BAB I

GETARAN SYSTEM MASA-PEGAS DENGAN SATU DERAJAD KEBEBASAN

Suatu getaran dari system masa-pegas dikatakan mempunyai satu derajad kebebasan, jika konfigurasi geometris pada waktu t dapat dinyatakan dengan satu koordinat.

Pada suatu getaran dimana tidak terdapat gaya paksa yang mempengaruhinya, getaran yang terjadi dinamakan getaran bebas. Sedang apabila terdapat gaya paksa, getaran yang terjadi dinamakan getaran paksa.

Pada getaran bebas apabila tidak ada gaya gesekan/gaya redam, getaran yang terjadi dinamakan getaran bebas tak teredam. Sedang pada getaran bebas, apabila terdapat gaya gesekan/gaya redam, getaran yang terjadi dinamakan getaran bebas teredam.

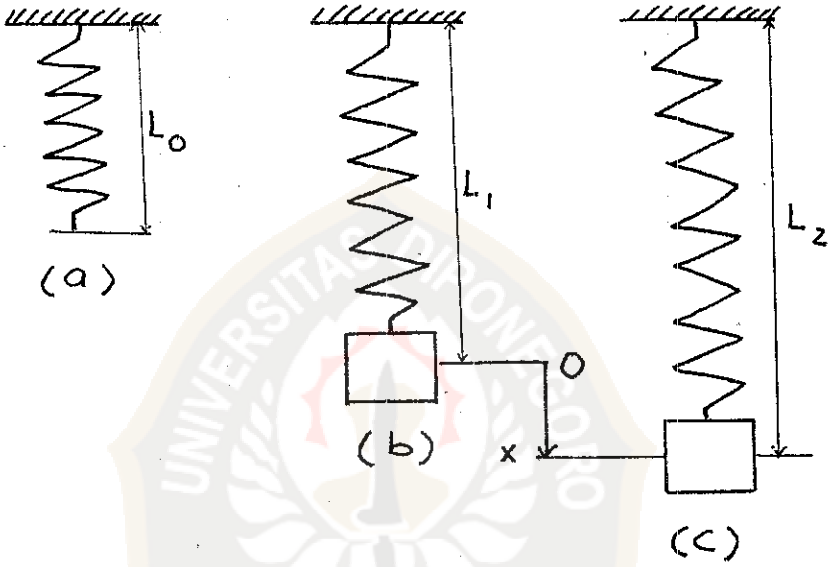
Getaran bebas terjadi, misalnya jika benda pada pegas ditarik dari posisi setimbang, kemudian dilepaskan. Frekuensi getaran yang terjadi pada getaran bebas tak teredam disebut frekuensi natural (alam).

1-1. Model persamaan differensial getaran bebas tak teredam dari system masa-pegas dengan satu derajad kebebasan.

Misalnya suatu pegas homogen dengan panjang natural Lo, digantungkan pada suatu titik (gambar 1).

Pegas mempunyai sifat elastis, yaitu misalnya jika pegas ditarik, dan kemudian dilepaskan, pegas akan kemba

li pada panjang semula, asal dalam penarikannya tidak melampaui batas elastis.



Gambar : 1.

Untuk membahas getaran, digunakan Hukum Hooke yang menyatakan bahwa :

> Jika sebuah benda diubah bentuknya, maka benda tersebut akan melawan perubahan bentuk (deformasi) dengan gaya yang sebanding dengan besarnya deformasi, asalkan deformasi ini tidak terlalu besar (dalam batas-batas tertentu).

Maka dengan Hukum Hooke, selama batas elastis belum dilampaui, perpanjangan pegas sebanding dengan gaya yang digunakan untuk memperpanjangnya.

Misalnya F_s adalah gaya yang digunakan untuk memperpanjang pegas menjadi panjang L_2, maka :

$$F_s = k\,(L_2 - L_0) \qquad \text{.....(1-1)}$$

Jika sebuah benda dengan masa m diikat pada ujung - pegas, sedemikian sehingga pegas memanjang, maka pegas - akan melakukan gaya keatas yang tepat akan mengimbangi - benda, sehingga gaya total yang bekerja pada benda ada - lah nol, jadi benda pada posisi setimbang.

Misalnya L_1 merupakan panjang pegas, ketika benda - dengan masa m di ikat pada ujung pegas dan dalam posisi setimbang (gambar 1 b), dimana perpanjangannya tidak melampaui batas elastis, maka menurut Hukum Hooke :

$$m\,g = k\,(L_1 - L_0) \qquad \text{.....(1-2)}$$

dimana : g = percepatan grafitasi.

Diambil titik asal O, untuk koordinat simpangan benda pada posisi setimbang dari benda dengan masa m, dan - simpangan x positip jika dari titik asal O ke bawah.

Misalnya x merupakan perpanjangan pegas dari posisi setimbang, sehingga menjadi panjang L_2, setelah benda di simpangkan, dimana x dapat nol, positip, atau negatip - (gambar 1 c).

$$\text{Jadi :}\quad x = L_2 - L_1 \quad \text{atau} \quad L_2 = x + L_1 \qquad (1\text{-}3)$$

Dari (1-1), (1-2) dan (1-3), maka diperoleh :

$$\begin{aligned} F_s &= k\,(L_2 - L_0) \\ &= k\,(x + L_1 - L_0) \\ &= kx + k\,(L_1 - L_0) \\ &= kx + mg \end{aligned}$$

$$F_s - mg = kx.$$

(F_s - mg) adalah besarnya gaya yang digunakan untuk memperpanjang pegas dari posisi setimbang, sehingga perubahan panjang/simpangan pegas adalah x.

Jadi pegas melakukan gaya yang merupakan gaya balik sebesar :

$$F = -(F_s - mg) = -kx \qquad \text{.....(1-4)}$$

Tanda negatip di muka kx pada (1-4) berarti arah gaya berlawanan dengan simpangan pegas x, sehingga misalnya x positip, arah gaya kentas.

Sebagai awal pembahasan bab pertama ini, diambil benda bergetar tanpa ada gaya redam, dan tanpa menggunakan gaya paksa.

