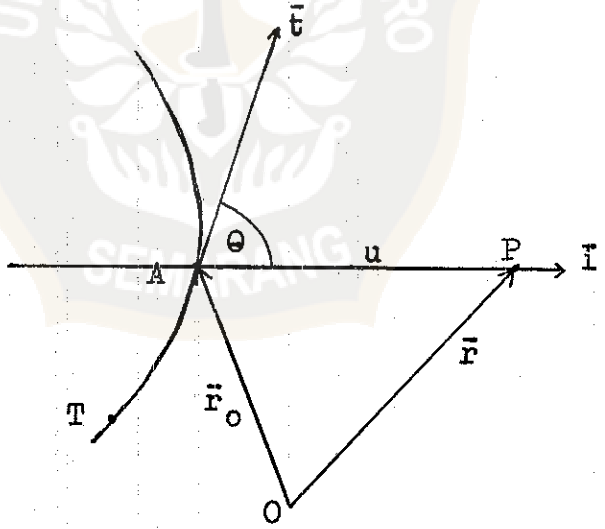
BAB II

SCROLL/SKEW SURFACE

II - 1. GENERATOR ; DIRECTRIX.

Garis lurus yang membentuk suatu luasan atur disebut "garis pelukis" atau "generator".
Sedangkan garis lengkung yang dipotong oleh semua generator pada luasan atur disebut "directrix".

Pandang suatu titik A pada directrix; vektor letak $\bar{r}_o$ dari titik A ini merupakan fungsi panjang busur s dari kurva ini yang diukur dari suatu titik tetap misalnya titik T pada kurva.



Gb. 1.

Jika $\bar{I}$ adalah vektor satuan yang menyatakan arah dari generator yang melalui titik A, maka letak suatu titik P pada permukaan ditentukan oleh :

$$\bar{r} = \bar{r}_o + u\,\bar{I} \qquad \text{.........................(1.1)}$$

dimana u adalah jarak AP dalam arah $\bar{I}$.

Θ adalah sudut diantara generator yang melalui titik A dan garis singgung kurva di A pada kurva.

$\bar{t}$ adalah garis singgung satuan pada directrix. Sebagai parameter adalah u,s. Garis parameter s = kon - stan adalah generator. Maka :

$$\bar{l} \cdot \bar{t} = |\bar{l}||\bar{t}| \cos \theta = \cos \theta \quad ....(1.2)$$

Dari (1.1) didapat : $d\bar{r} = \bar{r}_o' \, ds + u \, \bar{l}' \, ds + \bar{l} \, du$

$$d\bar{r} = (\bar{t} + u \, \bar{l}') \, ds + \bar{l} \, du$$

Jadi persamaan elemen garis :

$$d\bar{r} \cdot d\bar{r} = |d\bar{r}|^2 = (1 + u^2 \, \bar{l}' \cdot \bar{l}' + 2 \, u \, \bar{t}.\bar{l}') \, ds^2 + du^2$$
$$+ (2 \, \bar{l}.\bar{t} + 2 \, u \, \bar{l}.\bar{l}') \, du \, ds$$

Jika $\bar{l}'.\bar{l}' = a^2$ dan $\bar{t}.\bar{l}' = b$ ....(1.3)

maka persamaan elemen garis menjadi :

$$|d\bar{r}|^2 = du^2 + 2 \cos \theta \, du \, ds + (1 + a^2u^2 + 2bu) \, ds^2 \quad .....(1.4)$$

Pandang dua generator berturutan yang melalui titik-titik $\bar{r}_o$ dan $\bar{r}_o + \bar{t}$ ds pada directrix yang arahnya berturut-turut adalah vektor satuan $\bar{l}$ dan $\bar{l} + \bar{l}'$ ds.
Momen kedua generator berturutan adalah momen skalar - terhadap salah satu generator dari vektor satuan yang-terletak pada generator lain.

Luasan atur dikatakan putar kanan bila momen kedua generator yang berturutan adalah positip. Jika momennya negatip maka permukaannya adalah putar kiri.

Bila diambil vektor satuan $\bar{l} + \bar{l}'$ ds, momen vektor $\bar{l} + \bar{l}'$ ds terhadap titik $\bar{r}_o$ adalah :

$$(\bar{t} \, ds) \times (\bar{l} + \bar{l}' \, ds).$$

Dan momen skalar terhadap generator dengan arah $\bar{l}$ adalah :

$$(\bar{t}\ ds) \times (\bar{I} + \bar{I}'ds) \cdot \bar{I} \doteq (\bar{t} \times \bar{I}) \cdot \bar{I}\ ds + (\bar{t} \times \bar{I}') \cdot \bar{I}\ ds^2$$

$$= (\bar{t} \times \bar{I}') \cdot \bar{I}\ ds^2 = [\bar{t}\ ,\ \bar{I}'\ ,\ \bar{I}]\ ds^2$$

Karena itu luasan atur dikatakan putar kanan atau putar kiri tergantung dari harga triple product :

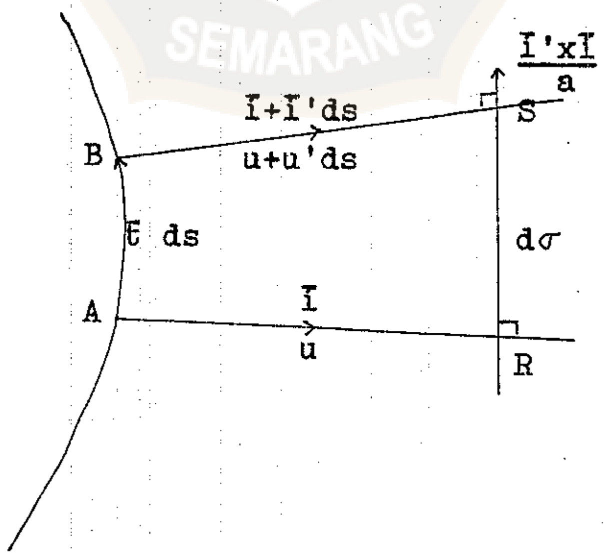
$$D = [\bar{t}\ ,\ \bar{I}'\ ,\ \bar{I}] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.5)$$

apakah positip atau negatip.

Garis tegak lurus bersama kedua generator adalah tegak lurus vektor $(\bar{I} + \bar{I}'ds)$ dan tegak lurus vektor $\bar{I}$.

Karena itu sejajar dengan vektor $(\bar{I} + \bar{I}'ds) \times \bar{I}$, yang berarti juga sejajar dengan vektor $\bar{I}' \times \bar{I}$.

Jadi vektor satuan garis tegak lurus kedua generator dalam arah $\bar{I}' \times \bar{I}$ adalah $\frac{1}{a}(\bar{I}' \times \bar{I})$.



Gb. 2

Untuk mencari jarak diantara dua generator yang berturutan, pandanglah dua generator berturutan dengan arah masing-masing $\bar{I}$ dan $\bar{I} + \bar{I}'ds$ serta garis tegak lurus bersama kedua generator dalam arah $\frac{\bar{I}' \times \bar{I}}{a}$.

Maka : $\bar{t}\,ds + (u+u'ds)(\bar{l}+\bar{l}'ds) - \frac{\bar{l}'x\bar{l}}{a}\,d\sigma - u\bar{l} = \bar{0}$

$$\frac{\bar{l}'x\bar{l}}{a} \cdot \bar{t}\,ds + \frac{\bar{l}'x\bar{l}}{a} \cdot (u+u'ds)(\bar{l}+\bar{l}'ds) -$$

$$\frac{\bar{l}'x\bar{l}}{a} \cdot \frac{\bar{l}'x\bar{l}}{a}\,d\sigma - u\,\frac{\bar{l}'x\bar{l}}{a} \cdot \bar{l} = 0$$

$$\frac{D}{a}\,ds + \frac{u}{a}(\bar{l}'x\bar{l}) \cdot \bar{l} + \frac{u}{a}(\bar{l}'x\bar{l}) \cdot \bar{l}'ds +$$

$$\frac{u'}{a}(\bar{l}'x\bar{l}) \cdot \bar{l}ds + \frac{u'}{a}(\bar{l}'x\bar{l}) \cdot \bar{l}'ds^2 - d\sigma -$$

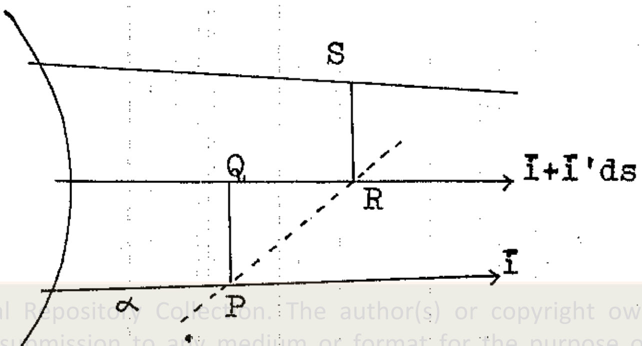
$$u\,\frac{\bar{l}'x\bar{l}}{a} \cdot \bar{l} = 0$$

Karena $(\bar{l}'x\bar{l})$ tegak lurus $\bar{l}'$ dan $\bar{l}$, maka persamaan diatas menjadi :

$$d\sigma = \frac{D}{a}\,ds \qquad \text{.........................(1.6)}$$

II - 2. LINE OF STRICTION.

