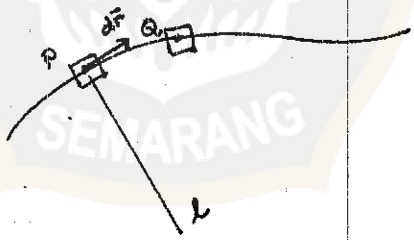
BAB III

TINJAUAN UMUM JURUSAN SEKAWAN DAN GARIS ASIMPTOTIK PADA SUATU PERMUKAAN

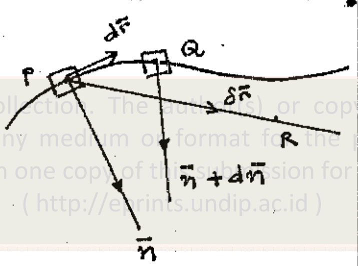
III.1 JURUSAN SEKAWAN

Definisi : Titik P dan titik Q merupakan titik-titik yang saling berdekatan pada suatu permukaan. Sedang l merupakan garis potong bidang-bidang singgung yang melalui titik P dan titik Q (lihat gambar dibawah).

Jika titik Q mendekati titik P dalam kedudukan limit ,maka arah-arah l dan PQ disebut jurusan sekawan dititik P.



Dengan lain kata dapat dituliskan sebagai berikut: $\bar{n}$ dan $\bar{n}$ + d$\bar{n}$ merupakan normal-normal satuan dititik P dan dititik Q yang saling berdekatan. Andaikan PR garis potong bidang-bidang singgung dititik P dan titik Q,maka PR sejajar dengan bidang-bidang singgung tersebut. Jika vektor PR disajikan dengan $\delta\bar{r}$,diperoleh $\delta\bar{r}$ tegak lurus dengan normal-normal $\bar{n}$ dan $\bar{n} + d\bar{n}$.



Pada gambar $d\bar{r}$ dan $\delta\bar{r}$ merupakan jurusan sekawan dititik P sehingga :

$$d\bar{r} \perp \bar{n}\,, \quad \delta\bar{r} \perp \bar{n} \text{ dan } \quad \delta\bar{r} \perp (\bar{n} + d\bar{n})$$

oleh karena itu $d\bar{r}\,.\bar{n} = 0$, $\delta\bar{r}\,.\bar{n} = 0$ demikian pula untuk $\delta\bar{r}.(\bar{n} + d\bar{n}) = \delta\bar{r}\,.\bar{n} + \delta\bar{r}\,.d\bar{n} = 0$

Karena $\delta\bar{r}.\bar{n} = 0$ maka didapat $\delta\bar{r}\,.d\bar{n} = 0$ dan telah dijelaskan bahwa :

$$d\bar{n} = \bar{n}_u\, du + \bar{n}_v\, dv$$

$$\delta\bar{r} = \bar{r}_u\, \delta u + \bar{r}_v\, \delta v$$

Sehingga dari kedua persamaan didapat :

$$\delta\bar{r}\,.\,d\bar{n} = 0$$

$$(\bar{r}_u\, \delta u + \bar{r}_v\, \delta v).(\bar{n}_u\, du + \bar{n}_v\, dv) = 0$$

$$\bar{r}_u\,.\bar{n}_u\, \delta u\, du + \bar{r}_u\,.\bar{n}_v\, \delta u\, dv + \bar{r}_v\,.\bar{n}_u\, \delta v\, du +$$

$$\bar{r}_v\,.\bar{n}_v\, \delta v\, du = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Pada bab II.1 halaman 10 dan 11 telah diperoleh :

$$\bar{r}_u\,.\bar{n}_u = -L \quad , \bar{r}_u\,.\bar{n}_v = -M$$

$$\bar{r}_v\,.\bar{n}_u = -M \quad , \bar{r}_v\,.\bar{n}_v = -N$$

sehingga persamaan (1) menjadi :

$$-L\,\delta u\, du - M\,\delta u\, dv - M\,\delta v\, du - N\,\delta v\, dv = 0$$

atau $$L\,\frac{du}{dv}\,\frac{\delta u}{\delta v} + M\left(\frac{du}{dv} + \frac{\delta u}{\delta v}\right) + N = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

persamaan (2) merupakan syarat perlu dan cukup supaya jurusan $\delta u/\delta v$ sekawan dengan jurusan du/dv.

Pandang persamaan :

$$P\,du^2 + 2\,Q\,du\,dv + R\,dv^2 = 0$$

atau $$P + 2\,Q\,v' + R\,v'^2 = 0$$

maka syarat dua jurusan pada permukaan sekawan dipenuhi jika :

$$L + M(-2\,Q/R) + N\,P/R = 0$$

Syarat perlu dan cukup supaya garis parameter merupakan sistim sekawan ialah harga $M = 0$ .Telah diketahui bila garis kelengkungan sebagai garis parameter maka harga-harga $F = 0$ dan $M = 0$ dipenuhi. Oleh karena itu diperoleh garis kelengkungan merupakan sistim sekawan dan ortogonal.