Dari Hukum Newton II :

$$F = m\,a$$

dimana : F = gaya yang bekerja pada benda dengan massa m yang besarnya - kx.

a = percepatan benda; percepatan merupakan laju perubahan kecepatan terhadap waktu sedang kecepatan merupakan laju perubahan simpangan terhadap waktu, sehingga percepatan dapat dinyatakan dengan derivatif kedua dari simpangan x ke waktu t

Jadi percepatan dapat ditulis :

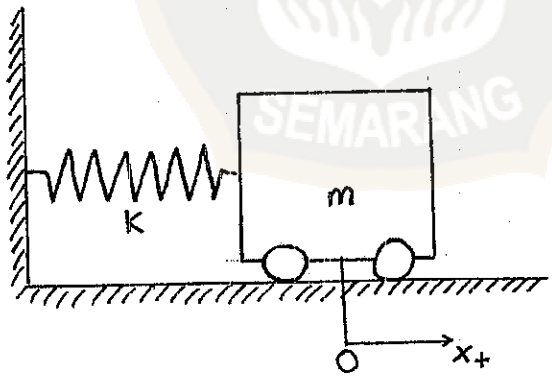
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = x''$$

$$F = m x'' = -kx$$

atau : $m x'' + kx = 0$ .....(1-5)

Persamaan (1-5) adalah persamaan differensial getaran dari system massa-pegas dengan satu derajad kebebasan, tanpa gaya redam dan tanpa gaya paksa, dan merupakan persamaan differensial getaran bebas tak teredam, dimana x merupakan simpangan benda (variabel tak bebas) pada waktu t sebagai variabel bebas.

Persamaan (1-5) dapat diperoleh juga pada getaran dari system massa-pegas pada bidang horizontal, (gambar2) dimana gaya gesekan roda dengan lantai diabaikan.



Gambar : 2.

Diambil titik asal O untuk koordinat simpangan benda pada posisi setimbang dari benda dengan massa m, dan simpangan x positip, jika dari titik asal O ke kanan.

Misalnya benda yang dihubungkan dengan pegas ditarik sepanjang x, maka dengan Hukum Hooke, gaya yang diguna kan untuk menariknya sebesar ;

$$F_s = kx$$

sehingga pegas akan melakukan gaya balik sebesar.

$F = -kx$

Dengan Hukum Newton II, $F = m\,a$, dimana F = gaya yang bekerja pada benda yang merupakan gaya balik, a percepatan benda dengan masa m, maka diperoleh hubungan ;

$$F = m\,x'' = -kx$$

atau : $m\,x'' + kx = 0$ .....(1-5)

Penyelesaian umum dari (1-5) adalah ;

$$x(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\,t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

atau : $x(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$ .....(1-6)

dimana, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

A dan B konstanta-konstanta yang akan ditentukan

1-2. Masalah syarat awal pada getaran bebas tak teredam dari system masa-pegas dengan satu derajad kebebasan.

Simpangan benda pada getaran bebas tak teredam dari system masa-pegas dengan satu derajad kebebasan dapat di nyatakan dengan persamaan (1-6), yaitu :

$$x(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \quad ....(1-6)$$

dimana, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

A dan B adalah konstanta-konstanta yang dapat di tentukan dengan syarat awal yaitu syarat yang di tentukan pada $t = 0$.

Misalnya diambil $C = \sqrt{A^2 + B^2}$; $C \geqslant 0$

$$\frac{A}{C} = \cos \phi \; ; \; \frac{B}{C} = \sin \phi \quad \text{atau} \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{B}{A}$$

Maka (1-6) dapat dituliskan ;

$$x(t) = C \cos \phi \cos \omega_n t + C \sin \phi \sin \omega_n t$$

$$= C \cos (\omega_n t - \phi) \qquad \ldots\ldots(1\text{-}7)$$

Dari (1-6), maka ;

$$x' = -A\,\omega_n \sin \omega_n t + B\,\omega_n \cos \omega_n t \qquad \ldots(1\text{-}8)$$

Misalnya sebagai syarat awal, simpangan benda $x\ (t=0) = x_o$ dan dengan kecepatan $x'\ (t=0) = v_o$, maka dari (1-6) dan (1-8) diperoleh ;

$$A = x_o \; , \quad B = v_o / \omega_n$$

$$\text{Jadi :} \quad C = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega_n}\right)^2}$$

sehingga dari (1-7) simpangan benda pada getaran bebas - tak teredam dari system massa-pegas dengan satu derajad - kebebasan adalah ;

$$x(t) = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega_n}\right)^2} \cos\left(\omega_n t - \operatorname{arctg} \frac{v_o}{\omega_n x_o}\right) \qquad (1\text{-}9)$$

Ditinjau persamaan (1-7);

$$x(t) = C \cos (\omega_n t - \phi)$$

jika $C = 0$, maka benda pada posisi setimbang.

Jika $C \neq 0$, maka benda bergetar diantara C dan $-C$, dan

hanya C disapai jika: $(\omega_n t - \phi)$ berhanga

$0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm$ .....

dan t berharga; $\frac{\phi}{n}, \frac{2\pi + \phi}{n}, \frac{4\pi + \phi}{n}$ ..

Persamaan (1-7) merupakan simpangan getaran selaras sederhana. Periode getar T adalah $\frac{2\pi}{\omega_n}$ dan periode getar tersebut dinamakan periode getaran selaras sederhana Besaran $(\omega_n t - \phi)$ dinamakan fase getaran selaras, dan tetapan ϕ dinamakan tetapan fase.

Jika diambil $\phi_1 = \phi - \frac{\pi}{2}$, maka (1-7) menjadi :

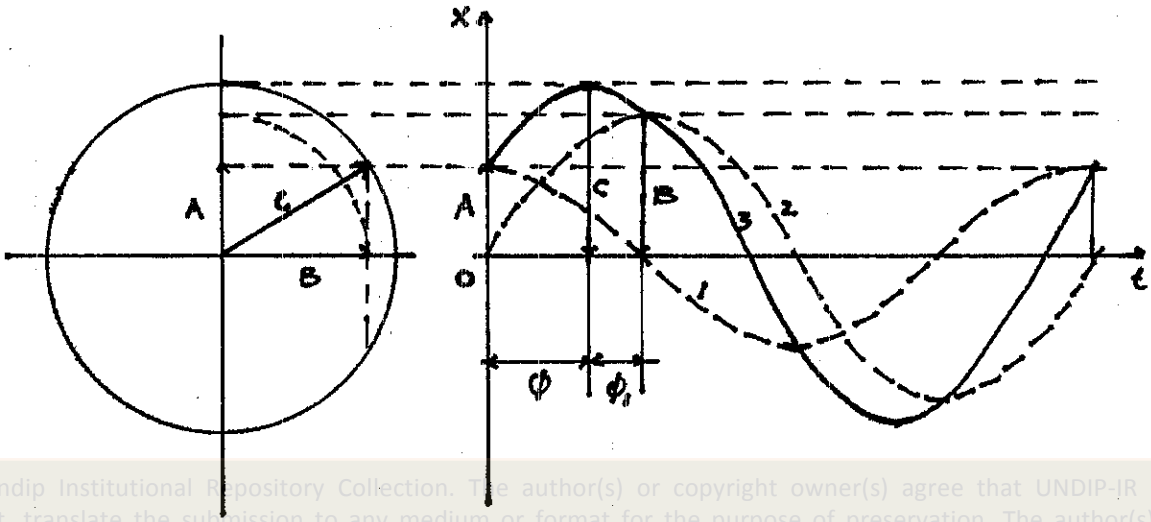
$$x(t) = C \cos\left(\omega_n t - \phi_1 - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= C \cos\left\{\frac{\pi}{2} - (\omega_n t + \phi_1)\right\}$$

$$x(t) = C \sin(\omega_n t + \phi_1) \qquad \text{.....(1-10)}$$

atau :

$$x(t) = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega_n}\right)^2} \sin\left(\omega_n t + \text{Arc tg} \frac{v_o}{\omega_n x_o}\right) \qquad (1\text{-}11)$$



Gambar : 3

1. $x = A \cos \omega_n t$.