Pandang tiga generator berturutan. PQ adalah garis tegak lurus bersama pada generator pertama dan kedua. RS adalah garis tegak lurus bersama pada generator kedua dan ketiga. P dan R disebut titik-titik central.



Gb. 3

Tempat kedudukan titik-titik central dari semua generator disebut "Line of Striction" dari permukaan.

Selanjutnya akan kita cari jarak ($=\alpha$) dari directrix ke titik central pada generator $\bar{I}$.
Untuk itu pertama-tama akan kita perlihatkan bahwa garis singgung pada Line of Striction tegak lurus $\bar{I}'$.
Vektor PR merupakan penjumlahan dari vektor PQ dan vektor QR. Karena vektor PQ sejajar dengan $\bar{I}'x\bar{I}$ maka tegak lurus $\bar{I}'$. Sedangkan QR = $\eta(\bar{I} + \bar{I}'ds)$
Hasil kali skalar vektor QR dengan $\bar{I}'$ adalah :

$$\eta(\bar{I} + \bar{I}'ds).\bar{I}' = \eta\,\bar{I}.\bar{I}' + \eta\,\bar{I}'.\bar{I}'ds = \eta\, a^2\, ds$$

Maka dalam kedudukan limit, jika ketiga generator itu menuju untuk berimpit, PR akan tegak lurus $\bar{I}'$.
Sedangkan arah PR sendiri adalah garis singgung pada Line of Striction.
Jadi garis singgung ini tegak lurus $\bar{I}'$.
Jika α adalah jarak dari directrix ke titik central P, maka letak titik P ditentukan oleh :

$$\bar{r} = \bar{r}_o + \alpha\,\bar{I}$$

Garis singgung pada Line of Striction sejajar $\bar{r}'$ yaitu:

$$\bar{r}' = \bar{r}_o' + \alpha\,\bar{I}' + \alpha'\bar{I} = \bar{t} + \alpha\,\bar{I}' + \alpha'\bar{I}$$

Karena garis singgung pada Line of Striction tegak lurus $\bar{I}'$ maka $\bar{r}'.\bar{I}' = 0$

Jadi $0 = \bar{t}.\bar{I}' + \alpha\,\bar{I}'.\bar{I}' + \alpha'\bar{I}.\bar{I}' = b + \alpha a^2$

$$\alpha = -\frac{b}{a^2} \qquad \text{..........................(2.1)}$$

Persamaan ini menentukan suatu titik central dari generator.

Persamaan parameter Line of Striction adalah :

$$a^2\alpha \;+\; b \;=\; 0 \qquad \text{.......................}(2.2)$$

Jelas b = 0 adalah syarat perlu dan cukup bahwa Line of Striction menjadi directrix.

Yang berarti bahwa $\bar{l}'$ tegak lurus $\bar{t}$.

Sekarang akan diperlihatkan bahwa Line of Striction akan memotong generator dengan sudut ψ sedemikian sehingga $\operatorname{ctg}\psi = \frac{a}{D}\left\{\cos\theta - \frac{d}{ds}\left(\frac{b}{a^2}\right)\right\}$

adalah sebagai berikut :

$$\bar{l}\cdot\bar{r}' = |\bar{l}||\bar{r}'|\cos\psi \longrightarrow \cos\psi = \frac{\bar{l}\cdot\bar{r}'}{|\bar{l}||\bar{r}'|}$$

$$|\bar{l}\times\bar{r}'| = |\bar{l}||\bar{r}'|\sin\psi \longrightarrow \sin\psi = \frac{|\bar{l}\times\bar{r}'|}{|\bar{l}||\bar{r}'|}$$

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \frac{\bar{l}\cdot\bar{r}'}{|\bar{l}||\bar{r}'|}\;\frac{|\bar{l}||\bar{r}'|}{|\bar{l}\times\bar{r}'|} = \frac{\bar{l}\cdot\bar{r}'}{|\bar{l}\times\bar{r}'|}$$

$$\bar{r}' = \bar{t} + \alpha\bar{l}' + \alpha'\bar{l}$$

$$\bar{l}\cdot\bar{r}' = \bar{l}\cdot\bar{t} + \alpha\bar{l}\cdot\bar{l}' + \alpha'\bar{l}\cdot\bar{l}$$

$$= \cos\theta + \alpha'$$

$$= \cos\theta + \frac{d\alpha}{ds}$$

$$= \cos\theta - \frac{d}{ds}\left(\frac{b}{a^2}\right)$$

$$|\bar{l}\times\bar{r}'| = |\bar{l}\times\bar{t} + \alpha\bar{l}\times\bar{l}' + \alpha'\bar{l}\times\bar{l}|$$

$$= \left\{(\bar{l}\times\bar{t} + \alpha\bar{l}\times\bar{l}' + \alpha'\bar{l}\times\bar{l})\cdot(\bar{l}\times\bar{t} + \alpha\bar{l}\times\bar{l}' + \alpha'\bar{l}\times\bar{l})\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\bar{l}\times\bar{t}\cdot\bar{l}\times\bar{t} + \alpha\,\bar{l}\times\bar{t}\cdot\bar{l}\times\bar{l}' + \right.$$

$$\alpha'\bar{I}x\bar{t}\ .\ \bar{I}x\bar{I} + \alpha\,\bar{I}x\bar{I}'\ .\ \bar{I}x\bar{t}\ +$$

$$\alpha^2\bar{I}x\bar{I}'\ .\ \bar{I}x\bar{I}' + \alpha\alpha'\bar{I}x\bar{I}'\ .\ \bar{I}x\bar{I}\ +$$

$$\alpha'\bar{I}x\bar{I}\ .\ \bar{I}x\bar{t} + \alpha\alpha'\bar{I}x\bar{I}\ .\ \bar{I}x\bar{I}'\ +$$

$$\alpha'^2\bar{I}x\bar{I}\ .\ \bar{I}x\bar{I}\ \Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big\{\bar{I}x\bar{t}\ .\ \bar{I}x\bar{t} + 2\alpha\,\bar{I}x\bar{t}\ .\ \bar{I}x\bar{I}'\ +$$

$$\alpha^2\bar{I}x\bar{I}'\ .\ \bar{I}x\bar{I}'\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big\{|\bar{I}x\bar{t}|^2 + 2\alpha(\bar{I}x\bar{t})x\bar{I}\ .\ \bar{I}'\ +$$

$$\alpha^2|\bar{I}x\bar{I}'|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big\{|\bar{I}x\bar{t}|^2 + 2\alpha\left[(\bar{I}.\bar{I})\bar{t} - (\bar{I}.\bar{t})\bar{I}\right].\ \bar{I}'\ +$$

$$\alpha^2|\bar{I}x\bar{I}'|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\sin^2\theta + 2\alpha\,\bar{t}.\bar{I}' + \alpha^2a^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\sin^2\theta + 2\alpha\,b + \alpha^2a^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\sin^2\theta - 2\,\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\frac{a^2\sin^2\theta - 2b^2 + b^2}{a^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{a^2\sin^2\theta - b^2} = \frac{D}{a}$$

dimana $D = \left[\bar{t}\ ,\ \bar{I}'\ ,\ \bar{I}\right]$

$$D^2 = \begin{vmatrix} \bar{t}.\bar{t} & \bar{t}.\bar{I}' & \bar{t}.\bar{I} \\ \bar{I}'.\bar{t} & \bar{I}'.\bar{I}' & \bar{I}'.\bar{I} \\ \bar{I}.\bar{t} & \bar{I}.\bar{I}' & \bar{I}.\bar{I} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b & \cos\theta \\ b & a^2 & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^2\sin^2\theta - b^2$$

[illegible]

II - 3. PARAMETER DISTRIBUSI.

