUTA DAN EVOLUTA PADA PERMUKAAN

Disini kita bicarakan Involuta dan Evoluta pada permukaan pusat. Sedang yang dimaksud permukaan pusat adalah tempat kedudukkan pusat-pusat kelengkungan semua titik pada permukaan, namakan S. Disini normal-normal garis kekelengkungan saling berpotongan dan titik potongnya berkorespondensi dengan pusat kelengkungan. Pada umumnya permukaan pusat terdiri dari dua lembar yang berkorespondensi dengan dua famili garis lengkung.



Ambil garis-garis kelengkungan C_1 dan C_2 pada S. Permukaan pusat S yang melalui M, D_1 dan D_2 membentuk permukaan yang dapat dihamparkan dengan normal-normalnya terletak masing-masing pada C_1 dan C_2 . Garis balik D_1 yang dinotasikan dengan Γ_1 merupakan garis kelengkungan pada S_1, sedemikian rupa sehingga S_1 merupakan tempat kedudukkan satu lembar Evoluta dari garis kelengkungan C_1 pada S

Dengan cara yang sama maka S_2 juga merupakan tempat kedudukkan satu lembar Evoluta dari garis kelengkungan C_2 pada S. Oleh karena itu maka S_1 dan S_2 merupakan penyusun Evoluta pada S, dan S sendiri dinamakan Involuta. Jelaslah setiap permukaan yang sejajar dengan S juga dinamakan Involuta dari S_1 dan S_2 .

Garis M_1 M_2 sebagai garis pelukis dari D_1 yang merupakan garis singgung Γ_1 di M_1 dan sebagai garis pelukis D_2 merupakan garis singgung Γ_2 di M_2. Oleh karena itu bersama-sama merupakan garis singgung permukaan S_1 dan S_2 . Akibatnya permukaan hamparan D_1 bertemu dengan S_1 sepanjang Γ_1 dan selubung S_2 sepanjang kurva Γ_2' . Dan garis pelukis ini merupakan garis singgung dari kurva-kurva yang sekawan dengan Γ_2'. Jadi garis pelukis M_1 M_2 merupakan garis singgung Γ_2 dan oleh karena itu jurusan dari Γ_2 dan Γ_2' di M_2 adalah sekawan. Begitu juga untuk permukaan hamparan D_2 .

Maka permukaan pusat dari permukaan S, kurva-kurvanya berkorespondensi dengan garis-garis kelengkungan dari S dan membentuk sistem sekawan. Oleh karena hamparan D_1 dari selubung-selubung S_2, bidang singgung S_2 di M_2 merupakan bidang singgung untuk D_1 dititik yang sesuai, maka bidang singgung di M_2 merupakan garis singgung di D_1 sepanjang M_1 M_2 , dan konsekwensinya dapat ditentukan dari M_1 M_2 adalah garis singgung C_1 di M, oleh karena itu normal-normal S_2 di M_2 sejajar dengan garis singgung untuk C_2 di M , begitu juga normal-normal S_1 di M_1 sejajar dengan garis singgung C_1 di M .

Jadi melalui tiap-tiap normal dari S kita peroleh dua bidang yang saling tegak lurus, yang satu merupakan garis singgung permukaan pusat S_1 dan yang satunya merupakan garis singgung permukaan pusat S_2. Tetapi tiap-tiap bidang ini merupakan garis singgung yang sama dari satu hamparan dan merupakan bidang oskulasi dari garis balik. Oleh karena itu disetiap titik dari satu kurva ini bidang oskulasinya tegak lurus pada bidang singgung dari lembaran Evoluta diatas. Jadi permukaan pusat merupakan selubung bidang normal utama dan disusun oleh Evoluta-Evoluta garis kelengkungan S atau kadang-kadang juga disebut Evoluta S. Evoluta-evoluta garis kelengkungan S juga merupakan garis geodetik permukaan pusat. Kurva Evoluta salah satu lembar berkorespondensi dengan garis kelengkungan S dan merupakan sistem sekawan.