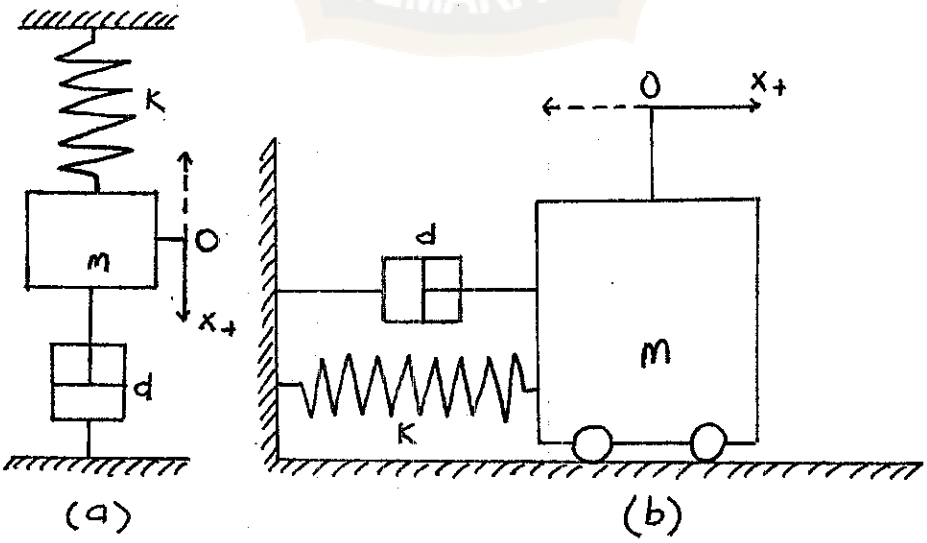
2. $x = B \sin \omega_n t$.

3. $x = C \cos (\omega_n t - \phi)$.

Gambar 3 memperlihatkan simpangan getaran selaras sederhana dari persamaan (1-6) dan (1-7).

1-3. Model persamaan differensial getaran bebas teredam dari system masa-pegas dengan satu derajad kebebasan.

Suatu getaran bebas, apabila amplitudo getaran makin lama berkurang dan akhirnya berhenti, dikatakan bahwa; getaran teredam oleh gesekan/redaman. Getaran ini disebut getaran bebas teredam.



Gambar : 4.

Gambar 4 memperlihatkan getaran bebas teredam dari system masa-pegas dengan satu derajad kebebasan, dengan konstante gaya pegas k dan dengan konstante redam d. Gesekan roda dengan lantai diabaikan.

Besarnya gaya redam biasanya bergantung pada laju - gerak, dan gaya redam melawan arah kecepatan, yang besar nya sebanding dengan besarnya kecepatan.

Karena kecepatan merupakan laju perubahan simpangan x terhadap waktu t, sehingga kecepatan dapat dinyatakan dengan derivatif pertama dari simpangan x ke waktu t, Jadi kecepatan dapat dituliskan $\frac{dx}{dt} = x' = v(t)$.

Jika gaya redam dinyatakan dengan F_d, maka besarnya gaya redam :

$$F_d = -d\,x' \qquad \text{....(1-12)}$$

dimana : d tetapan positip dan disebut konstante redam ,
x' kecepatan benda.

Tanda negatip pada (1-12) berarti gaya berarah keatas jika x' positip dan kebawah jika x' negatip untuk gambar - 4a, sedangkan gambar 4b, gaya berarah kekiri jika x' positip, dan kekanan jika x' negatip.

Misalnya gaya balik yang dilakukan oleh pegas sebesar - kx, maka gaya total yang bekerja pada benda adalah :

$$F = -kx - dx'$$

atau : $m\,x'' + d\,x' + k\,x = 0.$ ....(1-13)

Persamaan (1-13) merupakan persamaan differensial getaran bebas teredam dari system masa-pegas dengan satu derajad kebebasan, dimana x merupakan simpangan benda.

Persamaan karakteristik dari (1-13) adalah :

$$m\lambda^2 + d\lambda + k = 0$$

dengan akar-akar; $\lambda_{12} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$

Jadi penyelesaian umum dari (1-13) adalah ;

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \qquad \ldots\ldots(1\text{-}14)$$

dimana, C_1 dan C_2 adalah konstanta-konstanta yang akan - ditentukan.

1-4. Masalah syarat awal pada getaran bebas teredam dari dari system masa-pegas dengan satu derajad kebebasan.

Simpangan benda pada getaran bebas teredam dari system masa-pegas dengan satu derajad kebebasan dapat dinyatakan dengan persamaan (1-14), yaitu :

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

dimana C_1 dan C_2 konstanta-konstanta yang akan ditentukan.

λ_1, λ_2 akar-akar persamaan karakteristik,

$$\lambda_{12} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

a). Jika $d = \sqrt{4km}$, maka $\sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = 0$, sehingga

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{d}{2m}$$

Jadi persamaan (1-14) menjadi;

$$x(t) = e^{-\frac{d}{2m}t} (C_1 + C_2 t) \qquad \ldots\ldots(1\text{-}15)$$

dan :

$$x'(t) = -\frac{d}{2m} e^{-\frac{d}{2m}t} (C_1 + C_2 t) + e^{-\frac{d}{2m}t} C_2 \qquad (1\text{-}16)$$

dimana konstante-konstante C_1 dan C_2 dapat ditentukan dengan syarat awal bahwa untuk $t = 0$; $x = x_o$; $x' = v_o$