Momen bersama kedua generator yaitu D ds^2, tidak tergantung dari kurva yang dipilih sebagai directrix. Demikian pula halnya dengan jarak diantara dua generator yang berturutan.

Maka pada dua generator yang berturutan, D ds^2 dan $\frac{1}{a}$ D ds tidak berubah dengan directrixnya.

Sedangkan $\dfrac{(\frac{1}{a}\, D\, ds)^2}{D\, ds^2} = \dfrac{D}{a^2}$ tidak tergantung dari ds

Jadi hanya tergantung dari generator $\bar{I}$.

Inilah yang disebut parameter distribusi untuk suatu generator dan dinyatakan dalam :

$$\beta = \frac{D}{a^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1)$$

Parameter distribusi ini mempunyai tanda sama dengan D.

II - 4. BESARAN FUNDAMENTAL.

Letak suatu titik pada luasan atur ditentukan oleh : $\bar{r} = \bar{r}_o + u\,\bar{I}$, dimana $\bar{r}_o$ dan $\bar{I}$ adalah fungsi dari parameter s saja.

Maka : $\bar{r}_u = \bar{I}$

$$\bar{r}_s = \bar{t} + u\,\bar{I}'$$

$$\bar{r}_{uu} = 0$$

$$\bar{r}_{us} = \bar{I}'$$

$$\bar{r}_{ss} = \bar{t}' + u\,\bar{I}''$$

$$F = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_s = \bar{l} \cdot (\bar{t} + u\,\bar{l}') = \bar{l}.\bar{t} + u\,\bar{l}.\bar{l}'$$

$$= \cos \Theta$$

$$G = \bar{r}_s \cdot \bar{r}_s = (\bar{t} + u\,\bar{l}') \cdot (\bar{t} + u\,\bar{l}')$$

$$= 1 + 2u\,\bar{t}.\bar{l}' + u^2\,\bar{l}'.\bar{l}'$$

$$= 1 + 2bu + a^2u^2$$

Jadi persamaan elemen garis pada sub bab II - 1 juga di dapat dari :

$$|d\bar{r}|^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,ds + G\,ds^2$$

$$= du^2 + 2\cos\Theta\,du\,ds + (1 + 2bu + a^2u^2)\,ds^2$$

$$H^2 = EG - F^2 = a^2u^2 + 2bu + 1 - \cos^2\Theta$$

$$= a^2u^2 + 2bu + \sin^2\Theta$$

$$H = (a^2u^2 + 2bu + \sin^2\Theta)^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.1)$$

Normal satuan pada permukaan :

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_s}{H} = \frac{1}{H}\,\bar{l} \times (\bar{t} + u\,\bar{l}') \qquad \ldots\ldots.(4.2)$$

Pernyataan untuk vektor normal ini menunjukkan bahwa bila titik singgungnya bergerak sepanjang suatu generator maka bidang singgungnya berubah.

$$L = \bar{n} \cdot \bar{r}_{uu} = 0$$

$$M = \bar{n} \cdot \bar{r}_{us} = \frac{1}{H}\,\bar{l}x(\bar{t} + u\,\bar{l}') \cdot \bar{l}'$$

$$= \frac{1}{H}\,(\bar{l}x\bar{t} \cdot \bar{l}' + u\,\bar{l}x\bar{l}' \cdot \bar{l}')$$

$$= \frac{1}{H}\,\bar{l}x\bar{t} \cdot \bar{l}' = \frac{D}{H}$$

$$N = \bar{n} \cdot \bar{r}_{ss} = \frac{1}{H}\,\bar{l}x(\bar{t} + u\,\bar{l}') \cdot (\bar{t}' + u\,\bar{l}'')$$

$$= \frac{1}{H}\left[\bar{l}\,,\ \bar{t} + u\,\bar{l}'\,,\ \bar{t}' + u\,\bar{l}''\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(4.3)$$

Kelengkungan pertamanya : $J = \dfrac{EN - 2FM + GL}{H^2}$

$$J = \frac{\frac{1}{H}\left[\bar{I}\ ,\ \bar{t} + u\,\bar{I}'\ ,\ \bar{t}' + u\,\bar{I}''\right] - \frac{2D\cos\theta}{H}}{H^2}$$

$$J = \frac{1}{H^3}\left\{\left[\bar{I}\ ,\ \bar{t} + u\,\bar{I}'\ ,\ \bar{t}' + u\,\bar{I}''\right] - 2D\cos\theta\right\} \qquad \text{..........(4.4)}$$

Kelengkungan Gauss : $K = \dfrac{LN - M^2}{H^2} = -\dfrac{D^2}{H^4}$ ....(4.5)

Karena pada permukaan riil $EG - F^2 > 0$, maka kelengkungan Gauss untuk luasan atur yang tak dapat dihamparkan adalah negatip, kecuali sepanjang generator dimana D sama dengan nol. Sehingga pada luasan atur riil, tidak ada titik-titik elliptik. Semua titiknya adalah titik hyperbolik kecuali sepanjang generator dimana D sama dengan nol.

Suatu titik disebut titik elliptik jika $LN - M^2 > 0$ dan jika $LN - M^2 < 0$ maka disebut titik hyperbolik.

II - 5. BENTUK KHUSUS PERSAMAAN ELEMEN GARIS.

Sekarang jika sebagai directrix diambil trayektori orthogonal dari generator, maka kita dapatkan persamaan elemen garis dalam bentuk khusus sebagai berikut :

dalam hal ini $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = -\dfrac{b}{a^2}$

$$D = \left[\bar{t}\ ,\ \bar{I}'\ ,\ \bar{I}\right]$$

$$D^2 = \begin{vmatrix} \bar{t}.\bar{t} & \bar{t}.\bar{I}' & \bar{t}.\bar{I} \\ \bar{I}'.\bar{t} & \bar{I}'.\bar{I}' & \bar{I}'.\bar{I} \\ \bar{I}.\bar{t} & \bar{I}.\bar{I}' & \bar{I}.\bar{I} \end{vmatrix}$$

$$D^2 = \cos\theta\,(-\,a^2\cos\theta) + a^2 - b^2$$

$$= -\,a^2\cos^2\theta + a^2 - b^2$$

$$= a^2\sin^2\theta - b^2$$

Jadi untuk $\theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow D^2 = a^2 - b^2$

$$\beta = \frac{D}{a^2} \longrightarrow \beta^2 = \frac{D^2}{a^4} = \frac{a^2 - b^2}{a^4} \quad \ldots\ldots(5.1)$$

Jika sebagai parameter diambil :

$$u = u\ ,\ s_1 = \int_0^s a\,ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.2)$$

maka persamaan elemen garis menjadi :

$$|d\bar{r}|^2 = du^2 + a^2\left(u^2 - 2\alpha u + \frac{1}{a^2}\right) ds^2$$

$$= du^2 + \left(u^2 - 2\alpha u + \frac{1}{a^2}\right) ds_1{}^2$$

$$= du^2 + \left\{ (u-\alpha)^2 - \alpha^2 + \frac{1}{a^2} \right\} ds_1{}^2$$

$$= du^2 + \left\{ (u-\alpha)^2 - \frac{b^2}{a^4} + \frac{1}{a^2} \right\} ds_1{}^2$$

$$= du^2 + \left\{ (u-\alpha)^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^4} \right\} ds_1{}^2$$

$$|d\bar{r}|^2 = du^2 + \left\{ (u-\alpha)^2 + \beta^2 \right\} ds_1{}^2 \quad \ldots(5.3)$$