Pandang garis kelengkungan S sebagai garis parameter. Apabila α dan β merupakan jari-jari kelengkungan utama dan $\overline{X}$ merupakan radius vektor dari suatu titik pada kurva S, maka korespondensi titik tersebut pada lembar pertama permukaan pusat adalah :

$$\overline{R} = \overline{X} + \alpha\, \overline{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1)$$

dimana titik tersebut merupakan pusat kelengkungan untuk v = konstan, sehingga $\overline{R}$ dan α adalah konstan untuk turunan terhadap u, maka diperoleh

$$\overline{X}_u + \alpha\, \overline{n}_u = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2)$$

Dengan cara yang sama jika titik tersebut merupakan pusat kelengkungan untuk u = konstan, maka $\bar{R}$ dan β adalah konstan untuk turunan terhadap v, maka diperoleh

$$\bar{X}_v + \beta\,\bar{n}_v = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3)$$

dimana persamaan (2.2) dan (2.3) ekwivalen dengan persamaan Rodrigue's , sehingga didapatlah :

$$\bar{n}_u = -\frac{\bar{X}_u}{\alpha} \quad , \quad \bar{n}_v = -\frac{\bar{X}_v}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.4)$$

Dari persamaan (2.1) jika diturunkan terhadap u dan v didapat :

$$\left.\begin{aligned} \bar{R}_u &= \bar{X}_u + \alpha_u\,\bar{n} + \alpha\,\bar{n}_u \\ \bar{R}_v &= \bar{X}_v + \alpha_v\,\bar{n} + \alpha\,\bar{n}_v \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(2.5)$$

Apabila persamaan (2.4) disubstitusikan pada persamaan (2.5) maka diperoleh :

$$\bar{R}_u = \alpha_u\,\bar{n}$$

$$\bar{R}_v = \frac{\beta\,\bar{X}_v + \beta\,\alpha_v\,\bar{n} - \bar{X}_v\,\alpha}{\beta} = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\bar{X}_v + \alpha_v\,\bar{n} \quad ..(2.6)$$

Dari persamaan (2.6) maka dapat diperoleh besaran fundamental orde partama lembar pertama permukaan pusat :

$$E^* = \bar{R}_u \cdot \bar{R}_u = \alpha_u\,\bar{n} \cdot \alpha_u\,\bar{n} = \alpha_u^{\,2}$$

$$F^* = \bar{R}_u \cdot \bar{R}_v = \alpha_u\,\bar{n} \cdot \left\{\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\bar{X}_v + \alpha_v\,\bar{n}\right\} = \alpha_u\,\alpha_v$$

$$G^* = \bar{R}_v \cdot \bar{R}_v = \left\{\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\bar{X}_v + \alpha_v\,\bar{n}\right\} \cdot \left\{\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\bar{X}_v + \alpha_v\,\bar{n}\right\}$$

$$= \alpha_v^{\,2} + G\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2$$

$$H^{*2} = E^*G^* - F^{*2} = \alpha_u^{\,2}\,G\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2$$

Dengan demikian kwadrat elemen garis lengkung pada lembar pertama permukaan pusat adalah :

$$ds^{*2} = E^*\,du^2 + 2F^*\,du\,dv + G^*\,dv^2$$

$$= \alpha_u^{\,2}\,du^2 + 2\,\alpha_u\,\alpha_v\,du\,dv + \alpha_v^{\,2}\,dv^2 + G\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 dv^2$$

Jadi ds^{*2} merupakan bentuk geodetik, oleh karena kurva v= konstan, maka merupakan garis geodetik pada lembar pertama permukaan pusat. Dan garis tersebut merupakan garis balik dari hamparan-hamparan yang dihasilkan oleh normal-normal sepanjang garis kelengkungan v = konstan pada S , dan jaringan ortogonalnya α = konstan.

