

BAB II

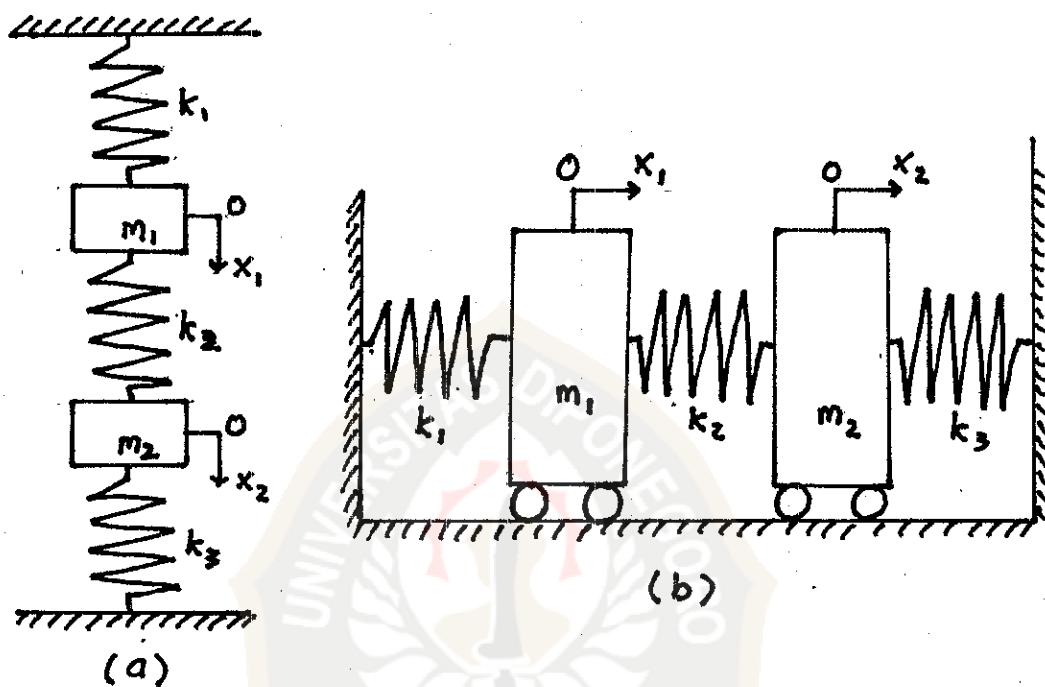
GELARAN SYSTEM MASSA-PEGAS DENGAN BEBERAPA DERAJAD KELEBESAN

Suatu getaran dari sistem massa-pegas dikatakan mempunyai n derajat kelebasan, jika konfigurasi geometrik pada waktu t dapat dinyatakan dengan n koordinat. Oleh karena terdapat n koordinat, maka terdapat n simpangan getaran. Jadi dari getaran dari sistem massa-pegas tersebut dapat dinyatakan dengan n persamaan differensial.

Berikut ini akan dibahas getaran dari sistem massa-pegas dengan dua derajad kelebasan, yang selanjutnya dapat dikembangkan untuk getaran dari sistem massa-pegas dengan n derajad kelebasan.

2-1. Model persamaan differensial getaran bebas dari sistem massa-pegas dengan dua derajad kelebasan.

Misalnya terdapat tiga pegas yang berturut-turut dengan konstante gaya pegas k_1 , k_2 dan k_3 . Ketiga pegas tersebut dihubungkan oleh dua benda masing-masing dengan massa m_1 (benda I) dan massa m_2 (benda II) pada tiap-tiap ujung pegas, dan pada kedua ujung yang lain dipasang dengan dua penahan (gambar 11).



Gambar 11.

Gambar 11 memperlihatkan getaran bebas tak teredam dari sistem massa-springs dengan dua derajat kebebasan, dimana pada gambar 11a arah simpangannya vertikal, dan pada gambar 11b arah simpangannya horizontal. Pada gambar 11b gesekan antara roda dengan lantai diabaikan.

Ditambil titik asal O untuk kedua koordinat, masing-masing pada posisi setimbang dari benda I dan benda II. Pada gambar 11a simpangannya positif jika dari titik - asal O kebawah, dan pada gambar 11b, simpangannya positif jika dari titik O ke kanan.

Jika pada benda I dan benda II bergetar, maka gaya yang bekerja pada benda I dan benda II, yang merupakan - gaya balik, berturut-turut adalah ;

$$-k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) = -(k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2$$

$$-k_3 x_2 - k_2 (x_2 - x_1) = -(k_2 + k_3) x_2 + k_2 x_1$$

dinamai ; x_1 = simpangan benda I.

x_2 = simpangan benda II.

Sehingga dari Hukum Newton II, $F = m a$,

dimana; F = gaya resultan yang bekerja pada benda,

a = percepatan benda, dan

m = massa benda.

maka diperoleh hubungan ;

$$m_1 x_1'' = -(k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2$$

$$m_2 x_2'' = -(k_2 + k_3) x_2 + k_2 x_1$$

atau :

$$m_1 x_1'' + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad \dots(2-1)$$

$$m_2 x_2'' + (k_2 + k_3) x_2 - k_2 x_1 = 0$$

dinamai; m_1 dan m_2 masing-masing adalah massa benda I dan = massa benda II.

x_1'' dan x_2'' masing-masing merupakan percepatan benda I dan benda II.

Persamaan (2-1) merupakan sistem persamaan differensial = getaran bebas tak teredam dari sistem massa-pegas dengan = dua derajad kebebasan.

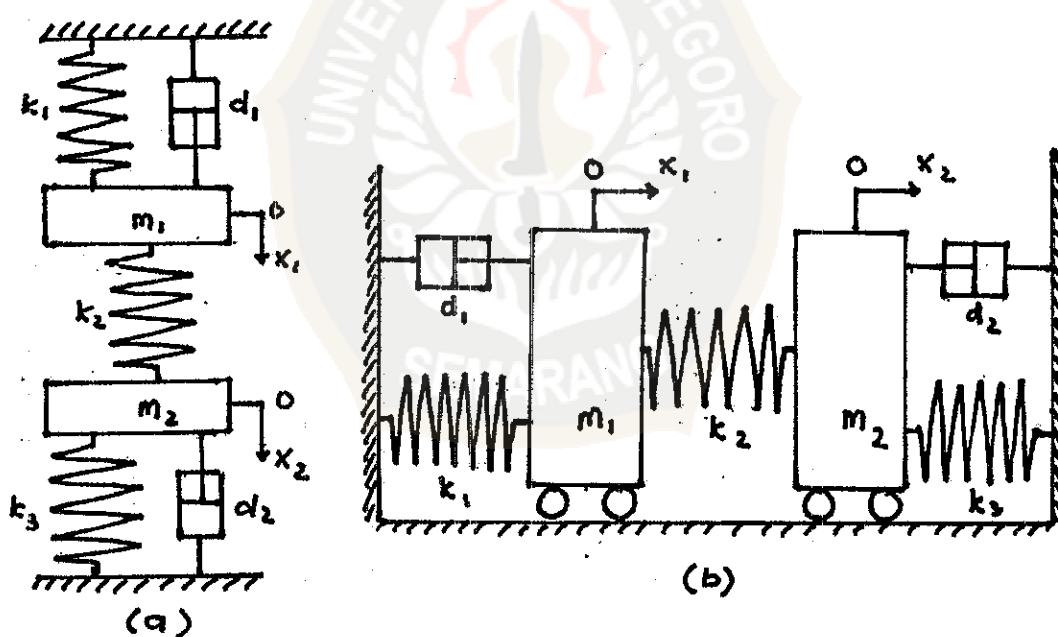
Jika pada sistem massa-pegas gambar 11 diatas tanda = pat gaya redam, yang bekerja pada benda I dan benda II, = seperti diperlihatkan pada gambar 12, maka jika benda I = dan benda II bergetar, gaya total yang bekerja pada benda