Kelengkungan Gauss $K = \frac{T^2}{H^2} = \frac{LN - M^2}{H^2} = -\frac{M^2}{H^2}$

$$H^2 = a^2u^2 + 2bu + 1$$

$$= a^2\left\{ u^2 - 2\alpha u + \alpha^2 + \frac{1}{a^2} - \alpha^2 \right\}$$

$$H^2 = a^2 \left\{ (u - \alpha)^2 + \beta^2 \right\}$$

$$K = -\frac{D^2}{H^4} = -\frac{(a^2 - b^2)}{a^4 \left\{ (u - \alpha)^2 + \beta^2 \right\}^2}$$

$$K = -\frac{\beta^2}{\left\{ (u - \alpha)^2 + \beta^2 \right\}^2} \qquad \text{..........(5.4)}$$

Menurut (4.3) $M = \frac{D}{H} = \frac{a^2 \beta}{H}$; $H = a \left\{ (u - \alpha)^2 + \beta^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$

$\bar{t} \cdot \bar{t} = 1$ maka $\bar{t} \cdot \bar{t}' = 0$

$\bar{I} \cdot \bar{I} = 1$ maka $\bar{I} \cdot \bar{I}' = 0$

$\bar{I} \cdot \bar{t} = \cos \theta$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

maka $\bar{I} \cdot \bar{t} = 0$

didifferensialkan ke s didapat :

$\bar{I}' \cdot \bar{t} + \bar{I} \cdot \bar{t}' = 0$, sehingga $\bar{I} \cdot \bar{t}' = - b$

$\bar{I}' \cdot \bar{I}' = a^2 \longrightarrow 2\bar{I}' \cdot \bar{I}'' = 2aa'$

$\bar{I}' \cdot \bar{I}'' = aa'$

$\bar{I} \cdot \bar{I}' = 0 \longrightarrow \bar{I}' \cdot \bar{I}' + \bar{I} \cdot \bar{I}'' = 0$

$\bar{I} \cdot \bar{I}'' = - a^2$

$\bar{t} \cdot \bar{I}' = b \longrightarrow \bar{t}' \cdot \bar{I}' + \bar{t} \cdot \bar{I}'' = b'$

$\bar{t}' \cdot \bar{I}' = b' - \bar{t} \cdot \bar{I}''$

jika $\bar{t} \cdot \bar{I}'' = \ell$ maka $\bar{t}' \cdot \bar{I}' = b' - \ell$

Menurut (4.3) $N = \frac{1}{H} \left[\bar{I} , \bar{t} + u\bar{I}' , \bar{t}' + u\bar{I}'' \right]$

Jika persamaan ini dikalikan dengan determinan $\left[\bar{t}, \bar{I}', \bar{I} \right]$ dan kemudian hasilnya dibagi dengan D yang sama dengan $a^2 \beta$ maka terdapatlah persamaan untuk N sebagai berikut

$$N = \frac{1}{Ha^2 \beta} \left[\bar{I} , \bar{t} + u\bar{I}' , \bar{t}' + u\bar{I}'' \right] \left[\bar{t} , \bar{I}' , \bar{I} \right]$$

$$N = \frac{1}{Ha^2\beta}\begin{vmatrix} \bar{I}\cdot\bar{t} & 1+u\bar{t}\cdot\bar{I}' & \bar{t}\cdot\bar{t}'+u\bar{t}\cdot\bar{I}'' \\ \bar{I}\cdot\bar{I}' & \bar{t}\cdot\bar{I}'+u\bar{I}'\cdot\bar{I}' & \bar{t}'\cdot\bar{I}'+u\bar{I}'\cdot\bar{I}'' \\ \bar{I}\cdot\bar{I} & \bar{t}\cdot\bar{I}+u\bar{I}\cdot\bar{I}' & \bar{t}'\cdot\bar{I}+u\bar{I}\cdot\bar{I}'' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{Ha^2\beta}\begin{vmatrix} 0 & 1+ub & u\ell \\ 0 & b+ua^2 & b'-\ell+uaa' \\ 1 & 0 & -b-ua^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{Ha^2\beta}\left(b'+ubb'-\ell-ub\ell+uaa'+u^2aa'b-u\ell b-u^2a^2\ell\right)$$

$$= -\frac{1}{Ha^2\beta}\left\{\underbrace{u^2(a^2\ell-aa'b)}_{\mathrm{I}} + \underbrace{u(2\ell b-aa'-bb')}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\ell-b'}_{\mathrm{III}}\right\}$$

suku I : $u^2(a^2\ell-aa'b) = u^2a^2(\ell-\frac{a'}{a}b)$

suku II : $u(2\ell b-aa'-bb') = ua^2\left(\frac{2\ell b}{a^2}-\frac{a'}{a}-\frac{bb'}{a^2}\right)$

$$\alpha = -\frac{b}{a^2} \longrightarrow b = -a^2\alpha$$

$$b' = -a^2\alpha' - 2aa'\alpha$$

$$bb' = a^4\alpha\alpha' + 2a^3a'\alpha^2$$

jadi $u(2\ell b-aa'-bb') = ua^2\left(\frac{2\ell.-a^2\alpha}{a^2}-\frac{a'}{a}-a^2\alpha\alpha'\right.$

$$\left.-2aa'\alpha^2\right)$$

$$= ua^2\left(-2\ell\alpha-\frac{a'}{a}-a^2\alpha\alpha'+2a'\frac{b}{a}\alpha\right)$$

$$= ua^2\left\{-2\alpha(\ell-\frac{a'}{a}b)-\frac{a'}{a}-a^2\alpha\alpha'\right\}$$

Dari (5.1) $\beta^2 = \frac{a^2-b^2}{a^4} = \frac{a^2-a^4\alpha^2}{a^4} = \frac{1-a^2\alpha^2}{a^2}$

$$1-a^2\alpha^2-a^2\beta^2 = 0 \longrightarrow a^2 = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}$$

didifferensialkan ke s didapat : $aa' = -\dfrac{(\alpha\alpha' + \beta\beta')}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}$

$$= -a^4(\alpha\alpha' + \beta\beta')$$

$$a' = -a^3(\alpha\alpha' + \beta\beta')$$

jadi suku ke II menjadi :

$$u(2\ell b - aa' - bb') = ua^2\left\{-2\alpha\left(\ell - \frac{a'}{a}b\right) + a^2(\alpha\alpha' + \beta\beta') - a^2\alpha\alpha'\right\}$$

$$= ua^2\left\{-2\alpha\left(\ell - \frac{a'}{a}b\right) + a^2\beta\beta'\right\}$$

suku III : $\ell - b' = \ell + a^2\alpha' + 2aa'\alpha$

$$= \ell + a^2\alpha' - 2\frac{a'}{a}b$$

$$= \left(\ell - \frac{a'}{a}b\right) - \frac{a'}{a}b + a^2\alpha'$$

$$= \left(\ell - \frac{a'}{a}b\right) + a'a\alpha + a^2\alpha'$$

$$= \left(\ell - \frac{a'}{a}b\right) + a^4\left\{-\alpha^2\alpha' - \alpha\beta\beta' + \alpha'(\alpha^2 + \beta^2)\right\}$$

$$= \left(\ell - \frac{a'}{a}b\right) + a^4(\alpha'\beta^2 - \alpha\beta\beta')$$

Jadi $N = -\dfrac{1}{Ha^2\beta}\left\{u^2a^2\left(\ell - \frac{a'}{a}b\right) + ua^2\left[-2\alpha\left(\ell - \frac{a'}{a}b\right) + a^2\beta\beta'\right]\right.$

$$\left. + \left(\ell - \frac{a'}{a}b\right) + a^4(\alpha'\beta^2 - \alpha\beta\beta')\right\}$$

Jika $\ell - \frac{a'}{a}b = a^3\beta d$, maka persamaan diatas menjadi :

$$N = -\frac{1}{Ha^2\beta}\left\{u^2a^2a^3\beta d + ua^2(-2\alpha a^3\beta d + a^2\beta\beta')\right.$$

$$N = -\frac{a^3}{H}\left\{u^2 d - 2u\alpha d + \frac{u\beta'}{a} + \frac{d}{a^2} + \frac{\alpha'\beta}{a} - \frac{\alpha\beta'}{a}\right\}$$

$$= -\frac{a^3}{H}\left\{u^2 d - 2u\alpha d + \frac{u\beta'}{a} + d\alpha^2 + d\beta^2 + \frac{\alpha'\beta}{a} - \frac{\alpha\beta'}{a}\right\}$$

$$= -\frac{a^3}{H}\left\{d\left[(u-\alpha)^2+\beta^2\right] + \beta'(u-\alpha) + \beta\alpha'\right.$$

dimana aksen menunjukkan differensial terhadap s_1.