Normal satuan pada lembar pertama permukaan pusat adalah :

$$H^* \vec{n}^* = \vec{R}_u \times \vec{R}_v = \alpha_u \vec{n} \times \{(1-\frac{\alpha}{\beta})\vec{X}_v + \alpha_v \vec{n}\}$$

$$= \alpha_u \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \vec{n} \times \vec{X}_v$$

Untuk $\frac{\vec{X}_u}{\sqrt{E}}$, $\frac{\vec{X}_v}{\sqrt{G}}$ dan $\vec{n}$ merupakan sistem sumbu tegak lurus putar kanan dari vektor-vektor satuan, maka berlaku

$\vec{n} \times \frac{\vec{X}_v}{\sqrt{G}} = - \frac{\vec{X}_u}{\sqrt{E}}$, sehingga didapat $\vec{n} \times \vec{X}_v = \frac{\vec{X}_u \sqrt{G}}{\sqrt{E}}$

dengan demikian maka normal satuan lembar pertama permukaan pusat adalah :

$$\vec{n}^* = \frac{\alpha_u (1-\frac{\alpha}{\beta}) \vec{X}_u \sqrt{G}}{\alpha_u (1-\frac{\alpha}{\beta}) \sqrt{G}\sqrt{E}} = \frac{e\ \vec{X}_u}{\sqrt{E}} \text{ , dimana } e = \pm 1$$

sesuai dengan $\alpha_u \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)$ yang harganya bisa positif ataupun negatif.

Dengan demikian kita dapat menghitung besaran fundamental orde kedua lembar pertama permukaan pusat sebagai berikut

$$L^* = \vec{n}^* \cdot \vec{R}_{uu} = \frac{e\ \vec{X}_u}{\sqrt{E}} \cdot (\alpha_u \vec{n}_u + \alpha_{uu} \vec{n})$$

$$= e \frac{\vec{X}_u \cdot (-\alpha_u \vec{X}_u)}{\alpha \sqrt{E}} = - e \frac{\alpha_u}{\alpha} \sqrt{E}$$

$$M^* = \vec{n}^* \cdot \vec{R}_{uv} = \frac{e\ \vec{X}_u}{\sqrt{E}} \cdot (\alpha_u \vec{n}_v + \alpha_{uv} \vec{n})$$

$$= e \frac{\vec{X}_u \cdot (-\alpha_u \vec{X}_v)}{\alpha \sqrt{E}} = 0$$

$$N^* = \bar{n}^* \cdot \bar{R}_{vv} = e\,\frac{\bar{X}_u}{\sqrt{E}} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \bar{X}_{vv} + \alpha_v\, \bar{n}_v + \alpha_{vv}\, \bar{n} \right\}$$

$$= e\,\frac{\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}{\sqrt{E}}\ \bar{X}_u \cdot \bar{X}_{vv}$$

Oleh karena garis-garis singgung pada permukaan saling tegak lurus, maka berlaku $\bar{X}_u \cdot \bar{X}_v = 0$ sehingga dengan mendiferensialkan terhadap v kita peroleh :

$$\frac{\partial}{\partial v}(\bar{X}_u \cdot \bar{X}_v) = \bar{X}_u \cdot \bar{X}_{vv} + \bar{X}_{uv} \cdot \bar{X}_v$$

$$\bar{X}_u \cdot \bar{X}_{vv} = \frac{\partial}{\partial v}(\bar{X}_u \cdot \bar{X}_v) - \bar{X}_{uv} \cdot \bar{X}_v = F_v - \tfrac{1}{2} G_u$$

Oleh karena garis-garis parameter saling tegak lurus , maka $F = 0$ sehingga $F_v = 0$, akibatnya $\bar{X}_u \cdot \bar{X}_{vv} = -\tfrac{1}{2}G_u$