I dan benda II, berturut-turut adalah :

$$- (k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 = d_1 x_1'$$

$$- (k_2 + k_3) x_2 + k_2 x_1 = d_2 x_2'$$

dinamis $- d_1 x_1'$ dan $- d_2 x_2'$ masing-masing adalah gaya x_2 dan pada benda I dan benda II; d_1 dan d_2 konstan te rodan positif dan x_1' dan x_2' masing-masing kecepatan dari benda I dan benda II.



Gambar : 12.

sehingga dengan Hukum Newton II, $F = m \cdot a$, diperoleh hubungan :

$$m_1 x_1'' = - (k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 - d_1 x_1'$$

$$m_2 x_2'' = - (k_2 + k_3) x_2 + k_2 x_1 - d_2 x_2'$$

atau :

$$m_1 x_1'' + d_1 x_1' + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad (2-2)$$

(<http://eprints.undip.ac.id>)

Persamaan (2-2) merupakan sistem persamaan differensial getaran bebas teredam dari sistem massa-pegas dengan dua derajad kebebasan.

Misalkan pada gambar 12 antara benda I dan benda II di hubungkan dengan gaya redam (gambar 13), gaya total yang bekerja pada benda I dan benda II berturut-turut adalah ;

$$\begin{aligned} &= (k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 = d_1 x_1^t - d_3 (x_1^t - x_2^t) \\ &= (k_2 + k_3) x_2 + k_2 x_1 = d_2 x_2^t - d_3 (x_2^t - x_1^t) \end{aligned}$$

atau ;

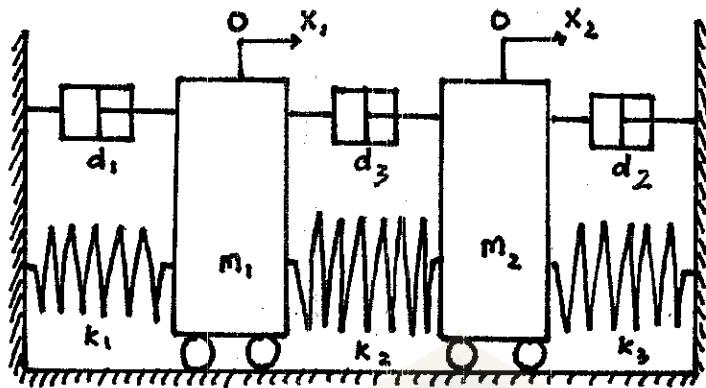
$$\begin{aligned} &= (k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 = (d_1 + d_3) x_1^t + d_3 x_2^t \\ &= (k_2 + k_3) x_2 + k_2 x_1 = (d_2 + d_3) x_2^t + d_3 x_1^t \end{aligned}$$

Sehingga dengan hukum Newton II, $F = m a$, getaran dari sistem massa-pegas pada gambar 13 dapat disajikan dengan sistem persamaan differensial ;

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= - (k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 - (d_1 + d_3) x_1^t + \\ &\quad d_3 x_2^t \\ m_2 x_2'' &= - (k_2 + k_3) x_2 + k_2 x_1 - (d_2 + d_3) x_2^t + \\ &\quad d_3 x_1^t \end{aligned}$$

atau ;

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' + (d_1 + d_3) x_1^t - d_3 x_2^t + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= 0 \quad (2-3) \\ m_2 x_2'' + (d_2 + d_3) x_2^t - d_3 x_1^t + (k_2 + k_3) x_2 - k_2 x_1 &= 0 \end{aligned}$$



Gambar : 13.

Pandang sistem persamaan differensial (2-2) :

$$m_1 x_1'' + d_1 x_1' + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad \dots (2-2)$$

$$m_2 x_2'' + d_2 x_2' + (k_2 + k_3) x_2 - k_2 x_1 = 0$$

Dengan operator D ($D = \frac{d}{dt}$, $D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$), (2-2) dapat

dituliskan dalam bentuk :

$$\{m_1 D^2 + d_1 D + (k_1 + k_2)\} x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad \dots (2-4)$$

$$- k_2 x_1 + \{m_2 D^2 + d_2 D + (k_2 + k_3)\} x_2 = 0$$

Jika persamaan pertama (2-4) digandakan dengan :

$\{m_2 D^2 + d_2 D + (k_2 + k_3)\}$ dan persamaan kedua digandakan dengan k_2 , dan kemudian dijumlahkan; maka diperoleh;

$$\left[[m_1 m_2 D^4 + (m_2 d_1 + m_1 d_2) D^3 + \{m_2 (k_1 + k_2) + m_1 (k_2 + k_3) + d_1 d_2\} D^2 + \{d_2 (k_1 + k_2) + d_1 (k_2 + k_3)\} D + (k_1 + k_2) (k_2 + k_3) - k_2^2] x_1 = 0 \right. \quad \dots (2-5)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may make it freely available for research and preservation:

Persamaan (2-5) merupakan persamaan differensial linier arder empat dengan koefisien konstante, dengan x_1 sebagai variabel tak bebas.