Dari persamaan ini akan kita cari kelengkungan rata-ratanya $J = \frac{EN - 2FM + GL}{H^2} = \frac{EN}{H^2}$

$$= -\frac{a^3\left\{d\left[(u-\alpha)^2+\beta^2\right] + \beta'(u-\alpha) + \beta\alpha'\right\}}{a^3\left\{(u-\alpha)^2+\beta^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$J = -\frac{d\left[(u-\alpha)^2+\beta^2\right] + \beta'(u-\alpha) + \beta\alpha'}{\left\{(u-\alpha)^2+\beta^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \qquad \ldots\ldots.(5.5)$$

II - 6. BIDANG SINGGUNG.

Telah kita ketahui bahwa pada skew surface, bidang singgung berubah jika titik singgungnya bergerak sepanjang generator.

Sekarang akan diperlihatkan bahwa jika titik singgungnya bergerak dari satu ujung ke ujung lain sepanjang suatu generator, bidang singgung itu berputar dengan sudut 180°.

Untuk itu kita cari inklinasi dari bidang singgung disuatu titik P ke bidang singgung di titik central P_o pada generator yang sama. Dimana bidang singgung dititik central pada suatu generator disebut bidang central da-

Ambil Line of Striction sebagai directrix, maka b = 0. Jadi $H^2 = a^2u^2 + 2bu + \sin^2\theta = a^2u^2 + \sin^2\theta$

$$D = \pm\sqrt{a^2 \sin^2\theta - b^2} = \pm a \sin\theta$$

Jika φ sudut perputaran bidang central ke bidang singgung di suatu titik P pada generator yang sama, maka sudut φ ini juga sama dengan sudut perputaran dari normal satuan di titik central ($= \bar{n}_o$) ke normal satuan di titik P ($= \bar{n}$).

$H^2 = a^2u^2 + \sin^2\theta$ maka di titik central :

$$H_o^2 = \sin^2\theta \longrightarrow H_o = \sin\theta$$

Dan normal satuan di titik central

$$\bar{n}_o = \frac{1}{H}\,\bar{I} \times \bar{t} = \frac{\bar{I} \times \bar{t}}{\sin\theta}$$

Selanjutnya $\bar{I} \sin\varphi = \bar{n}_o \times \bar{n}$

$$= \frac{\bar{I} \times \bar{t}}{\sin\theta} \times \frac{1}{H}\,\bar{I}\times(\bar{t} + u\bar{I}')$$

$$= \frac{1}{H\sin\theta}\,(\bar{I}\times\bar{t}) \times (\bar{I}\times\bar{t} + u\bar{I}\times\bar{I}')$$

$$= -\frac{u}{H\sin\theta}\,(\bar{I}\times\bar{I}') \times (\bar{I}\times\bar{t})$$

$$= -\frac{u}{H\sin\theta}\left\{(\bar{I}\times\bar{I}'.\bar{t})\bar{I} - (\bar{I}\times\bar{I}'.\bar{I})\bar{t}\right\}$$

$$= -\frac{u}{H\sin\theta}\,\left[\bar{t}\,,\,\bar{I}\,,\,\bar{I}'\right]\,\bar{I}$$

$$= \frac{uD}{H\sin\theta}\,\bar{I}$$

Jadi $\sin\varphi = \dfrac{uD}{H\sin\theta} = \pm\dfrac{au}{H}$ ....(6.1)

Tanda positip atau negatip tergantung permukaannya putar kanan atau putar kiri.

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = 1 - \frac{a^2u^2}{H^2} = \frac{H^2 - a^2u^2}{H^2}$$

$$\cos\varphi = \pm\frac{1}{H}\sqrt{H^2 - a^2u^2} = \frac{\sin\theta}{H} = \pm\frac{D}{aH}$$

.........(6.2)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{a^2u}{D} = \frac{u}{\beta} \qquad ....(6.3)$$

Persamaan ini dinyatakan dalam Theorema Chasles sebagai "Tangen sudut diantara bidang singgung disuatu titik dari suatu generator pada luasan atur yang tidak dapat dihamparkan dan bidang centralnya sebanding dengan jarak titik itu ke titik central".

Jika u berjalan dari $-\infty$ sampai ke $+\infty$ dan $\beta > 0$, φ berjalan dari $-\frac{\pi}{2}$ sampai $+\frac{\pi}{2}$

Dan jika $\beta < 0$, φ berjalan dari $+\frac{\pi}{2}$ sampai ke $-\frac{\pi}{2}$

Jadi jika titik singgungnya bergerak dari satu ujung ke ujung lain dari suatu generator, bidang singgungnya berputar 180^o dan bidang singgung di ujung-ujung generator tegak lurus bidang central.

Bidang-bidang singgung pada dua titik P yang jaraknya u dari directrix dan titik Q yang jaraknya v dari directrix akan saling tegak lurus jika $uv = -\beta^2$

Hal ini dapat dijelaskan dengan persamaan (6.3) secara demikian :

jika φ_1 adalah sudut antara bidang central dengan bidang singgung di titik P dan φ_2 adalah sudut antara bidang central dengan bidang singgung di titik Q, maka berdasarkan persamaan (6.3) $u = \beta \operatorname{tg}\varphi_1$ dan

$$v = \beta \operatorname{tg}\varphi_2$$

$$uv = \beta^2 \,tg\, \varphi_1 \,tg\, \varphi_2$$

$$tg\,(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{tg\,\varphi_1 - tg\,\varphi_2}{1 + tg\,\varphi_1 tg\,\varphi_2}$$

$$tg\,(\varphi_1 - \varphi_2) + tg\,(\varphi_1 - \varphi_2)\,tg\,\varphi_1 tg\,\varphi_2$$

$$= tg\,\varphi_1 - tg\,\varphi_2$$

$$tg\,\varphi_1 tg\,\varphi_2 = \frac{tg\,\varphi_1 - tg\,\varphi_2}{tg\,(\varphi_1 - \varphi_2)} - 1$$

dimana $\varphi_1 - \varphi_2$ adalah sudut antara bidang singgung di titik P dan bidang singgung di titik Q.

Agar supaya bidang singgung di titik P tegak lurus bidang singgung di titik Q, yaitu bila $\varphi_1 - \varphi_2 = 90^o$

Sehingga $tg\,\varphi_1 tg\,\varphi_2 = -1$

Jadi $uv = \beta^2(-1) = -\beta^2$

<u>Contoh soal</u>

Buktikan bahwa hasil kali kelengkungan Gauss di dua titik pada generator yang sama adalah :

$\dfrac{\sin^4\alpha}{\ell^4}$ dimana ℓ = jarak antara kedua titik itu

α = inklinasi dari bidang-bidang singgung di titik-titik itu.

<u>Penyelesaian</u> :

$$u_1 = \beta\,tg\,\varphi_1$$

$$u_2 = \beta\,tg\,\varphi_2$$

$$\ell = u_1 - u_2 = \beta\,(tg\,\varphi_1 - tg\,\varphi_2)$$

$$= \beta\,\left(\frac{\sin\,\varphi_1}{\cos\,\varphi_1} - \frac{\sin\,\varphi_2}{\cos\,\varphi_2}\right)$$

$$\ell = \beta \left(\frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2} \right)$$

$$= \beta \frac{\sin (\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2} = \frac{\beta \sin \alpha}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}$$

Maka $\dfrac{\sin^4 \alpha}{\ell^4} = \dfrac{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2)^4}{\beta^4}$

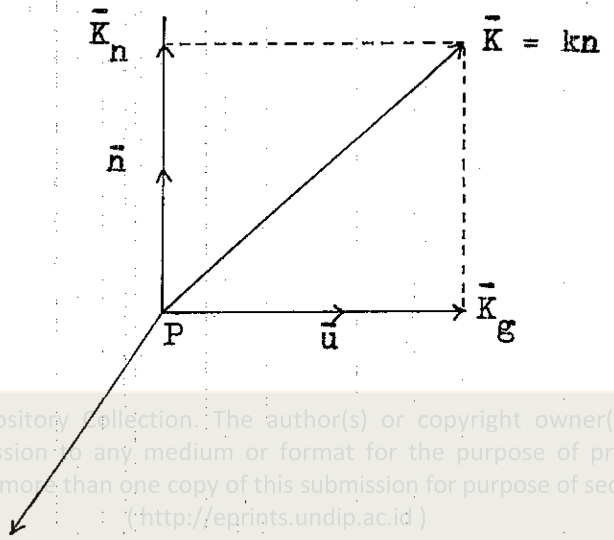
$$= \frac{a^8}{D^4} \cos^4 \varphi_1 \cos^4 \varphi_2$$

$$= \frac{a^8}{D^4} \left(\frac{D}{aH_1} \right)^4 \left(\frac{D}{aH_2} \right)^4$$

$$= \frac{D^4}{H_1^4 H_2^4} = K_1 \; K_2$$

II - 7. KELENGKUNGAN GEODETIK.