Dengan memasukkan syarat awal kedalam (1-15) dan (1-16) maka diperoleh ;

$$C_1 = x_o \; ; \quad C_2 = v_o + \frac{d}{2m} x_o$$

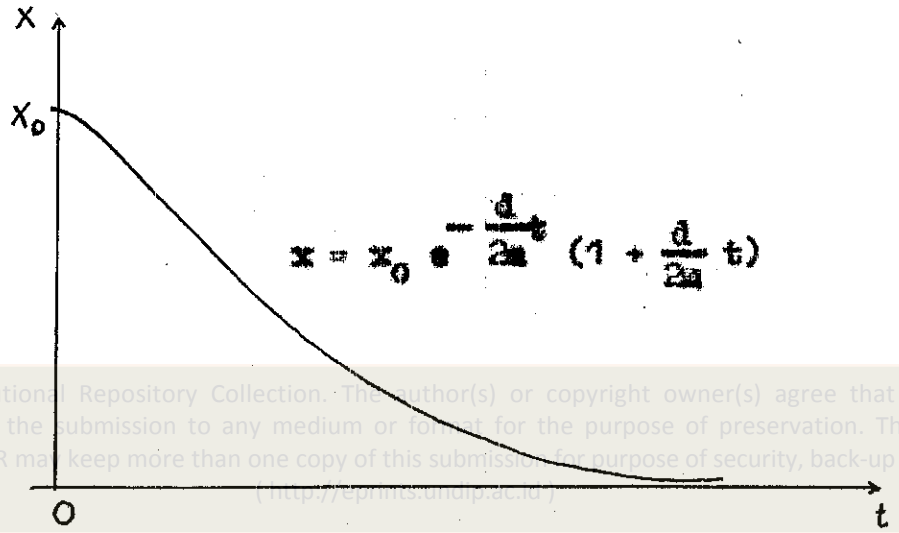
Sehingga dari (1-15), simpangan getaran bebas teredam dari system masa-pegas dengan satu derajad kebebasan menjadi :

$$x(t) = e^{-\frac{d}{2m}t} \left\{ x_o + \left(v_o + \frac{d}{2m} x_o\right) t \right\} \qquad (1\text{-}17)$$

Persamaan (1-17) menyatakan simpangan redaman kritis.

Karena $\frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = 0$, maka $d = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n = \frac{2k}{\omega_n}$

dimana $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$



Gambar 5 memperlihatkan simpangan redaman kritis jika $x = x_o$ dan $v_o = 0$ untuk $t = 0$.

b). Jika $d > \sqrt{4km}$, maka $\lambda_{12} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$

dimana $\sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} > 0$, dan redaman lebih besar dari pada redaman kritis.

Sehingga persamaan (1-14) adalah :

$$x(t) = C_1 \; e^{p_1 t} + C_2 \; e^{p_2 t} \qquad \ldots(1\text{-}18)$$

dan

$$x'(t) = C_1 \, p_1 \, e^{p_1 t} + C_2 \, p_2 \, e^{p_2 t} \qquad \ldots(1\text{-}19)$$

dimana; $p_1 = -\frac{d}{2m} + \sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$, $p_2 = \frac{-d}{2m} - \sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$

C_1 dan C_2 adalah konstante yang dapat ditentukan dengan syarat awal bahwa untuk $t = 0$, $x = x_o$, $x' = v_o$

Dengan memasukkan syarat awal kedalam (1-18) diperoleh :

$$x_o = C_1 + C_2 \quad \text{atau} \quad C_1 = x_o - C_2$$

dan kedalam (1-19) di peroleh :

$$v_o = C_1 \, p_1 + C_2 \, p_2 = (x_o - C_2) \, p_1 + C_2 \, p_2$$

atau : $C_2 = \frac{x_o \, p_2 - v_o}{p_2 - p_1}$ dan $C_1 = x_o - C_1 = \frac{x_o \, p_2 - v_o}{p_2 - p_1}$

Sehingga simpangan getaran bebas teredam dari system masa-pegas dengan satu derajad kebebasan menjadi :

$$x(t) = \frac{x_o \, p_2 - v_o}{p_2 - p_1} \; e^{p_1 t} + \frac{v_o - x_o \, p_1}{p_2 - p_1} \; e^{p_2 t}$$

atau :

$$x(t) = \frac{1}{p_1 - p_2}\left\{(v_o - x_o p_2)\, e^{p_1 t} + (x_o p_1 - v_o)\, e^{p_2 t}\right\} \qquad \ldots\ldots(1\text{-}20)$$

c). Jika $d < \sqrt{4\,km}$, maka :

$$\lambda_{12} = -\frac{d}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{4m^2}}$$

dimana redaman lebih kecil dari pada redaman kritis.

Sehingga persamaan (1-14) adalah :

$$x(t) = e^{-\frac{d}{2m}t}\,(A \cos \omega_{nd} t + B \sin \omega_{nd} t) \qquad \ldots(1\text{-}21)$$

dan

$$x'(t) = -\frac{d}{2m}\, e^{-\frac{d}{2m}t}\,(A\cos \omega_{nd} t + B \sin \omega_{nd} t) + e^{-\frac{d}{2m}t}\,(-A\,\omega_{nd} \sin \omega_{nd} t + B\ {}_{nd} \cos \omega_{nd} t) \ldots \qquad \ldots(1\text{-}22)$$

dimana : $\omega_{nd} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{4m^2}}$

A dan B adalah konstante yang dapat ditentukan dengan syarat awal bahwa untuk $t = 0$, $x = x_o$, $x' = v_o$.

Dengan memasukkan syarat awal, kedalam (1-21) diperoleh:

$$A = x_o ,$$

dan kedalam (1-22) di peroleh :

$$v_o = -\left(\frac{d}{2m}\right) A + \omega_{nd} B \quad \text{atau} \quad v_o = -\left(\frac{d}{2m}\right) x_o + \omega_{nd} B$$

Jadi $B = \frac{1}{\omega_{nd}}\left(v_o + \frac{d}{2m} x_o\right)$

Sehingga simpangan getaran bebas teredam dari system massa-pegas dengan satu derajad kebebasan menjadi :

$$x(t) = e^{-\frac{d}{2m}t}\left\{ x_o \cos \omega_{nd} t + \frac{1}{\omega_{nd}}\left(v_o + \frac{d}{2m} x_o\right) \sin \omega_{nd} t \right\} \qquad \text{....(1-23)}$$