Oleh karena disini diambil sebagai garis parameter adalah garis kelengkungan, maka $F = 0$ dan $M = 0$, sehingga

$$k_n = \frac{L\,du^2 + N\,dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2}$$

jadi $k_a = L/E$, $k_b = N/G$, sedangkan jari-jari kelengkungan utamanya adalah $\alpha = E/L$ dan $\beta = G/N$ atau $L = E/\alpha$ $N = G/\beta$, garis kelengkungan sebagai garis parameter maka relasi Mainardi - Codazzi yang dinyatakan sebagai :

$M_v - N_u = n\,L - (m - \nu)\,M - \mu\,N$, menjadi

$$-N_u = n\,L - \mu\,N$$

dimana $n = \tfrac{1}{2} H^{-2}\,(2GF_v - GG_u - FG_v) = \dfrac{-GG_u}{2EG} = -\dfrac{G_u}{2E}$

$$\mu = \tfrac{1}{2} H^{-2}\,(EG_u - FE_v) = \frac{EG_u}{2\,EG} = \frac{G_u}{2G}$$

$$N_u = \frac{\partial}{\partial u}(G/\beta) = -n\,L + \mu\,N = \frac{G_u}{2E}\,\frac{E}{\alpha} + \frac{G_u}{2G}\,\frac{G}{\beta}$$

$$\frac{\beta\,G_u - G\,\beta_u}{\beta^2} = \frac{G_u}{2\alpha} + \frac{G_u}{2\beta} \Longrightarrow -\tfrac{1}{2}G_u = \frac{\alpha\,G\,\beta_u}{\beta(\beta - \alpha)}$$

Dengan demikian $\bar{X}_u \cdot \bar{X}_{vv} = -\frac{1}{2} G_u = \dfrac{\alpha\, G\, \beta_u}{\beta(\beta-\alpha)}$, sehingga

$$N^* = \frac{e\,(1-\frac{\alpha}{\beta})}{\sqrt{E}} \quad \frac{G\,\alpha\beta_u}{\beta(\beta-\alpha)} = \frac{e\,\alpha\,\beta_u\,G}{\beta^2\sqrt{E}}$$

Maka didapat kelengkungan Gauss lembar pertama pada Evoluta yaitu :

$$K^* = \frac{L^*\,N^* - M^{*2}}{E^*\,G^* - F^{*2}} = \frac{L^*\,N^*}{H^{*2}} \quad , M^* = 0$$

$$= \frac{\left(-e\,\frac{\alpha_u}{\alpha}\sqrt{E}\right)\left(\frac{e\,\alpha\,\beta_u\,G}{\beta^2\,\sqrt{E}}\right)}{\alpha_u^{\,2}\;(1-\frac{\alpha}{\beta})^2\;G} = \frac{-\beta_u}{(\alpha-\beta)^2\,\alpha_u}$$

Dalam perhitungan diatas $M^* = 0$ ini berarti garis parameter permukaan pusat membentuk sistem sekawan. Jadi kurva kurva Evoluta yang berkorespondensi dengan garis keleng - kungan pada permukaan dan membentuk sistem sekawan.

Dengan jalan yang sama maka besaran fundamental untuk lembar kedua permukaan pusat diperoleh, yaitu dengan mengganti u dan v, E dan G, L dan N, α dan β , sehingga titik pada lembar kedua permukaan pusat adalah :

$$\bar{R}^* = \bar{X} + \beta\,\bar{n}$$

sehingga diperoleh besaran fundamental orde pertama dari lembar kedua permukaan pusat sebagai berikut :

$$E^{**} = \bar{R}^*_u \cdot \bar{R}^*_u = \beta_u^{\,2} + (1-\frac{\beta}{\alpha})^2\,E$$

$$F^{**} = \bar{R}^*_u \cdot \bar{R}^*_v = \beta_u\,\beta_v$$

$$G^{**} = \bar{R}^*_v \cdot \bar{R}^*_v = \beta_v^{\,2}$$

$$H^{**2} = E^*\,G^* - F^{*2} = E\,\beta_v^{\,2}\,(1-\frac{\beta}{\alpha})^2$$

Kwadrat elemen garis kelengkungan untuk lembar kedua permukaan pusat adalah :