Untuk getaran bebas tak teredam, dimana tidak terdapat gaya redam, jadi $d_1 = d_2 = 0$, maka (2-5) menjadi :

$$\left[m_1 m_2 D^4 + \{m_2 (k_1+k_2) + m_1 (k_2+k_3)\} D^2 + (k_1+k_2) (k_2+k_3) - k_2^2 \right] x_1 = 0 \quad \dots \dots (2-6)$$

Persamaan karakteristik dari (2-6) adalah;

$$D^4 + \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right) D^2 + \frac{(k_1+k_2)(k_2+k_3)-k_2^2}{m_1 m_2} = 0$$

dengan akar-akar ;

$$\beta_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right)^2 + \frac{4 k_2^2}{m_1 m_2}}$$

$$\beta_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right)^2 + \frac{4 k_2^2}{m_1 m_2}}$$

Sehingga penyelesaian umum dari persamaan differensial (2-6) adalah :

$$x_1(t) = C_1 e^{i\beta_1 t} + C_2 e^{-i\beta_1 t} + C_3 e^{i\beta_2 t} + C_4 e^{-i\beta_2 t} \quad \dots \dots (2-7)$$

dimana : C_1 , C_2 , C_3 dan C_4 merupakan konstante yang dapat ditentukan dengan syarat awal.

Dari (2-7), maka :

$$x_1''(t) = -\beta_1^2 C_1 e^{i\beta_1 t} - C_2 \beta_1^2 e^{-i\beta_1 t} - C_3 \beta_2^2 e^{i\beta_2 t} - C_4 \beta_2^2 e^{-i\beta_2 t}$$

$$c_1 (k_1 + k_2 - m_1 \beta_1) e^{+1\beta_1 t} + c_2 (k_1 + k_2 - m_1 \beta_1) e^{-1\beta_1 t} + \\ c_3 (k_2 + k_3 - m_2 \beta_2) e^{+1\beta_2 t} + c_4 (k_2 + k_3 - m_2 \beta_2) e^{-1\beta_2 t} =$$

$$k_2 x_2 = 0$$

$$x_2(t) = c_1 X e^{+1\beta_1 t} + c_2 X e^{-1\beta_1 t} + c_3 P e^{+1\beta_2 t} + c_4 P e^{-1\beta_2 t} \quad \dots (2-8)$$

dimana :

$$X = \frac{k_1 + k_2 - m_1 \beta_1}{k_2}, \quad P = \frac{k_2 + k_3 - m_2 \beta_2}{k_2}$$

Persamaan (2-7) dan (2-8) adalah penyelesaian umum dari sistem persamaan differensial getaran bebas tak teredam dari sistem massa pegas yang dinyatakan oleh (2-1).

Selanjutnya untuk sistem persamaan differensial getaran bebas teredam (2-2), yang dapat dinyatakan dengan persamaan differensial (2-5).

$$\left[m_1 m_2 D^4 + (m_2 d_1 + m_1 d_2) D^3 + \{ m_2 (k_1 + k_2) + m_1 (k_2 + k_3) + d_1 d_2 \} D^2 + \{ d_2 (k_1 + k_2) + d_1 (k_2 + k_3) \} D + (k_1 + k_2) (k_2 + k_3) - k_2^2 \right] x_1 = 0$$

Persamaan karakteristik dari (2-5) adalah :

$$a \lambda^4 + b \lambda^3 + c \lambda^2 + d \lambda + e = 0$$

dengan akar-akar; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dan λ_4

$$\begin{aligned}
 \text{dimana : } a &= m_1 m_2 \\
 b &= m_2 d_1 + m_1 d_2 \\
 c &= m_2 (k_1 + k_2) + m_1 (k_2 + k_3) \\
 d &= d_2 (k_1 + k_2) + d_1 (k_2 + k_3) \\
 e &= (k_1 + k_2) (k_2 + k_3) - k_2^2
 \end{aligned}$$

Sehingga penyelesaian umum dari persamaan differensial - (2-5) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t} \dots \quad (2-9)$$

dimana : C_1, C_2, C_3 dan C_4 merupakan konstante-konstante,

Dengan cara yang sama seperti untuk mendapatkan (2-8), maka diperoleh :

$$x_2(t) = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} + D_3 e^{\lambda_3 t} + D_4 e^{\lambda_4 t} \dots \quad (2-10)$$

dimana : D_1, D_2, D_3 dan D_4 merupakan konstante-konstante.

Persamaan (2-9) dan (2-10) adalah penyelesaian umum dari sistem persamaan differensial getaran bebas teredam dari sistem massa-pegas yang dinyatakan oleh (2-2).

2-2. Getaran bebas dari sistem massa-pegas dengan dua derajad kebebasan.

Simpangan getaran bebas tak teredam dari sistem massa-pegas dengan dua derajad kebebasan dapat dinyatakan dengan (2-7) dan (2-8), yaitu :

$$x_1(t) = C_1 e^{i\beta_1 t} + C_2 e^{-i\beta_1 t} + C_3 e^{i\beta_2 t} + C_4 e^{-i\beta_2 t} \quad \dots \dots (2-7)$$

$$x_2(t) = C_1 R e^{i\beta_1 t} + C_2 R e^{-i\beta_1 t} + C_3 P e^{i\beta_2 t} + C_4 P e^{-i\beta_2 t} \quad \dots \dots (2-8)$$

diketahui : C_1 , C_2 , C_3 dan C_4 adalah konstante-konstante yang dapat ditentukan dengan syarat awal,

$$x_1(0), x_2(0), x_1'(0) \text{ dan } x_2'(0)$$

Persamaan (2-7) dapat dituliskan dengan :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 (\cos \beta_1 t + i \sin \beta_1 t) + C_2 (\cos \beta_1 t - i \\ &\quad \sin \beta_1 t) + C_3 (\cos \beta_2 t + i \sin \beta_2 t) + C_4 \\ &\quad (\cos \beta_2 t - i \sin \beta_2 t) \\ &= (C_1 + C_2) \cos \beta_1 t + (C_1 - C_2) i \sin \beta_1 t + \\ &\quad (C_3 + C_4) \cos \beta_2 t + (C_3 - C_4) i \sin \beta_2 t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Misalkan: } A &= (C_1 + C_2)^2 + (C_1 - C_2)^2, \quad A \geq 0 \\ B &= (C_3 + C_4)^2 + (C_3 - C_4)^2, \quad B \geq 0 \end{aligned}$$

$$C_1 + C_2 = A \cos \theta_1, \quad C_1 - C_2 = A \sin \theta_1$$

$$C_3 + C_4 = B \cos \theta_2, \quad C_3 - C_4 = B \sin \theta_2$$

Maka (2-7) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$x_1(t) = A \cos(\beta_1 t - \theta_1) + B \cos(\beta_2 t - \theta_2) \quad \dots \dots (2-11)$$

(<http://eprints.undip.ac.id>)

Dengan cara yang sama, (2-9) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$x_2(t) = A R \cos(\beta_1 t - \phi_1) + B P \cos(\beta_2 t - \phi_2) \quad \dots \dots (2-12)$$

Persamaan (2-11) dan (2-12) adalah simpangan getaran bebas tak teredam dari sistem massa-pegas dengan dua derajad kebebasan. Simpangan tersebut merupakan simpangan getaran yang tersusun dari dua komponen getaran selaras sederhana, yang pada umumnya dengan amplitudo dan frekuensi sudut yang berbeda. Sehingga simpangan umum getaran bebas tak teredam dari sistem massa-pegas dengan dua derajad kebebasan, dapat dituliskan dalam bentuk:

$$x_1(t) = A \cos(\omega_n t + \phi) \quad \dots \dots (2-13)$$

$$x_2(t) = B \cos(\omega_n t + \phi)$$

dimana : A dan B adalah konstante-konstante,

ω_n = frekuensi sudut natural dan

ϕ = konstante fase.