Dengan cara seperti untuk mendapatkan (1-7), maka (1-21) dapat dituliskan :

$$x(t) = C\, e^{-\frac{d}{2m}t} \cos(\omega_{nd} t - \phi) \qquad \text{....(1-24)}$$

dimana : $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $C \geqslant 0$

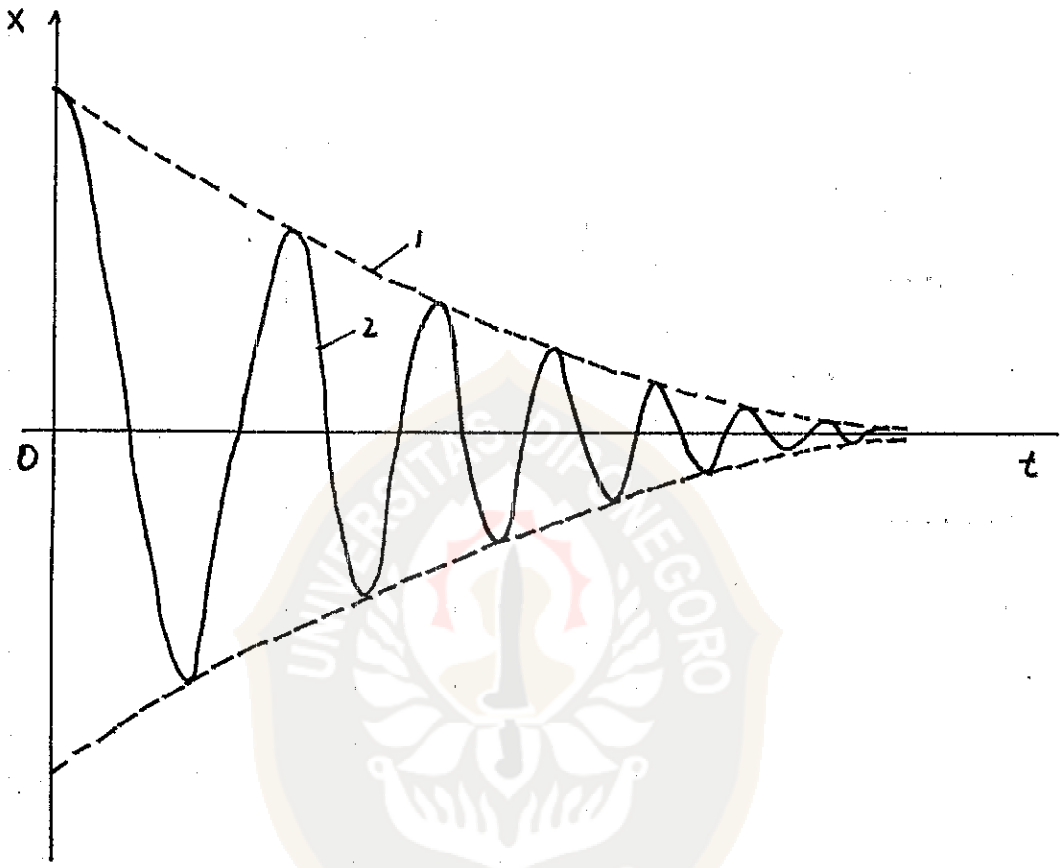
$\phi = \text{arc tg} \frac{B}{A}$

Sehingga (1-24) dapat dituliskan :

$$x(t) = e^{-\frac{d}{2m}t} \sqrt{x_o^2 + \frac{\left(v_o + \frac{d}{2m} x_o\right)^2}{\omega_{nd}^2}} \cos(\omega_{nd} t - \phi) \qquad \text{....(1-25)}$$

Jika $\sqrt{x_o^2 + \frac{\left(v_o + \frac{d}{2m} x_o\right)^2}{\omega_{nd}^2}} = 0$, maka benda pada posisi setimbang.

Jika $\sqrt{x_o^2 + \frac{\left(v_o + \frac{d}{2m} x_o\right)^2}{\omega_{nd}^2}} \neq 0$, maka (1-25) menyatakan getaran selaras teredam, dan untuk $v_o = 0$ dan konstanta fase $\phi = 0$ dapat diperlihatkan pada gambar 6.



Gambar : 6.

$$1.\ x = x_o\, e^{-\frac{d}{2m}t} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2m\ \omega_{nd}}\right)^2}$$

$$2.\ x = x_o\, e^{-\frac{d}{2m}t} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2m\ \omega_{nd}}\right)^2} \operatorname{Cos}(\omega_{nd}\, t - \phi)$$

Persamaan 1 dan 2 memotong sumbu x di titik yang sama yaitu $x_o \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2m\ \omega_{nd}}\right)^2}$. Sumbu t disini merupakan :

Asimtot.

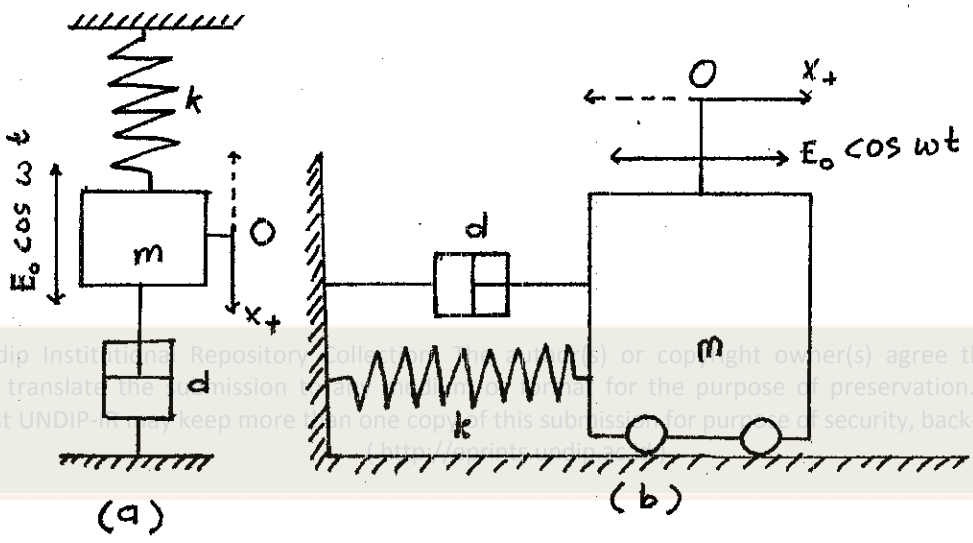
Oleh karena persamaan 2, disamping membuat fungsi - eksponen dengan pangkat negatip, juga memuat fungsi Cos (ω_{nd} t - ϕ) yang merupakan fungsi periodik. Sehingga - persamaan 2 merupakan penggabungan dari kedua fungsi ter

1-5. Model persamaan differensial getaran dari system massa-pegas dengan gaya paksa dengan satu derajad kebebasan.

Getaran pegas yang baru di bahas diatas adalah getaran yang terjadi sendiri atau merupakan getaran bebas. Getaran bebas terjadi, misalnya jika benda ditarik dari posisi setimbang, kemudian dilepaskan.