$$ds^{**2} = E^* \, du^2 + 2 F^* \, du \, dv + G^* \, dv^2$$

$$= d\beta^2 + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 E \, du^2$$

Sedangkan besaran fundamental orde kedua dari lembar kedua permukaan pusat adalah :

$$L^{**} = \bar{n}^{**} . \bar{R}^*_{uu} = \frac{r \, \beta \, \alpha_v \, E}{\alpha^2 \sqrt{G}}$$

$$M^{**} = \bar{n}^{**} . \bar{R}^*_{uv} = 0$$

$$N^{**} = \bar{n}^{**} . \bar{R}^*_{vv} = - \frac{r \, \beta_v \sqrt{G}}{\beta}$$

dimana $r = \pm 1$ sesuai dengan $\beta_v \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ yang mempunyai harga positif maupun negatif.

Dengan demikian maka kelengkungan Gauss lembar kedua permukaan pusat atau Evoluta adalah :

$$K^{**} = \frac{L^{**} N^{**} - M^{**2}}{H^{**2}} = \frac{L^{**} N^{**}}{H^{**2}} \quad , M^{**} = 0$$

$$= \frac{\left(\frac{r \, \beta \, E \, \alpha_v}{\alpha^2 \sqrt{G}}\right)\left(\frac{- r \sqrt{G} \, \beta_v}{\beta}\right)}{\beta_v^2 \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 E} = \frac{- \alpha_v}{(\alpha - \beta)^2 \beta_v}$$

Selanjutnya kita selidiki persoalan sebaliknya yaitu Involuta pada permukaan. Telah kita ketahui bahwa normal-normal permukaan merupakan garis singgung famili garis geodetik pada tiap-tiap lembar permukaan pusat, sekarang sebaliknya jika garis-garis singgung famili garis geodetik yang tak terbatas yang diberikan pada permukaan, merupakan normal-normal dari famili permukaan yang sejajar

Ambil famili garis geodetik sebagai kurva v = konstan dan jaringan ortogonalnya sebagai u = konstan. kemudian dipilih u sebagai kwadrat elemen garis yang membentuk ga-

garis geodetik, maka persamaan elemen garis geodetik :

$$ds^2 = du^2 + G\, dv^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.7)$$

ini berarti bahwa $E = 1$, $F = 0$ dan $G = G$, maka $H^2 = G$

Involuta geodetik untuk v = konstan , merupakan tempat kedudukkan titik-titik yang vektor posisi $\bar{R}$ diberikan sebagai berikut :

$$\bar{R} = \bar{X} + (c - u)\, \bar{X}_u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.8)$$

dimana c = konstan dan $\bar{X}$ = titik pada garis geodetik.

Untuk nilai c yang diberikan, maka tempat kedudukan Involuta-involuta ini merupakan permukaan S yang memotong tegak lurus semua garis singgung famili garis geodetik, akibatnya dari persamaan (2.8) bila didiferensialkan terhadap u dan v didapat :

$$\left.\begin{aligned} \bar{R}_u &= (c - u)\, \bar{X}_{uu} \\ \bar{R}_v &= \bar{X}_v + (c - u)\, \bar{X}_{uv} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.9)$$