Vektor kelengkungan di suatu titik P dari suatu-kurva pada permukaan adalah $\bar{K} = k\ n = \bar{t}'$ dengan $\bar{t}$ adalah garis singgung satuan di P. Vektor kelengkungan ini terletak pada bidang melalui P tegak lurus $\bar{t}$. Bidang ini juga memuat normal permukaan yaitu normal satuan $\bar{n}$.



Gb. 4

Vektor kelengkungan $\bar{K}$ dapat diuraikan atas komponen normal yaitu $\bar{K}_n$ dan komponen tangensial pada permukaan yaitu $\bar{K}_g$.

Dinyatakan dalam persamaan :

$$\bar{K} = \bar{K}_n + \bar{K}_g \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7.1)$$

$\bar{K}_n$ disebut vektor kelengkungan normal dan dapat dinyatakan dalam normal satuan dari permukaan $\bar{n}$ sebagai :

$$\bar{K}_n = k_n \, \bar{n}$$

dimana k_n adalah kelengkungan normal.

Untuk menyatakan vektor kelengkungan tangensial $\bar{K}_g$, kita pandang vektor satuan $\bar{u}$ yang tegak lurus $\bar{t}$ pada bidang singgung sehingga $\bar{t}$, $\bar{u}$, $\bar{n}$ membentuk suatu sistem tegak lurus putar kanan.

Maka vektor kelengkungan tangensial dinyatakan sebagai:

$$\bar{K}_g = k_g \, \bar{u}$$

dimana k_g adalah kelengkungan tangensial atau disebut juga kelengkungan geodetik.

Jadi vektor kelengkungan merupakan jumlahan dari vektor kelengkungan normal dan vektor kelengkungan tangensial.

Karena $\bar{u} \cdot \bar{K}_n = \bar{u} \cdot k_n \, \bar{n} = 0$, maka $\bar{u} \cdot \bar{K} = \bar{u} \cdot \bar{K}_g = k_g$

jadi $k_g = \bar{u} \cdot \bar{t}'$

Dan oleh karena $\bar{u} = \bar{n} \times \bar{t}$, maka $k_g = \bar{n} \times \bar{t} \cdot \bar{t}'$

Sehingga $k_g = [\bar{n} \, , \, \bar{t} \, , \, \bar{t}']$

Untuk titik-titik pada directrix $\bar{n} = \dfrac{\bar{I} \times \bar{t}}{H}$ dan $H = \sin\theta$

Maka kelengkungan geodetik dari directrix adalah :

$$k_g = \frac{1}{\sin\theta} (\bar{I} \times \bar{t}) \times \bar{t} \cdot \bar{t}'$$

$$= -\frac{1}{\sin\theta} \, \bar{t} \times (\bar{I} \times \bar{t}) \cdot \bar{t}'$$

$$k_g = -\frac{1}{\sin\Theta}(\bar{t}\,.\,\bar{t}\,\bar{I} - \bar{t}\,.\,\bar{I}\,\bar{t})\,.\,\bar{t}'$$

Karena $\bar{t}\,.\,\bar{t}' = 0$, maka :

$$k_g = -\frac{\bar{I}\,.\,\bar{t}'}{\sin\Theta}$$

$$= -\frac{1}{\sin\Theta}\left\{\frac{d}{ds}(\bar{I}\,.\,\bar{t}) - \bar{I}'.\,\bar{t}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\sin\Theta}\left\{\frac{d}{ds}(\cos\Theta) - b\right\}$$

Sehingga $k_g = \frac{d\Theta}{ds} + \frac{b}{\sin\Theta}$ ....(7.2)

Selanjutnya jika k_g nol, directrixnya adalah geodetik.

Jika $\frac{d\Theta}{ds}$ nol, directrixnya memotong generator-generator pada sudut konstan.

Jika b nol, directrixnya adalah Line of striction.

Oleh karena directrix pada luasan atur ini boleh diambil sebarang asalkan memotong semua generator, maka terdapatlah theorema berikut ini yang disebut dengan theorema Bonnet :

"Jika suatu kurva yang dilukis pada suatu luasan atur sedemikian sehingga memotong semua generatornya - mempunyai dua dari tiga sifat-sifat yang berikut ini, yaitu :
- kurva itu memotong generator pada sudut konstan
- kurva itu adalah geodetik
- kurva itu adalah Line of striction

maka kurva tersebut akan memenuhi juga sifat yang ketiga."

Jika sebagai directrix dipilih trayektori orthogonal dari generatornya, maka Θ mempunyai nilai konstan $\frac{\pi}{2}$.

Yaitu memotong generator-generatornya dengan sudut konstan, sehingga $\frac{d\theta}{ds}$ sama dengan nol.

Kelengkungan geodetik dari directrix menjadi sama dengan b. Dalam hal ini b sama dengan nol, dimana directrixnya adalah Line of striction.

Karena itu Line of striction dapat dipandang sebagai tempat kedudukan titik-titik dimana kelengkungan geodetik dari trayektori orthogonal generatornya sama dengan nol.

Sekarang kita pandang suatu hal khusus yaitu yang pertama : permukaan yang dibentuk oleh binormal dari garis lengkung ruang.

Parameter distribusi dari permukaan ini sama dengan radius torsion dari garis lengkung itu.

Sebagai directrix diambil garis lengkung itu sendiri , dan $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ masing-masing adalah garis singgung satuan, normal utama dan binormal.

Letak titik pada permukaan itu ditentukan oleh :

$$\bar{R} = \bar{r} + u\,\bar{b}$$

$\bar{r}$ dan $\bar{b}$ merupakan fungsi dari s. Kemudian sebagai parameter adalah u dan s.

Maka $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\bar{l} = \bar{b}$, $\bar{l}' = -\tau\,\bar{n}$

$$D = [\bar{t}\ ,\ -\tau\bar{n}\ ,\ \bar{b}] = (\bar{t} \times -\tau\bar{n}) \cdot \bar{b} = -\tau$$

$$a^2 = \bar{l}' \cdot \bar{l}' = \tau^2$$

$$b = \bar{t} \cdot \bar{l}' = \bar{t} \cdot -\tau\bar{n} = 0$$

Sehingga garis lengkung itu sendiri menjadi Line of striction pada permukaan.

$$\bar{R}_u = \bar{b}$$

$$\bar{R}_s = \bar{t} + u(-\tau\bar{n})$$

$$E = \bar{R}_u \cdot \bar{R}_u = \bar{b} \cdot \bar{b} = 1$$

$$F = \bar{R}_u \cdot \bar{R}_s = \bar{b} \cdot (\bar{t} - u\,\tau\bar{n}) = 0$$

$$G = \bar{R}_s \cdot \bar{R}_s = 1 + u^2\,\tau^2$$

$$H^2 = EG - F^2 = 1 + u^2\tau^2$$

Parameter distribusi $\beta = \frac{D}{a^2} = -\frac{1}{\tau} = -\sigma$

dimana σ = radius torsion dari garis lengkung.

Sehingga β positip jika torsionnya negatip.

Kelengkungan Gauss $K = -\frac{D^2}{H^4} = -\frac{\tau^2}{(1 + u^2\,\tau^2)^2}$

Disuatu titik pada garis lengkung itu sendiri kelengkungan Gauss adalah $-\tau^2$.