Selanjutnya jika getaran yang terjadi karena gaya paksa, maka getaran yang terjadi di namakan getaran paksa. Jika gaya paksa merupakan gaya periodik, maka dalam getaran paksa yang dihasilkan oleh gaya periodik tersebut, pada getaran teredam dalam keadaan steady (tidak tergantung pada waktu), frekwensi getaran paksa adalah sama dengan frekwensi gaya periodik (gaya penggetar).

Pada umumnya frekuensi getaran paksa tidak sama dengan frekuensi natural dari getaran bebas. Akan tetapi respon dari getaran bergantung pada hubungan antara frekuensi getaran paksa dan frekuensi natural dari system.



Gambar : 7.

Gambar 7 memperlihatkan getaran paksa teredam dari sys - tem massa-pegas dengan satu derajad kebebasan, dengan kon stante gaya pegas k dan konstante redam d. Gesekan roda dengan lantai diabaikan.

Misalnya gaya paksa dinyatakan dengan f (t), maka - gaya-gaya yang bekerja pada benda adalah gaya balik - kx gaya redam - dx' dan gaya paksa f (t).
Sehingga gaya total yang bekerja pada benda adalah :

$$- dx' - kx + f(t)$$

Dengan Hukum Newton II, F = ma , dimana F gaya total - yang bekerja pada benda dengan massa m, a adalah percepat an benda, maka diperoleh :

$$F = mx'' = - dx' - kx + f(t)$$

atau : $mx'' + dx' + kx = f(t)$ ...(1-26)

Persamaan (1-26) merupakan persamaan differensial getar- an paksa teredam dari system massa-pegas dengan satu derajad kebebasan, dimana x menyatakan simpangan benda.

Jika pada (1-26), tidak ada gaya redam, yaitu jika konstante redam d = 0, maka (1-26) menjadi persamaan diffe - rensial getaran paksa tak teredam dari system massa-pegas dengan satu derajad kebebasan.

Misalnya gaya paksa dinyatakan oleh gaya periodik - (gaya penggetar) yang merupakan fungsi cosinus atau si - nus.

Misalnya di ambil gaya penggetar $f(t) = F_o \cos \omega t$, dimana ω frekuensi sudut gaya penggetar, dan F_o adalah

gaya maksimum dari gaya penggetar, maka (1-26) menjadi :

$$mx'' + dx' + kx = E_0 \cos \omega t.$$

atau : $x'' + bx' + c\,x = E_1 \cos \omega t.$ ....(1-27)

Karena cos t merupakan bagian riil dari $e^{i\omega t}$, dimana $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$, maka (1-27) merupakan bagian riil dari persamaan differensial :

$$x'' + bx' + c\,x = E_1 e^{i\omega t}$$

Dengan operator D ($D = \frac{d}{dt}$; $D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$), persamaan (1-27) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$(D^2 + b\,D + c)\,x = E_1 e^{i\omega t} \qquad ....(1-28)$$

Persamaan differensial homogen dari (1-28) adalah :

$$(D^2 + b\,D + c)\,x = 0 \qquad ....(1-29)$$

yang merupakan persamaan differensial (1-5) jika $b = 0$ (atau $d = 0$), dan persamaan differensial (1-13) jika $b \neq 0$. Sehingga untuk mendapatkan penyelesaian umum dari (1-29), seperti halnya mencari penyelesaian umum dari ke dua persamaan differensial tersebut diatas, dan misalnya penyelesaiannya adalah x_c (t).

Penyelesaian khusus dari (1-28) dari :

$$x_p = \frac{1}{D^2 + b\,D + c}\, E_1 e^{i\omega t}$$

$$= \frac{E_1}{c - \omega^2 + bi\,\omega}\, e^{i\omega t} \qquad ....(1-30)$$

Jika $\bar{z} = c - \omega^2 + ib\,\omega$, dan harga mutlaknya :

$$z = \sqrt{(c - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2} \qquad \ldots\ldots(1\text{-}31)$$

$$\cos \psi = \frac{c - \omega^2}{z} \; ; \quad \sin \psi = \frac{b\,\omega}{z} \; ,$$

atau : $$\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{b\,\omega}{c - \omega^2} \qquad \ldots\ldots(1\text{-}32)$$

Maka $$\bar{Z} = c - \omega^2 + ib\omega = z \cos \psi + i\, z \sin \psi$$

$$= z\, e^{i\psi} \qquad \ldots\ldots(1\text{-}33)$$

Dari (1-30) dan dengan (1-33), maka :

$$x_p = \frac{E_1}{z\, e^{i\psi}}\, e^{i\omega t}$$

$$= \frac{E_1}{z}\, e^{i(\omega t - \psi)}$$

$$= \frac{E_1}{z} \left\{ \cos(\omega t - \psi) + i \sin(\omega t - \psi) \right\} . \qquad (1\text{-}34)$$

Karena (1-27) merupakan bagian riil dari (1-28), maka penyelesaian khusus dari (1-27), diambil harga yang riil dari penyelesaian khusus (1-34), yaitu :

$$x_p = \frac{E_1}{z} \cos(\omega t - \psi) .$$

Sehingga penyelesaian umum dari (1-27) adalah ;

$$x(t) = x_c(t) + \frac{E_1}{z} \cos(\omega t - \psi) \qquad \ldots(1\text{-}35)$$

dimana $x_c(t)$ penyelesaian umum dari (1-29).

1-6. Getaran dengan gaya paksa dalam keadaan steady dari system massa-pegas dengan satu derajad kebebasan.

Simpangan benda pada getaran dengan gaya paksa dari system masa-pegas dengan satu derajad kebebasan dapat di nyatakan dengan (1-35) ;

$$x(t) = x_c(t) + \frac{E_1}{z}(\omega t - \psi)$$

dimana; $x_c(t)$ penyelesaian umum dari (1-29).

$\frac{E_1}{z}\cos(\omega t - \psi)$ penyelesaian khusus dari persamaan differensial (1-34).

Jika konstante redam $d \neq 0$, dan $x_c(t) \longrightarrow 0$ untuk suatu t, maka setelah waktu tersebut, x (t) menunjukkan getaran dalam keadaan steady (tetap tidak tergantung pada waktu), dan (1-35) menjadi ;

$$x(t) = \frac{E_o}{m\,z}\cos(\omega t - \psi) \qquad \ldots(1\text{-}36)$$

yang merupakan penyelesaian khusus dari (1-27), dan menyatakan getaran selaras sederhana, dengan frekuensi yang sama dengan frekuensi gaya penggetar.