Untuk menentukan simpangan getaran bebas tak teredam dari sistem massa-pegas dengan n derajad kebebasan yang terdiri dari n simpangan, dapat dipakai cara seperti untuk mendapatkan (2-13) diatas,

Sehingga simpangan getaran bebas tak teredam dari sistem massa-pegas dengan n derajad kebebasan tersusun dari beberapa komponen getaran selaras sederhana, yang pada umumnya dengan amplitudo dan frekuensi sudut yang berbeda.

Oleh karena itu simpangan umum getaran bebas tak teredam dari sistem massa-pegas dengan n derajad kebebasan dapat

dapat dituliskan dalam bentuk :

$$x_n(t) = A_n \cos(\omega t + \phi) \quad \dots \dots (2-14)$$

dimana : A_n = konstante-konstante,

ω = frekuensi sudut natural dan

ϕ = konstante fase.

Untuk getaran bebas teredam dari system masa-pegas dengan dua derajad kebebasan, maka dari (2-9) dan (2-10) simpangannya dapat dinyatakan dengan :

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t} \quad \dots \dots (2-9)$$

$$x_2(t) = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} + D_3 e^{\lambda_3 t} + D_4 e^{\lambda_4 t} \quad (2-10)$$

dimana ; C_i , D_i , $i = 1, 2, 3, 4$ adalah konstante-konstante yang dapat ditentukan dengan syarat awal ;

$$x_1(0), x_2(0), x'_1(0) \text{ dan } x'_2(0)$$

Bentuk dari simpangan komponen-komponen (2-9) dan (2-10) adalah $e^{\lambda t}$ sehingga simpangan umum getaran bebas teredam dari system masa-pegas dengan dua derajad kebebasan dapat dituliskan dalam bentuk ;

$$x_1(t) = A e^{\lambda t} \quad \dots \dots (2-15)$$

$$x_2(t) = B e^{\lambda t}$$

dimana : A , B dan λ adalah konstante-konstante.

Untuk menentukan simpangan getaran bebas teredam dari system masa-pegas dengan n derajad kebebasan, yang terdiri dari n simpangan, dapat dipakai cara seperti un-

tuk mendapatkan (2-15) ditemui. Sehingga simpangan umum getaran bebas teredam dari sistem massa-pegas dengan n derajad kebebasan dapat dituliskan dalam bentuk :

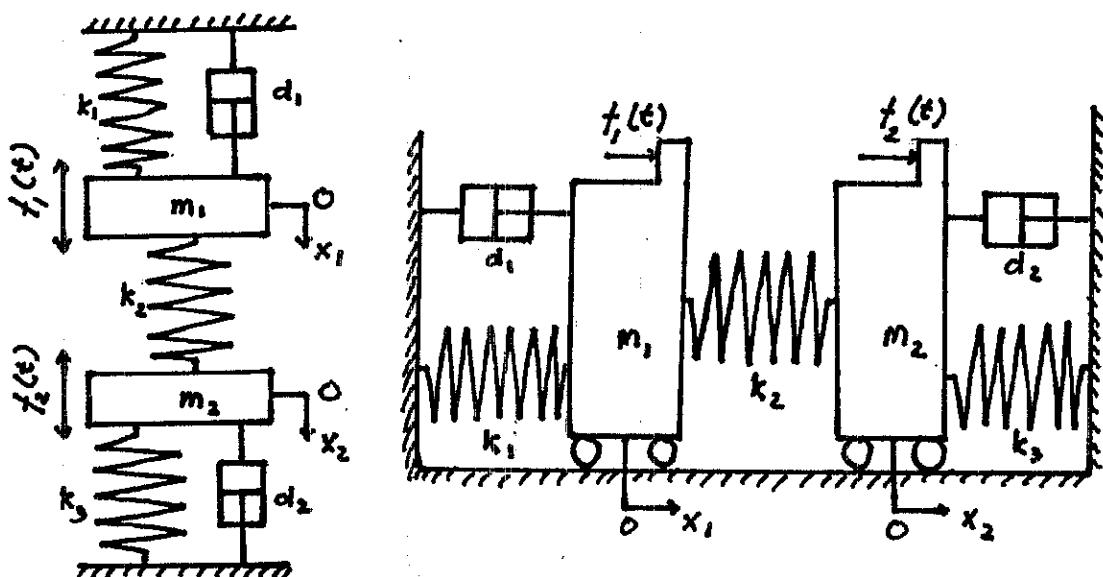
$$x_n(t) = A_n e^{\lambda t} \quad (2-16)$$

dimana : A_n dan λ adalah konstante-konstante.

2-3. Model persamaan differensial getaran dengan gaya paksa dari sistem massa-pegas dengan dua derajad kebebasan.

Misalnya pada sistem massa-pegas seperti pada gambar 12 terdapat gaya paksa yang bekerja pada benda I atau benda II atau keduanya, maka getaran yang terjadi dinamakan getaran paksa.

Misalnya diambil gaya paksa yang bekerja pada benda I dan benda II, seperti diperlihatkan pada gambar 14.



leh :

$$- (k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 = d_1 x_1' + f_1(t)$$

$$- (k_2 + k_3) x_2 + k_2 x_1 = d_2 x_2' + f_2(t)$$

dimana : $f_1(t)$: gaya paksa yang bekerja pada benda I

$f_2(t)$: gaya paksa yang bekerja pada benda II

Sehingga dari Hukum Newton II, $F = m a$,

dimana : F = gaya resultan yang bekerja pada benda,

a = pergesekan benda dan

m = massa benda,

maka diperoleh hubungan:

$$m_1 x_1'' = - (k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 - d_1 x_1' + f_1(t)$$

$$m_2 x_2'' = - (k_2 + k_3) x_2 + k_2 x_1 - d_2 x_2' + f_2(t)$$

atau :

$$m_1 x_1'' + d_1 x_1' + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = f_1(t) \quad (2-17)$$

$$m_2 x_2'' + d_2 x_2' + (k_2 + k_3) x_2 - k_2 x_1 = f_2(t)$$

Persamaan (2-17) merupakan sistem persamaan differensial getaran paksa teredam dari sistem massa-pegas dengan dua derajad kebebasan.