Yang kedua kita pandang suatu skew surface yang dibangun oleh normal utama dari garis lengkung ruang. Letak titik pada permukaan ini ditentukan oleh :

$$\bar{R} = \bar{r} + u\,\bar{n}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}\ ,\ \bar{l} = \bar{n}\ ,\ \bar{l}' = \tau\bar{b} - k\,\bar{t}$$

$$D = [\bar{t}\ ,\ \bar{l}'\ ,\ \bar{l}] = \bar{t} \times (\tau\,\bar{b} - k\,\bar{t}) \cdot \bar{n} = -\tau$$

$$a^2 = \bar{l}' . \bar{l}' = \tau^2 + k^2$$

$$b = \bar{t} \cdot \bar{l}' = -k$$

Parameter distribusi $\beta = \frac{D}{a^2} = -\frac{\tau}{\tau^2 + k^2}$

$$E = \bar{R}_u \cdot \bar{R}_u = 1$$

$$F = \bar{R}_u \cdot \bar{R}_s = \bar{n} \cdot [\bar{t} + u\,(\tau\,\bar{b} - k\,\bar{t})] = 0$$

$$G = \bar{R}_s \cdot \bar{R}_s = \left[\bar{t} + u(\tau\bar{b} - k\bar{t})\right] \cdot \left[\bar{t} + u(\tau\bar{b} - k\bar{t})\right]$$

$$= 1 + u^2\tau^2 + k^2u^2 - 2uk$$

$$= (1 - uk)^2 + u^2\tau^2 = H^2$$

$$K = -\frac{D^2}{H^4} = -\frac{\tau^2}{\left\{(1 - uk)^2 + u^2\tau^2\right\}^2}$$

Jadi disuatu titik pada garis lengkung itu sendiri

$$K = -\tau^2$$

Jarak antara garis lengkung ke titik central :

$$\alpha = -\frac{b}{a^2} = \frac{k}{k^2 + \tau^2}$$

II - 8. GARIS ASYMPTOTIK.

Persamaan differensial garis asymptotik diberikan oleh : $L\,du^2 + 2M\,du\,ds + N\,ds^2 = 0$

Berdasarkan (4.3) $L = 0$, sehingga persamaan differensial garis asymptotik menjadi :

$$ds\,(2M\,du + N\,ds) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8.1)$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa garis-garis parameter- s = konstan yaitu generator-generatornya, membentuk satu sistem dari garis asymptotik.

Sedangkan sistem yang lain diberikan oleh persamaan :

$$2M\,du + N\,ds = 0 \quad \text{atau}$$

$$\frac{du}{ds} = -\frac{N}{2M} = -\frac{1}{2D}\left[\bar{l}\,,\ \bar{t} + u\bar{l}',\ \bar{t}' + u\bar{l}''\right]$$

Persamaan ini membentuk suatu persamaan differensial - Riccati yang mempunyai bentuk umum

$$\frac{du}{ds} = P\,u^2 + Q\,u + R \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8.2)$$

dimana P, Q, R adalah fungsi dari s.

Jika penyelesaian particulir dari (8.2) adalah u_1 dan misalkan $u = \frac{1}{w} + u_1$ maka didapat

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_1}{ds} &= P\,u_1^2 + Q\,u_1 + R \\ \frac{du}{ds} &= -\,w^{-2}\,\frac{dw}{ds} + \frac{du_1}{ds} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8.3)$$

Selanjutnya jika harga-harga ini dimasukkan dalam persamaan (8.2) terdapatlah :

$$-\,w^{-2}\,\frac{dw}{ds} + Pu_1^2 + Qu_1 + R = P\left(\frac{1}{w} + u_1\right)^2 + Q\left(\frac{1}{w} + u_1\right) + R$$

$$-\,w^{-2}\,\frac{dw}{ds} = \frac{P}{w^2} + 2P\,\frac{u_1}{w} + \frac{Q}{w}$$

$$\frac{dw}{ds} + (\,2Pu_1 + Q\,)\,w = -\,P$$

dimana persamaan terakhir ini adalah persamaan differensial linier.

Dapat dimengerti bahwa bentuk penyelesaian umum dari persamaan differensial linier ini adalah

$$w = f_1(s) + c\,f_2(s)$$

dimana c menunjukkan konstanta integrasi.

Sehingga bentuk penyelesaian umum dari persamaan differensial (8.2) adalah

$$u = \frac{c\,V + X}{c\,Y + Z} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8.4)$$

dengan V, X, Y, Z adalah fungsi dari s

Penyelesaian ini merupakan famili dari kurva asymptotik dan c mempunyai harga yang berlainan untuk tiap - tiap anggauta dari famili kurva asymptotik itu.

Jikalau sekarang kita pandang empat penyelesaian khusus u_1, u_2, u_3, u_4 yang bersesuaian dengan keempat-nilai-nilai c_1, c_2, c_3, c_4, yaitu

$$u_1 = \frac{c_1V + X}{c_1Y + Z} \quad ; \quad u_2 = \frac{c_2V + X}{c_2Y + Z} \quad ;$$

$$u_3 = \frac{c_3V + X}{c_3Y + Z} \quad ; \quad u_4 = \frac{c_4V + X}{c_4Y + Z} \quad ,$$

maka didapatkan :

$$u_1 - u_2 = \frac{c_1V + X}{c_1Y + Z} - \frac{c_2V + X}{c_2Y + Z}$$

$$= \frac{(c_1V + X)(c_2Y + Z) - (c_2V + X)(c_1Y + Z)}{(c_1Y + Z)(c_2Y + Z)}$$

$$= \frac{(c_2 - c_1)XY + (c_1 - c_2)VZ}{(c_1Y + Z)(c_2Y + Z)}$$

$$u_3 - u_4 = \frac{c_3V + X}{c_3Y + Z} - \frac{c_4V + X}{c_4Y + Z}$$

$$= \frac{(c_3V + X)(c_4Y + Z) - (c_4V + X)(c_3Y + Z)}{(c_3Y + Z)(c_4Y + Z)}$$

$$= \frac{(c_4 - c_3)XY + (c_3 - c_4)VZ}{(c_3Y + Z)(c_4Y + Z)}$$

$$u_1 - u_3 = \frac{c_1V + X}{c_1Y + Z} - \frac{c_3V + X}{c_3Y + Z}$$

$$= \frac{(c_1V + X)(c_3Y + Z) - (c_3V + X)(c_1Y + Z)}{(c_1Y + Z)(c_3Y + Z)}$$

$$= \frac{(c_3 - c_1)XY + (c_1 - c_3)VZ}{(c_1Y + Z)(c_3Y + Z)}$$

$$u_2 - u_4 = \frac{c_2V + X}{c_2Y + Z} - \frac{c_4V + X}{c_4Y + Z}$$

$$= \frac{(c_2V + X)(c_4Y + Z) - (c_4V + X)(c_2Y + Z)}{(c_2Y + Z)(c_4Y + Z)}$$

$$= \frac{(c_4 - c_2)XY + (c_2 - c_4)VZ}{(c_2Y + Z)(c_4Y + Z)}$$

$$\frac{(u_1 - u_2)(u_3 - u_4)}{(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)} =$$

$$\frac{\{(c_2 - c_1)XY + (c_1 - c_2)VZ\}\{(c_4 - c_3)XY + (c_3 - c_4)VZ\}}{\{(c_3 - c_1)XY + (c_1 - c_3)VZ\}\{(c_4 - c_2)XY + (c_2 - c_4)VZ\}}$$

Pembilang menjadi :

$$(c_2 - c_1)(c_4 - c_3)X^2Y^2 + (c_2 - c_1)(c_3 - c_4)XYVZ$$

$$+ (c_1 - c_2)(c_4 - c_3)XYVZ + (c_1 - c_2)(c_3 - c_4)V^2Z^2$$

Penyebut menjadi :

$$(c_3 - c_1)(c_4 - c_2)X^2Y^2 + (c_3 - c_1)(c_2 - c_4)XYVZ$$

$$+ (c_1 - c_3)(c_4 - c_2)XYVZ + (c_1 - c_3)(c_2 - c_4)V^2Z^2$$

Sehingga :

$$\frac{(u_1 - u_2)(u_3 - u_4)}{(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)} = \frac{(c_1 - c_2)(c_3 - c_4)(XY - VZ)^2}{(c_1 - c_3)(c_2 - c_4)(XY - VZ)^2}$$

$$= \frac{(c_1 - c_2)(c_3 - c_4)}{(c_1 - c_3)(c_2 - c_4)}$$

Maka didapatkan suatu theorema :

"Bahwa Cross - Ratio dari empat penyelesaian khusus persamaan differensial Riccati adalah konstan".