Amplitudo getaran dari (1-36) berbentuk :

$$A(\omega) = \frac{E_o}{m\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \frac{d^2\,\omega^2}{m^2}}}$$

$$= \frac{E_o}{\sqrt{m^2\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + d^2\,\omega^2}}$$

Jadi amplitudo getaran bergantung pada frekuensi sudut gaya penggetar ω.

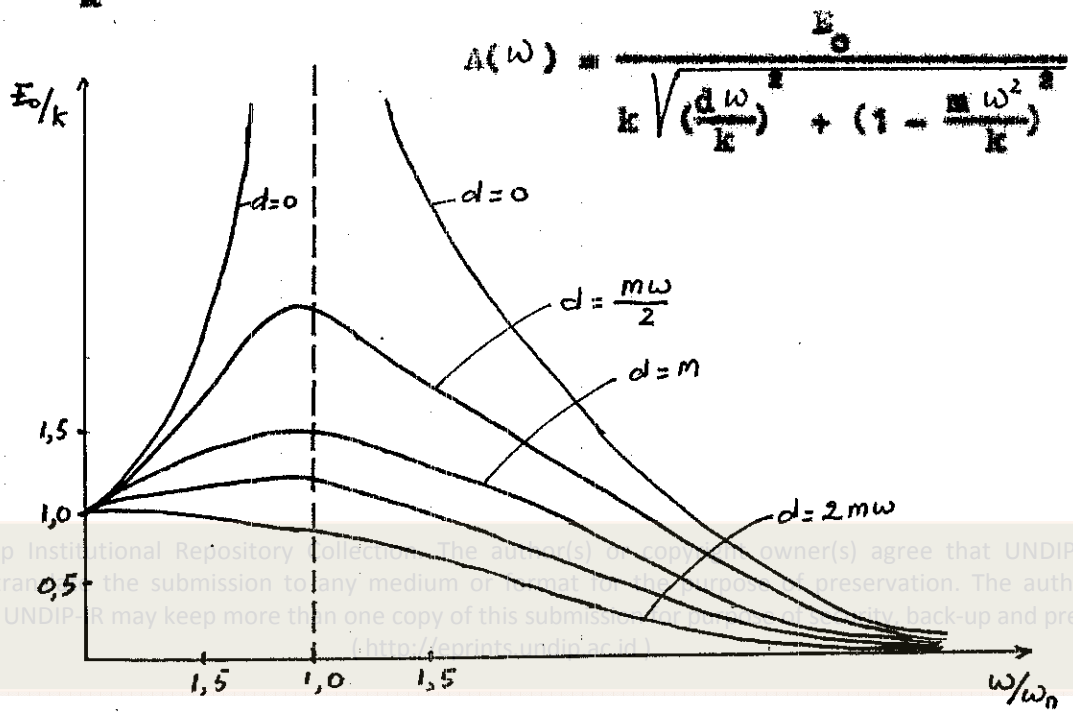
Jika frekuensi sudut gaya penggetar, yaitu ω sama dengan frekuensi sudut natural dari getaran bebas tak teredam (getaran selaras sederhana) yaitu $\sqrt{\frac{k}{m}}$, maka kejadian ini disebut resonansi, dan frekuensi gaya penggetar dimana resonansi terjadi disebut frekuensi resonansi.

Dalam hal ini besarnya amplitudo adalah :

$$A = \frac{E_o}{\sqrt{m^2\left(\frac{k}{m} - \frac{k}{m}\right)^2 + d^2\frac{k}{m}}} = \frac{E_o}{d\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{E_o}{d}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= \frac{1}{2\pi d} E_o \left(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)$$

yang menunjukkan bahwa amplitudo resonansi berbanding - terbalik dengan konstante redam d, berbanding lurus de - ngan E_o dari gaya penggetar E_o Cos ω t, dan berbanding - lurus dengan periode getaran bebas tak teredam yaitu : $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.



Gambar : 8.

Gambar 8 melukiskan grafik antara amplitudo getaran paksa, yaitu A (ω), terhadap frekuensi sudut. Untuk kejadian resonansi, jika konstante redam d tidak terlalu - besar (gaya redam tidak terlalu besar), maka amplitudo - getaran akan mencapai suatu maximum.

Jika frekuensi gaya penggetar $\omega = 0$, maka simpangan yang dihasilkan adalah :

$$A\ (\omega = 0) = \frac{E_o}{\sqrt{m^2\ (\frac{k}{m} - \omega^2)\ + d^2\ \omega^2}} = \frac{E_o}{k}$$

Ini tidak lain adalah simpangan yang terjadi jika pegas dengan konstante gaya pegas k ditarik oleh gaya statik - sebesar E_o.

Selanjutnya untuk getaran tak teredam, dalam hal ini b = d = 0 , tetapi frekuensi gaya penggetar $\omega \neq \frac{k}{m}$, maka dari (1-32) dan (1-31), diperoleh :

$$\sin \psi = 0 \ , \ \text{jadi} \ \psi = 0 \ \text{atau} \ \psi = \pi$$

$$z = |\ c - \omega^2\ |$$

Sehingga (1-35) menjadi :

$$x\ (t) = C \cos\ (\sqrt{\frac{k}{m}}\ t - \phi) + \frac{E_o}{m\left|\ \frac{k}{m} - \omega^2\ \right|} \cos \omega t \quad (1\text{-}37).$$

dimana $C \cos\ (\sqrt{\frac{k}{m}}\ t - \phi)$ adalah penyelesaian persamaan - differensial getaran beban tak teredam.

Persamaan (1-37) merupakan getaran dalam keadaan steady dari getaran paksa tak teredam dari system masa-pegas dg

Jika besarnya konstante fase ϕ nol, konstante C dan koeffisien suku kedua dari (1-37) besarnya sama, maka amplitudo dari simpangan x (t) akan menghasilkan layangan (beat).