Jika pada sistem massa-pegas gambar 14, tidak terdapat gesekan redam, yaitu jika konstante gesekan redam $d_1 = d_2 = 0$, maka (2-17) merupakan sistem persamaan differensial getaran paksa tak teredam, dan dinyatakan dengan sistem persamaan differensial :

$$m_1 x_1'' + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = f_1(t) \quad (2-18)$$

$$m_2 x_2'' + (k_2 + k_3) x_2 - k_2 x_1 = f_2(t)$$

misalnya diambil gaya peleset yang merupakan gaya periodik /gaya penggetar. Karena gaya penggetarnya merupakan gaya yang periodik, maka dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi cosinus dan sinus. Pungsi cosinus atau sinus merupakan bagian riil atau imajiner dari fungsi eksponen $e^{i\omega t}$, dimana ω adalah frekuensi sudut gaya penggetar. Sehingga (2-17) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' + d_1 x_1' + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= E_1 e^{i\omega_1 t} \quad \dots(2-19) \\ m_2 x_2'' + d_2 x_2' + (k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_1 &= E_2 e^{i\omega_2 t} \end{aligned}$$

disejua : ω_1 = frekuensi sudut gaya penggetar pada benda I,

ω_2 = frekuensi sudut gaya penggetar pada benda II.

Dengan operator L_1 dan L_2 :

$$L_1 = m_1 D^2 + d_1 D + (k_1 + k_2)$$

$$L_2 = m_2 D^2 + d_2 D + (k_2 + k_3)$$

Maka (2-19) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$L_1 x_1 - k_2 x_2 = E_1 e^{i\omega_1 t} \quad \dots(2-20)$$

$$L_2 x_2 - k_2 x_1 = E_2 e^{i\omega_2 t}$$

Jika persamaan pertama digandakan dengan L_2 , dan persamaan kedua digandakan dengan k_2 , kemudian dijumlahkan, maka di peroleh :

$$L_2 L_1 x_1 - k_2^2 x_1 = L_2 (1\omega_1) E_1 e^{i\omega_1 t} + k_2 E_2 e^{i\omega_2 t}$$

$$(L_2 L_1 - k_2^2) x_1 = L_2 (1\omega_1) E_1 e^{i\omega_1 t} + k_2 E_2 e^{i\omega_2 t}$$

Kisalnya $L_2 L_1 - k_2^2 = L$, maka :

$$L x_1 = L_2 (1\omega_1) E_1 e^{1\omega_1 t} + k_2 L_2 e^{1\omega_2 t}$$

atau :

$$x_1(t) = \frac{L_2 (1\omega_1) E_1 e^{1\omega_1 t}}{L (1\omega_1)} + \frac{k_2 E_2}{L (1\omega_2)} e^{1\omega_2 t} \quad (2-21)$$

Dengan memasukkan (2-21) kedalam persamaan pertama (2-20)

$$L_1 x_1 - k_2 x_2 = E_1 e^{1\omega_1 t}$$

$$\frac{L_1 L_2 E_1}{L} e^{1\omega_1 t} + \frac{L_1 k_2 E_2}{L} e^{1\omega_2 t} - k_2 x_2 = E_1 e^{1\omega_1 t}$$

$$k_2 x_2 = (\frac{L_1 L_2}{L} - 1) E_1 e^{1\omega_1 t} + \frac{L_1 k_2 E_2}{L} e^{1\omega_2 t}$$

$$\text{Karena } L_2 L_1 - k_2^2 = L \text{ atau } \frac{L_2 L_1}{L} - 1 = \frac{k_2^2}{L}, \text{ maka}$$

$$k_2 x_2 = \frac{k_2^2 + E_1}{L (1\omega_1)} e^{1\omega_1 t} + \frac{L_1 (1\omega_2) k_2 E_2}{L (1\omega_2)} e^{1\omega_2 t}$$

Sehingga diperoleh :

$$x_2(t) = \frac{E_2 E_1}{L (1\omega_1)} e^{1\omega_1 t} + \frac{L_1 (1\omega_2) E_2}{L (1\omega_2)} e^{1\omega_2 t} \quad (2-22)$$

Persamaan (2-21) dan (2-22) adalah penyelesaian khusus dari sistem persamaan differensial (2-19), yang merupakan amplitudin getaran dalam keadaan steady dari sistem massa-spring dengan dua derajat kebebasan, dimana :

$$L_2 (1\omega) = (k_2 + k_3 - m_2 \omega^2) + i d_2 \omega$$

$$L (1\omega) = L_1 (1\omega) L_2 (1\omega) - k_2^2$$

Jika gaya penggetar $f_1(t) = E_1 \cos \omega_1 t$ atau $= E_1 \sin \omega_1 t$, maka suku pertama dari persamaan (2-21), dan (2-22) berturut-turut diambil harga yang riil atau yang imaginer, demikian juga berlaku untuk gaya penggetar $f_2(t) = E_2 \cos \omega_2 t$ atau $= E_2 \sin \omega_2 t$.

2-4. Getaran paksa dalam keadaan steady dari sistem massa-pegas dengan dua derajad kebebasan.

Simpangan getaran paksa dalam keadaan steady dari sistem massa-pegas dengan dua derajad kebebasan dapat diungkapkan dengan persamaan (2-21) dan (2-22), yaitu :

$$x_1(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{-j\omega_1 t} \quad \dots\dots (2-23)$$

$$x_2(t) = B_1 e^{j\omega_2 t} + B_2 e^{-j\omega_2 t}$$

dimana : ω_1 = frekuensi sudut gaya penggetar benda I,

ω_2 = frekuensi sudut gaya penggetar benda II.

A dan B adalah suatu konstante-konstante.

Simpangan getaran paksa dalam keadaan steady (2-23) terdiri dari dua komponen getaran sederhana, dengan frekuensi sudut yang ditentukan oleh frekuensi sudut gaya penggetar. Dan pada umumnya dengan amplitudo yang berlainan. Sehingga untuk sistem massa-pegas dimana bekerja dua gaya penggetar dengan frekuensi yang sama, simpangan umum getaran dalam keadaan steady dari sistem massa-pegas dengan dua derajad kebebasan, dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A e^{j \omega t} \\x_2(t) &= B e^{j \omega t}\end{aligned}\quad (2-23)$$

Dimana : A dan B adalah konstante-konstante,
frekuensi sudut gaya penggeter.