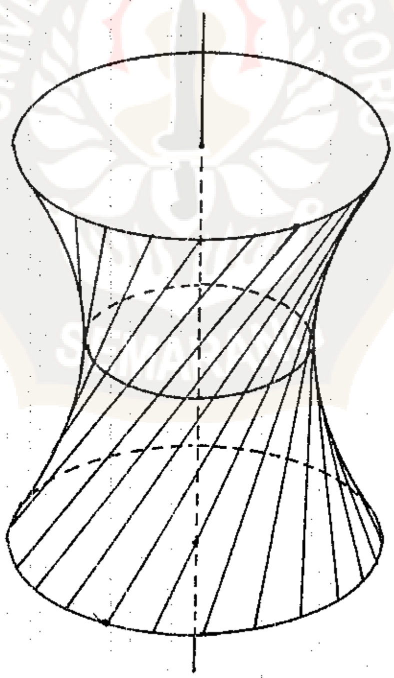
Karena u adalah jarak yang diukur dari directrix sepanjang generator, maka dapat disimpulkan bahwa Cross-Ratio dari titik-titik yang mana suatu generator dipotong oleh empat kurva asymptotik adalah konstan.

II - 9. CONTOH PERMUKAAN DARI TYPE SKEW SURFACE

Sebagai contoh luasan atur yang tak dapat dihamparkan adalah permukaan hiperboloida daun satu :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Sebagai Line Of Striction adalah lingkaran pusat.



Gb. 5

Pertama-tama akan diperlihatkan adanya sistem garis lurus pada hiperboloida ini.

Jika persamaan hiperboloida daun satu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

ditulis dalam bentuk :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{atau}$$

$$(\frac{x}{a} + \frac{z}{c})(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = (1 + \frac{y}{b})(1 - \frac{y}{b})$$

maka didapatkan garis-garis lurus yang dinyatakan oleh

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda(1 - \frac{y}{b}) ,$$

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda} (1 + \frac{y}{b})$$

Jadi untuk tiap-tiap nilai λ dari persamaan ini menyatakan suatu sistem garis lurus pada hiperboloida itu.
Bahwa garis-garis lurus ini terletak pada hiperboloida daun satu, dapat diperlihatkan sebagai berikut :
Ambil sebarang titik (x_1, y_1, z_1) pada garis lurus diatas maka dipenuhi :

$$\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c} = \lambda (1 - \frac{y_1}{b}) ,$$

$$\frac{x_1}{a} - \frac{z_1}{c} = \frac{1}{\lambda} (1 + \frac{y_1}{b})$$

$$(\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c})(\frac{x_1}{a} - \frac{z_1}{c}) = (1 - \frac{y_1}{b})(1 + \frac{y_1}{b})$$

$$\frac{{x_1}^2}{a^2} - \frac{{z_1}^2}{c^2} = 1 - \frac{{y_1}^2}{b^2}$$

$$\frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{b^2} - \frac{{z_1}^2}{c^2} = 1$$

Ini menunjukkan bahwa titik (x_1, y_1, z_1) memenuhi persamaan hiperboloida tersebut. Jadi titik (x_1, y_1, z_1) terletak pada hiperboloida.

Selain sistem garis lurus tersebut diatas, ditemukan pula suatu sistem garis lurus yang kedua pada hiperboloida itu yaitu yang dinyatakan oleh persamaan :

$$(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \mu (1 + \frac{y}{b}) ,$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

Bahwa garis-garis lurus ini seluruhnya untuk setiap nilai dari μ terletak pada hiperboloida itu dapat diper - lihatkan dengan cara yang sama seperti pada sistem garis lurus yang pertama.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa hiperboloida daun satu ini merupakan permukaan yang tak dapat dihamparkan. Untuk itu perlu diketahui suatu sifat dari permukaan yang dapat dihamparkan yaitu bahwa kelengkungan kedua atau kelengkungan Gauss dari permukaan ini adalah - nol, yang nantinya akan dibahas pada bab III.

Sekarang tinggal membuktikan bahwa kelengkungan Gauss- untuk hiperboloida daun satu ini tidak sama dengan nol dan bernilai negatip.

Jika kita masukkan parameter baru :

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,u \\ y &= b\,v \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad u^2 + v^2 - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$z = c(u^2 + v^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{r} = \left[au,\ bv,\ c(u^2 + v^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\bar{r}_u = \left[a,\ 0,\ cu(u^2 + v^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$\bar{r}_v = \left[0,\ b,\ cv(u^2 + v^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$E = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_u = a^2 + \frac{c^2u^2}{u^2 + v^2 - 1}$$

$$F = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = \frac{c^2uv}{u^2 + v^2 - 1}$$

$$G = \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v = b^2 + \frac{c^2v^2}{u^2 + v^2 - 1}$$

$$H^2 = EG - F^2$$

$$H = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{n} = \frac{\bar{r}_u x \bar{r}_v}{H} = \frac{1}{H}\left[- bcu(u^2 + v^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}, -acv(u^2+v^2-1)^{-\frac{1}{2}}, ab\right]$$

$$\bar{r}_{uu} = \left[0,\ 0,\ c(u^2 + v^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} - cu^2(u^2 + v^2 - 1)^{-1\frac{1}{2}}\right]$$

$$\bar{r}_{uv} = \left[0,\ 0,\ - cuv(u^2 + v^2 - 1)^{-1\frac{1}{2}}\right]$$

$$\bar{r}_{vv} = \left[0,\ 0,\ c(u^2 + v^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} - cv^2(u^2 + v^2 - 1)^{-1\frac{1}{2}}\right]$$

$$L = \bar{n} \cdot \bar{r}_{uu} = \frac{1}{H}\left[abc(u^2+v^2-1)^{-\frac{1}{2}} - abcu^2(u^2+v^2-1)^{-1\frac{1}{2}}\right]$$

$$M = \bar{n} \cdot \bar{r}_{uv} = \frac{1}{H}\left[- abcuv(u^2+v^2-1)^{-1\frac{1}{2}}\right]$$

$$N = \bar{n} \cdot \bar{r}_{vv} = \frac{1}{H}\left[abc(u^2+v^2-1)^{-\frac{1}{2}} - abcv^2(u^2+v^2-1)^{-1\frac{1}{2}}\right]$$

$$LN = \frac{1}{H^2}\left[\frac{a^2b^2c^2}{u^2 + v^2 - 1} - \frac{a^2b^2c^2u^2}{(u^2 + v^2 - 1)^2} - \frac{a^2b^2c^2v^2}{(u^2 + v^2 - 1)^2} + \frac{a^2b^2c^2u^2v^2}{(u^2 + v^2 - 1)^3}\right]$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{H^2} x$$

$$\left[\frac{u^4+v^4+1+2u^2v^2-2u^2-2v^2-u^4-u^2v^2+u^2-u^2v^2-v^4+v^2+u^2v^2}{(u^2 + v^2 - 1)^3}\right]$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{H^2} x \frac{(1 - u^2 - v^2 + u^2v^2)}{(u^2 + v^2 - 1)^3}$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{H^2} x \frac{(1 - u^2)(1 - v^2)}{(u^2 + v^2 - 1)^3}$$

$$M^2 = \frac{1}{H^2} x \frac{a^2b^2c^2u^2v^2}{(u^2 + v^2 - 1)^3}$$

$$K = \frac{LN - M^2}{H^2} = \frac{a^2b^2c^2}{H^4} x \frac{(1 - u^2 - v^2 + u^2v^2 - u^2v^2)}{(u^2 + v^2 - 1)^3}$$

$$K = \frac{a^2b^2c^2}{H^4} \times \frac{(1 - u^2 - v^2)}{(u^2 + v^2 - 1)^3}$$

$$\text{Jadi } K = -\frac{a^2b^2c^2}{H^4(u^2 + v^2 - 1)^2} < 0$$

Karena kelengkungan Gauss dari permukaan ini tidak sama dengan nol maka hiperboloida daun satu merupakan permukaan yang tak dapat dihamparkan.