Dengan menggunakan nilai-nilai l , m , n , λ , μ , ν yang merupakan simbul Cristofel dari formula Gauss dan dengan mengingat persamaan (2.7), maka diperoleh :

$$l = \tfrac{1}{2} H^{-2} (GE_u - 2\, FF_u + FE_v) = 0$$

$$m = \tfrac{1}{2} H^{-2} (GE_v - FG_u) = 0$$

$$n = \tfrac{1}{2} H^{-2} (2\, GF_v - GG_u - FG_v) = -\tfrac{1}{2} G_u$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2} H^{-2} (2\, EF_u - EE_v - FE_u) = 0$$

$$\mu = \tfrac{1}{2} H^{-2} (EG_u - FE_v) = \frac{G_u}{2G}$$

$$\nu = \tfrac{1}{2} H^{-2} (EG - 2\, FF + FG) = \frac{G_v}{2G}$$

Sehingga didapatlah formula Gauss sebagai berikut :

$$\bar{X}_{uu} = L\, \bar{n} + l\, \bar{X}_u + \lambda\, \bar{X}_v = L\, \bar{n}$$

$$\bar{X}_{uv} = M\, \bar{n} + m\, \bar{X}_u + \mu\, \bar{X}_v = M\, \bar{n} + (G_u / 2G)\, \bar{X}_v$$

Dengan mensubstitusikan $\bar{X}_{uu}$ dan $\bar{X}_{uv}$ pada persamaan (2.9) maka didapatlah :

$$\left.\begin{aligned} \bar{R}_u &= (c - u)\, L\, \bar{n} \\ \bar{R}_v &= \bar{X}_v + (c - u)(M\, \bar{n} + \frac{G_u}{2G}\, \bar{X}_v) \end{aligned}\right\}$$

Sehingga diperoleh besaran fundamental orde pertama dari Involuta pada permukaan, yaitu :

$$E^* = \bar{R}_u \cdot \bar{R}_u = (c - u)^2 L^2$$

$$F^* = \bar{R}_u \cdot \bar{R}_v = (c - u)^2 L M$$

$$G^* = \bar{R}_v \cdot \bar{R}_v = G + (c-u)\, G_u + (c-u)^2 M^2 + (c-u)^2 \frac{G_u^2}{4G}$$

$$\begin{aligned} H^{*2} &= E^* G^* - F^{*2} \\ &= (c-u)^2 L^2 G + (c-u)^3 L^2 G_u + (c-u)^4 L^2 \frac{G_u{}^2}{4G} \end{aligned}$$

Normal satuan dari tempat kedudukka Involuta adalah

$$\begin{aligned} H^* \bar{n}^* &= \bar{R}_u \times \bar{R}_v \\ &= (c - u)\, L\, \bar{n} \times \bar{X}_v + (c - u)^2 \frac{LG_u}{2G}\, \bar{n} \times \bar{X}_v \end{aligned}$$

dengan demikian normal satuan tempat kedudukkan Involuta sejajar dengan $\bar{X}_u$.

Jadi permukaan S merupakan normal dari garis singgung famili garis geodetik yang diberikan pada permukaan S dan ini dinamakan Involuta dari S terhadap famili garis geodetik.

Bilamana nilai c diganti sembarang, maka Involuta-Involuta dengan jumlah tak terbatas menyusun famili per - mukaan sejajar. Dengan memperhatikan Involuta-involuta S ini, maka permukaan asal S membentuk satu lembar Evoluta. Famili garis geodetik pada S merupakan garis-garis balik dari hamparan-hamparan yang dihasilkan dengan normal-normal sepanjang satu famili garis kelengkungan pada S, dan jaring an ortogonal dari garis-garis geodetik berkorespondensi dengan garis-garis pada S yang mempunyai panjang principal radii kelengkungan adalah konstan.

Dua lembar Evoluta dari S merupakan tempat kedudukkan pusat-pusat kelengkungan garis geodetik dari jaringan ortogonal yang diberikan oleh famili garis geodetik pada S. Kedua lembaran ini dinamakan Complementary permukaan S dengan memperhatikan famili garis geodetik.

Dengan mengganti garis-garis parameter pada S diatas, maka posisi vektor dititik $\bar{R}$ pada Complementary atau bagian permukaan berkorespondensi dengan titik $\bar{X}$ pada S, maka

$$\bar{R} = \bar{X} - \frac{2G}{G_u}\bar{X}_u \qquad \text{..................}(2.10)$$