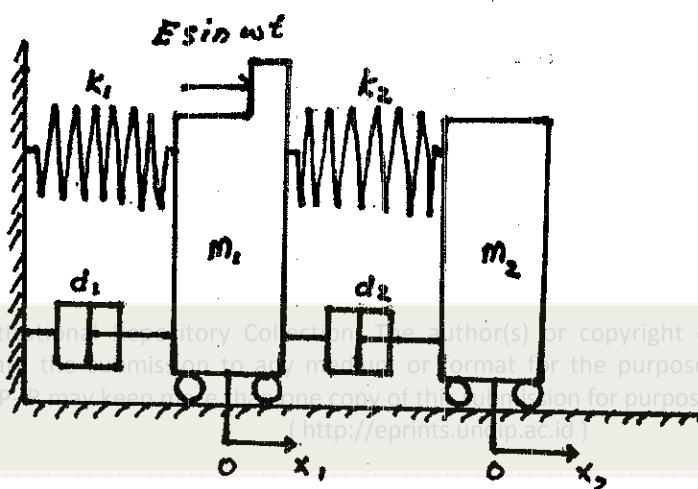
Untuk menentukan siapangan getaran paksa dalam keadaan steady dari sistem massa-pegas dengan n derajat kebebasan, dimana terdapat gaya penggeter dengan frekuensi sudut yang sama, dapat dituliskan dalam bentuk :

$$x_n(t) = A_n e^{j \omega t} \quad (2-24)$$

dinana : A_n adalah konstante-konstante, dan ω frekuensi sudut gaya penggeter.

Misalnya pada suatu getaran paksa teredam dari sistem massa-pegas yang diperlihatkan pada gambar 15, yang hanya terdapat satu gaya penggeter yang bekerja pada benda dengan massa m_1 yang dinyatakan dengan $E \sin \omega t$.

Gesekan roda dengan lantai diabaikan.



Gambar : 15.

Jika benda I dan benda II bergetar.

Gaya yang bekerja pada benda I :

- gaya balik dari pegas dengan konstante gaya pegas k_1 dan dengan perubahan panjang x_1 ,
- gaya balik dari pegas dengan konstante gaya pegas k_2 dan dengan perubahan panjang $(x_1 - x_2)$,
- gaya redam dengan konstante redam d_1 dan dengan - kecepatan x_1' ,
- gaya redam dengan konstante redam d_2 dan dengan - kecepatan $(x_1' - x_2')$, dan
- gaya paku pada benda dengan massa m_1 .

sehingga dapat dituliskan ;

$$\begin{aligned} F_1 = & -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) - d_1 x_1' - d_2 (x_1' - x_2') + \\ & E \sin \omega t. \\ = & -(k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 - (d_1 + d_2) x_1' + d_2 x_2' + \\ & E \sin \omega t. \end{aligned}$$

Gaya total yang bekerja pada benda II :

- gaya balik dari pegas dengan konstante gaya pegas k_2 dan dengan perubahan panjang $(x_2 - x_1)$.
- gaya redam dengan konstante redam d_2 dengan kecepatan $(x_2' - x_1')$.

sehingga dapat dituliskan ;

$$F_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - d_2 (x_2' - x_1')$$

$$= k_2 x_2 + k_1 x_1 - d_2 x_2' + d_2 x_1'$$

(<http://eprints.undip.ac.id>)

Dengan Hukum Newton II, $F = m a$,

- dimana : P = gaya resultan yang bekerja pada benda,
 a = percepatan benda dan
 m = massa benda,

maka diperoleh hubungan :

$$m_1 x_1'' = - (k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 = (d_1 + d_2) x_1' + d_2 x_2' = \\ E \sin \omega t$$

$$m_2 x_2'' = - k_2 x_2 + k_1 x_1 = d_2 x_2' + d_1 x_1' =$$

atau :

$$m_1 x_1'' + (d_1 + d_2) x_1' + (k_1 + k_2) x_1 = d_2 x_2' + k_2 x_2 = \\ E \sin \omega t.$$

$$m_2 x_2'' + d_2 x_2' + k_2 x_2 = d_1 x_1' + k_1 x_1 = 0 \quad \dots (2-25)$$

dimana : m_1 dan m_2 masing-masing adalah massa benda I dan benda II,

x_1'' dan x_2'' masing-masing percepatan benda I dan benda II,

x_1' dan x_2' masing-masing kecepatan benda I dan benda II, dan

x_1 dan x_2 masing-masing simpangan benda I dan benda II.

Simpangan umum getaran paksa terhadap dalam keadaan steady dari sistem massa-sorotan dapat dituliskan dalam bentuk;

$$x_1(t) = \frac{A}{\sqrt{1 - \frac{4}{m_1} \omega^2}} e^{i \omega t} \quad \dots (2-26)$$

$$x_2(t) = \frac{B}{\sqrt{1 - \frac{4}{m_2} \omega^2}} e^{i \omega t}$$

dimana : A , B konstante-konstante yang akan ditentukan, ω frekuensi sudut gaya penggerak.

Dengan substitusi (2-26), kedalam persamaan (2-25), maka di peroleh :

$$\begin{aligned} \{(k_1+k_2) - m_1 \omega^2 + 1(d_1+d_2) \omega\} \bar{A} - (k_2 + 1 d_2 \omega) \bar{B} &= 0 \\ - (k_2 + 1 d_2 \omega) \bar{A} + (k_2 - m_2 \omega^2 + 1 d_2 \omega) \bar{B} &= 0 \end{aligned}$$

Dengan aturan Cramer :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -(k_2 + 1 d_2 \omega) \\ 0 & (k_2 - m_2 \omega^2 + 1 d_2 \omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (k_1+k_2) - m_1 \omega^2 + 1(d_1+d_2) \omega & -(k_2 + 1 d_2 \omega) \\ - (k_2 + 1 d_2 \omega) & (k_2 - m_2 \omega^2 + 1 d_2 \omega) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{0 (k_2 - m_2 \omega^2 + 1 d_2 \omega)}{\{(k_1 + k_2) - m_1 \omega^2 + 1 (d_1 + d_2) \omega\}} \\ &= \frac{1}{\{(k_2 - m_2 \omega^2 + 1 d_2 \omega)^2 - (k_2 + 1 d_2 \omega)^2\}} \\ &= \frac{1}{(m_1 m_2 \omega^4 - m_1 k_2 \omega^2 - m_2 k_1 \omega^2 - d_1 d_2 \omega^2 + k_1 k_2) +} \\ &\quad \frac{1}{1(k_1 d_2 \omega + k_2 d_1 \omega - m_1 k_2 \omega^2 + - m_2 d_1 \omega^2 + m_2 d_2 \omega^2)} \\ A &= \sqrt{\frac{1 \{ (k_2^2 - d_2^2 \omega^2) + (d_2 \omega)^2 \}}{(m_1 m_2 \omega^4 - m_1 k_2 \omega^2 - m_2 k_1 \omega^2 - d_1 d_2 \omega^2 + k_1 k_2)^2}} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh :

$$B = \sqrt{\frac{k_1^2 (k_2^2 + d_2^2 \omega^2)}{(m_1 m_2 \omega^4 m_2 k_2 \omega^2 - m_2 k_1 \omega^2 - d_1 d_2 \omega^2 + k_1 k_2)^2 +}} \\ \frac{1}{(k_1 d_2 \omega + k_2 d_1 \omega - m_1 d_2 \omega^3 + - m_2 d_1 \omega^3 + m_2 d_2 \omega^3)^2} \\ \dots\dots (2-28)$$