Misalnya :

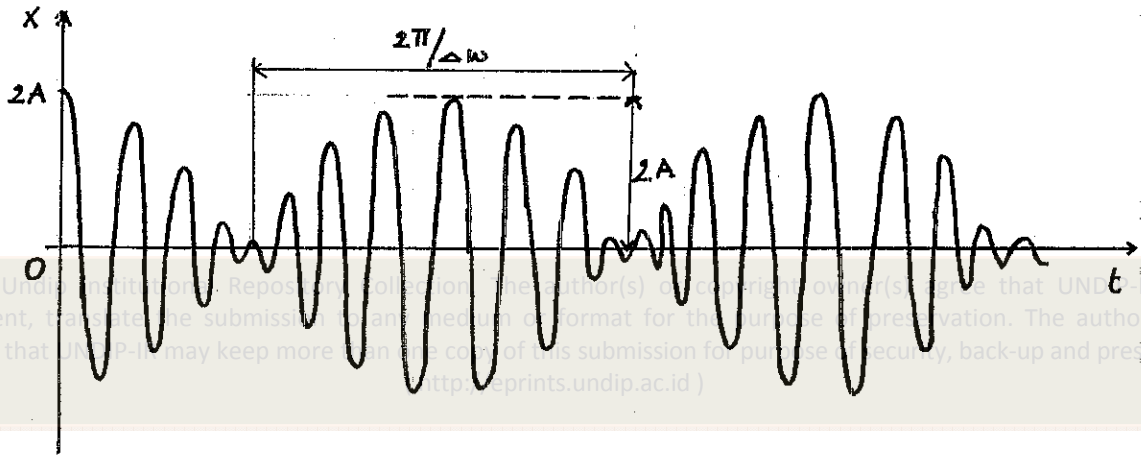
$$x(t) = A \cos \omega t + A \cos (\omega + \Delta\omega) t$$
$$= 2A \left\{ \cos \tfrac{1}{2} (2\omega t + \Delta\omega t) \cos \tfrac{1}{2} (-\Delta\omega t) \right\}$$
$$= \left\{ 2A \cos \tfrac{1}{2} \Delta\omega t \right\} \left\{ \cos (\omega + \tfrac{1}{2}\Delta\omega) t \right\}$$

Amplitudo dari simpangan x (t) berayun antara nol dan 2 A yang sesuai dengan $2A \cos \frac{1}{2}\Delta\omega t$, sedangkan simpangan x (t) merupakan gelombang cosinus dengan frekuensi sudut yang sama dengan $(\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega)$.

Pola khusus dari getaran ini diperlihatkan sebagai gejala layangan (beating phenomenon). Frekuensi layangan dapat ditentukan dengan menentukan amplitudo maximum yang berurutan, yang besarnya :

$$f_b = \frac{\Delta\omega + \omega}{2\pi} - \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \text{ cycles/detik.}$$

dan periode $T = \frac{1}{f_b} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ detik



Jika konstante redam $d = 0$, dan $z = c - \omega^2 + ib = 0$, dimana frekuensi gaya penggetar $\omega > 0$, maka $b = \frac{d}{m} = 0$ dan $\omega = \sqrt{c} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, sehingga persamaan differensial menjadi :

$$x'' + c\,x = B_1 \cos \sqrt{c}\ t. \qquad \ldots(1\text{-}38)$$

Persamaan (1-38) merupakan bagian riil dari :

$$x'' + c\,x = B_1\ e^{i\sqrt{c}\ t} \qquad \ldots(1\text{-}39)$$

Persamaan homogen dari (1-39) adalah :

$$x'' + c\,x = 0$$

dengan penyelesaian umum :

$$x_c = C \cos(\sqrt{c}\ t - \phi)$$

Penyelesaian khusus dari (1-39) adalah :

$$x_p = \frac{B_1}{D^2 + c}\ e^{i\sqrt{c}\ t}$$

$$= \frac{B_1}{2\sqrt{c}\ i}\ \frac{1}{D - \sqrt{c}\ i}\ e^{i\sqrt{c}\ t}$$

$$= \frac{B_1}{2\,i\sqrt{c}}\ e^{i\sqrt{c}\ t}\ dt$$

$$= \frac{B_1}{2\,i\sqrt{c}}\ e^{i\sqrt{c}\ t}\ t$$

$$x_p = \frac{B_1}{2\sqrt{c}}\ t\,(-i \cos\sqrt{c}\ t + \sin\sqrt{c}\ t)$$

Karena (1-38) merupakan bagian riil dari (1-39) maka diambil harga yang riil, sehingga diperoleh penyelesaian -

khusus dari (1-38) ;

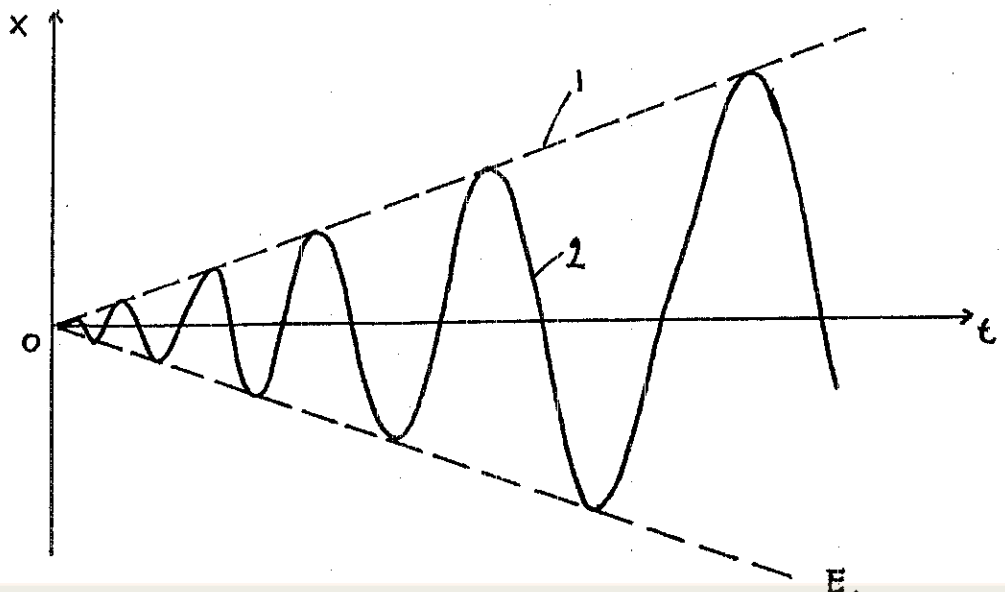
$$x_p = \frac{E_1}{2\sqrt{c}}\, t \sin\sqrt{c}\, t$$

sehingga penyelesaian umum dari (1-38) adalah :

$$x(t) = C \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \phi\right) + \frac{E_1}{2\sqrt{\frac{k}{m}}}\, t \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t \qquad (1\text{-}40)$$

Persamaan (1-40) merupakan simpangan benda pada getaran paksa tak teredam dari system massa-pegas dengan satu derajad kebebasan.

Suku pertama dari ruas kanan merupakan simpangan getaran selaras sederhana, sedangkan suku keduanya bertambah besar jika t bertambah besar, dan ditunjukkan seperti pada gambar 10.



1) $x = \frac{E_1}{2\sqrt{\frac{k}{m}}}\, t$

2) $x = \frac{E_1}{2\sqrt{\frac{k}{m}}}\, t \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$

Gambar : 10.