Dari teori variabel kompleks, maka \bar{A} dan \bar{B} masing-masing dapat dituliskan :

$$\bar{A} = B (G + i H) = A e^{i \theta_1} = A (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ \bar{B} = B (K + i L) = B e^{i \theta_2} = B (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

dinamai $\theta_1 = \arctg \frac{H}{G}$... (2-29)

$$\theta_2 = \arctg \frac{L}{K}$$

Karena gaya penggetar adalah $B \sin \omega t = I_m (E e^{i \omega t})$
(bagian imaginer dari $B e^{i \omega t}$), maka ;

$$x_1(t) = I_m (\bar{A} e^{i \omega t}) = I_m (A e^{i \theta_1} e^{i \omega t}) \\ = I_m (A e^{i(\omega t + \theta_1)}) \\ = I_m [A \{\cos(\omega t + \theta_1) + i \sin(\omega t + \theta_1)\}]$$

Dengan cara yang sama, diperoleh ;

$$x_2(t) = B \sin(\omega t + \theta_2) \dots\dots (2-31)$$

Persamaan (2-30) dan (2-31) merupakan sifat-sifat getaran-paksa teredam dalam kendaraan steady dari sistem massa-spring yang disajikan dengan sistem persamaan differensial (2-25) dimana :

A dan B diperoleh dari (2-27) dan (2-28), dan θ_1 dan θ_2 diperoleh dari (2-29).

Jika pada sistem massa-spring pada gambar 15, tidak terdapat gaya roda, maka sistem persamaan differensial (2-25) menjadi :

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = B \sin \omega t \quad (2-32)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0$$

Sifat-sifat umum getaran paksa tak teredam dalam keadaan steady dari sistem massa-spring dapat dituliskan dalam bentuk :

$$x_1(t) = C \sin \omega t$$

$$x_2(t) = D \sin \omega t$$

dimana, C dan D konstanta-konstanta yang akan ditentukan.

Dengan substitusi (2-33) kedalam persamaan (2-32), maka diperoleh :

$$(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) C - k_2 D = B$$

$$- k_2 C + (k_2 - m_2 \omega^2) D = 0$$

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -k_2 \\ 0 & (k_2 - m_2 \omega^2) \end{vmatrix}}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \\
 &\quad \times \frac{B (k_2 - m_2 \omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \\
 D &= \frac{\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) & -k_2 \\ -k_2 & 0 \end{vmatrix}}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \\
 &\quad \times \frac{k_2}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}
 \end{aligned}$$

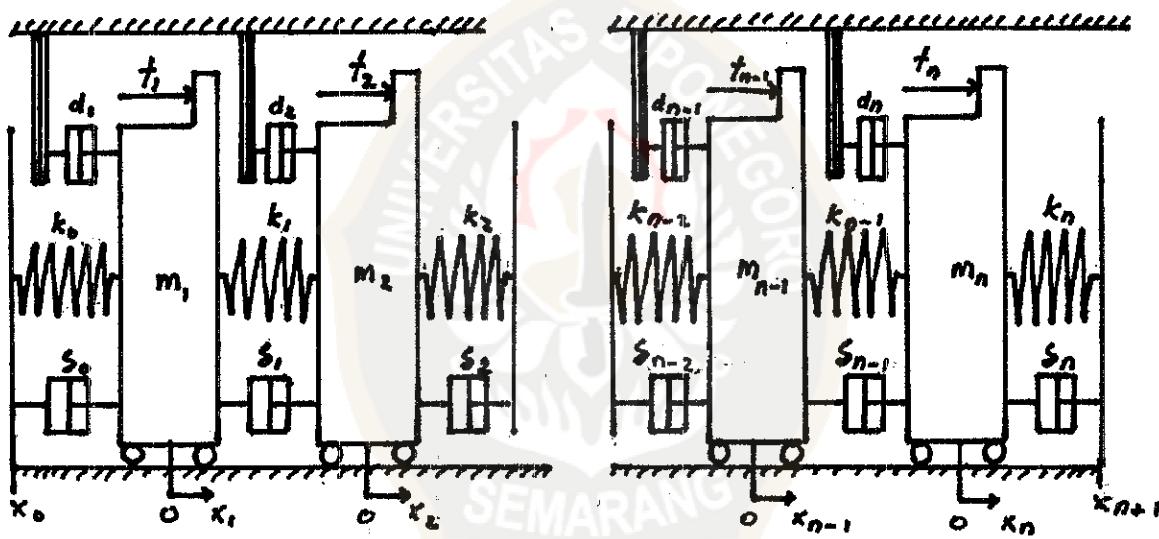
2-5. Model persamaan differensial getaran dari sistem massa-pegas dengan n derajad kebebasan.

Misalkan suatu sistem massa-pegas dengan gaya paksa f_j , $j = 1, 2, \dots, n$, yang bekerja pada tiap-tiap benda masing-masing dengan massa m_j , $j = 1, 2, \dots, n$ seperti diperlihatkan pada gambar 16. Diantara benda satu dengan yang lain, dihubungkan dengan pegas, yang masing-masing dengan konstante gaya pegas k_j , $j = 0, 1, \dots, n$.

Pada ujung pegas yang pertama dan yang terakhir dipasang dengan suatu penahanan.

Pada sistem massa-pegas tersebut bekerja gaya-gaya redam yang dipasang diantara tiap-tiap benda, dengan konstante gaya redam s_j , $j = 0, 1, \dots, n$, dan diantara benda dan bagian yang tetap dengan konstante gaya redam d_j , $j = 1, 2, \dots, n$.

Gesekan tiap-tiap roda dengan lantai diabaikan.



Gambar : 16.

Diambil titik asal 0 untuk tiap-tiap koordinat masing-masing pada posisi setimbang dari tiap-tiap benda, dan simpangan positif jilta dari titik asal 0 ke kanan. Penahanan x_0 dan x_{n+1} adalah tetap.

Jika pada tiap-tiap benda bergetar, maka gaya total yang bekerja pada tiap-tiap benda berturut-turut adalah:

$$-k_0(x_1-x_0) - s_0(x_1-x_0) = d_1x_1 + k_1(x_2-x_1) + s_1(x_2-x_1) + f_1$$

$$-k_1(x_2-x_1) - s_1(x_2-x_1) = d_2x_2 + k_2(x_3-x_2) + s_2(x_3-x_2) + f_2$$

$$= k_{n+2} (x_{n+1} - x_{n+2}) + S_{n+2} (x'_{n+1} - x'_{n+2}) + d_{n+1} x'_{n+1} + \\ k_{n+1} (x_n - x_{n+1}) + S_{n+1} (x'_{n+1} - x'_{n+2}) + f_{n+1}$$

$$= k_{n+1} (x_n - x_{n+1}) + S_{n+1} (x'_{n+1} - x'_{n+2}) + d_n x'_{n+1} + \\ k_n (x_{n+1} - x_n) + S_n (x'_{n+1} - x'_{n+2}) + f_n$$

sehingga dengan Ilukum Newton II, $F = m a$, dimana :

F = gaya resultan yang bekerja pada tiap-tiap benda

a = percepatan benda dan

m = massa benda,

maka diperoleh hubungan :

$$m_1 x''_1 = - k_0 (x_1 - x_0) - S_0 (x'_1 - x'_0) - d_1 x'_1 + k_1 (x_2 - x_1) + S_1 (x'_2 - x'_1) + f_1$$

$$m_2 x''_2 = - k_1 (x_2 - x_1) - S_1 (x'_2 - x'_1) - d_2 x'_2 + k_2 (x_3 - x_2) + S_2 (x'_3 - x'_2) + f_2$$

=

=

$$m_n x''_n = - k_{n-1} (x_n - x_{n-1}) - S_{n-1} (x'_n - x'_{n-1}) - d_n x'_n + k_n (x_{n+1} - x_n) + \\ S_n (x'_{n+1} - x'_n) + f_n$$

atau :

$$m_1 x''_1 + k_0 (x_1 - x_0) + S_0 (x'_1 - x'_0) + d_1 x'_1 = k_1 (x_2 - x_1) + \\ S_1 (x'_2 - x'_1) = f_1$$

$$m_2 x''_2 + k_1 (x_2 - x_1) + S_1 (x'_2 - x'_1) + d_2 x'_2 = k_2 (x_3 - x_2) + \\ S_2 (x'_3 - x'_2) = f_2$$

$$m_n x''_n + k_{n-1} (x_n - x_{n-1}) + S_{n-1} (x'_n - x'_{n-1}) = d_n x'_n - k_n (x_{n+1} - x_n) - \\ S_n (x'_{n+1} - x'_n) = f_n$$

dimana : m_j = massa tiap-tiap benda,
 x_j^0 = percepatan tiap-tiap benda,
 x_j^1 = kecepatan tiap-tiap benda, dan
 x_j^2 = simpangan tiap-tiap benda.

$$j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Persamaan (2-35) adalah sistem persamaan differensial getaran paksa teredam dari sistem massa-pegas dengan n derajad kebebasan.

Jika pada sistem massa-pegas pada gambar 16, tidak terdapat gaya redam, maka konstante gaya redam S_j dan d_j adalah nol. Jadi sistem persamaan differensial (2-35) merupakan sistem persamaan differensial getaran paksa - tak teredam dengan n derajad kebebasan.

Misalkan gaya-gaya paksa yang bekerja pada tiap - tiap benda merupakan gaya periodik, dan dengan frekuensi sudut ω yang sama. Maka untuk menyelesaikan sistem persamaan differensial (2-35), simpangan umum getaran dalam keadaan steady dapat dituliskan dalam bentuk :

$$x_j = A_j e^{i\omega t} \quad \text{dan} \quad f_j = B_j e^{i\omega t} \quad \dots \quad (2-36)$$

dimana : A_j adalah konstante-konstante yang akan ditentukan.

Dengan substitusi (2-36) kedalam (2-35), diperoleh :

$$-m_1 \omega^2 A_1 + (k_0 + i\omega S_0)(A_1 - A_0) + i\omega d_1 A_1 = (k_1 + i\omega S_1) \quad \dots \quad (2-37)$$

$$-m_2 \omega^2 A_2 + (k_1 + i\omega S_1)(A_2 - A_1) + i\omega d_2 A_2 = (k_2 + i\omega S_2) \quad \dots \quad (2-38)$$

$$(A_3 - A_2) = B_2 \quad \dots \quad (2-39)$$

$$\begin{aligned}
 &= m_{n-1} \omega^2 A_{n-1} + (k_{n-2} + i\omega S_{n-2})(A_{n-1} - A_{n-2}) + i\omega d_{n-1} A_{n-1} \\
 (k_{n-1} + i\omega S_{n-1})(A_n - A_{n-1}) &= E_{n-1} \\
 &= m_1 \omega^2 A_1 + (k_{n-1} + i\omega S_{n-1})(A_n - A_{n-1}) + i\omega d_n A_n - \\
 (k_n + i\omega S_n)(A_{n+1} - A_n) &= E_n \quad \dots\dots (2-39)
 \end{aligned}$$

Persamaan (2-37) dapat dituliskan ;

$$\begin{aligned}
 (k_0 + i\omega S_0)(A_1 - A_0) + A_1(i\omega d_1 - m_1 \omega^2) + A_1(k_1 + i\omega S_1) - E_1 &= \\
 A_2(k_1 + i\omega S_1)
 \end{aligned}$$

atau ;

$$A_2 = A_1 + \frac{(k_0 + i\omega S_0)(A_1 - A_0) + A_1(i\omega d_1 - m_1 \omega^2) - E_1}{k_1 + i\omega S_1} \quad (2-40)$$

Dengan cara yang sama, (2-38) dapat dituliskan ;

$$A_2 = A_2 + \frac{(k_1 + i\omega S_1)(A_2 - A_1) + A_2(i\omega d_2 - m_2 \omega^2) - E_2}{k_2 + i\omega S_2} \quad (2-41)$$

Dari persamaan (2-37) ;

$$(k_1 + i\omega S_1)(A_2 - A_1) = (k_0 + i\omega S_0)(A_1 - A_0) + A_1(i\omega d_1 - m_1 \omega^2) - E_1$$

Sehingga persamaan (2-41) menjadi ;

$$A_2 = A_2 + \frac{(k_0 + i\omega S_0)(A_1 - A_0) + A_1(i\omega d_1 - m_1 \omega^2) +}{k_2 + i\omega S_2}$$

$$\underline{\underline{A_2(i\omega d_2 - m_2 \omega^2) - E_1 - E_2}} \quad (2-42)$$

Persamaan (2-42) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$A_h = A_{h+1} + \frac{1}{k_{h+1} + i\omega S_{h+1}}$$

$$\left\{ (k_0 + i\omega S_0)(A_1 - A_0) - \sum_{z=1}^{h-1} A_z (m_z \omega^2 - i\omega d_z) - \sum_{z=1}^{h-1} E_z \right\}$$

....(2-44)

Oleh karena x_0 dan x_{n+1} tetap, maka $A_0 = A_{n+1} = 0$

Dengan demikian jika amplitudo A_1 didapat, maka dapat ditentukan amplitudo A_2 , A_3 dan seterusnya.