III.2 GARIS ASIMPTOTIK

Jurusan asimptotik disuatu titik pada permukaan adalah jurusan sekawan pada diri sendiri . Suatu kurva dimana jurusan disetiap titiknya sekawan pada diri sendiri disebut garis asimptotik.

Persamaan (2) pada bab III.1 adalah persamaan diferensial jurusan sekawan .Karena garis asimptotik sekawan pada diri sendiri maka :

$$du/dv = \delta u/\delta v$$

sehingga persamaan diferensial garis asimptotik pada suatu permukaan menjadi :

$$L \frac{du^2}{dv^2} + 2M \frac{du}{dv} + N = 0$$

$$L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2 = 0 \quad \ldots\ldots(3)$$

Persamaan diferensial garis asimptotik merupakan bentuk kwadratik ,oleh karena itu terdapat dua jurusan asimptotik pada suatu titik pada permukaan.

Kemungkinan-kemungkinan jurusan asimptotik ialah :

1. Jurusan asimptotik nyata dan berlainan jika kelengkungan Gauss negatip maka :

$$L N - M^2 < 0$$

2. Jurusan asimptotik khayal jika kelengkungan Gauss positip maka :

$$L N - M^2 > 0$$

3. Jurusan asimptotik sama jika kelengkungan Gauss sama dengan nol atau $L N - M^2 = 0$

Telah diketahui bahwa :

$$k_n = \frac{L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

maka k_n untuk jurusan asimptotik sama dengan nol.

Bidang oskulasi sepanjang garis asimptotik berimpit dengan bidang singgung permukaan.

<u>Bukti</u> :

Garis singgung $\bar{t}$ pada garis asimptotik tegak lurus normal permukaan $\bar{n}$,sehingga :

$$\bar{n} \cdot \bar{t} = 0$$

Jika persamaan diatas didiferensialkan terhadap s akan diperoleh :

$$\bar{n}' \cdot \bar{t} + \bar{n} \cdot (k \bar{N}) = 0$$

dimana $\bar{N}$ adalah normal utama kurva.

$$\bar{n}' \cdot \bar{t} = 0$$

hal ini disebabkan karena $\bar{t}$ tegak lurus dengan perobahan arah normal satuan pada jurusan sekawan. Kita ketahui bahwa jurusan asimptotik sekawan pada diri sendiri. Sehingga diperoleh persamaan :

$$\bar{n} \cdot \bar{N} = 0$$

karena $\bar{t}$ dan $\bar{N}$ tegak lurus normal permukaan ,maka terbukti bidang oskulasi kurva berimpit dengan bidang singgung permukaan.

Binormal kurva merupakan normal permukaan sehingga berlaku persamaan $\bar{b} = \bar{n}$. Telah disebutkan bahwa normal utama tegak lurus pada $\bar{t}$ dan normal permukaan , maka berlakulah $\bar{N} = \bar{n} \times \bar{t}$. Garis parameter merupakan garis asimptotik jika persamaan (3) bab III.2 identik dengan persamaan diferensial garis parameter yaitu :

$$du\ dv = 0$$

Terdapatlah syarat perlu dan cukup garis parameter merupakan garis asimptotik untuk :

$$L = 0\ ,\ N = 0 \quad \text{dan } M \neq 0$$

Maka persamaan diferensial garis kelengkungan yang disajikan oleh persamaan :

$$(EM-FL)\ du^2 + (EN - GL)\ du\ dv + (FN - GM)\ dv^2 = 0$$

menjadi :

$$E\ M\ du^2 - G\ M\ dv^2 = 0$$

atau $\quad E\ du^2 - G\ dv^2 = 0$

hal itu disebabkan karena $L = N = 0$, $du\ dv = 0$ dan $M \neq 0$.

Persamaan kelengkungan utama disajikan oleh :

$$H^2 k^2 - (EN - 2\ FM + GL)\ k + (LN - M^2) = 0$$

menjadi :

$$H^2 k^2 + 2\ F\ M\ k - M^2 = 0$$

maka kelengkungan rata-rata atau kelengkungan pertama dinyatakan sebagai berikut :

$$J = -\ 2\ F\ M\ /\ H^2$$

sedangkan kelengkungan Gauss disajikan sebagai :

$$K = -\ M^2\ /H^2$$

Untuk selanjutnya akan diuraikan tentang kelengkungan dan torsi garis asimptotik. Pada uraian terdahulu telah disebutkan bahwa binormal garis asimptotik merupakan normal satuan permukaan yaitu :

$$\bar{b} = \bar{n}$$

Bila persamaan diatas didiferensialkan terhadap s akan diperoleh :

dimana $\bar{N} = \bar{n} \times \bar{t}$ merupakan normal utama garis asimptotik.

Jika tiap ruas kita kalikan secara skalar dengan $\bar{N}$ maka didapat torsi garis asimptotik yaitu :

$$-\tau = \bar{n} \times \bar{r}' \cdot \bar{n}'$$

$$\tau = \{ \bar{n} , \bar{n}' , \bar{r}' \} \text{ ....(4)}$$

Skalar triple product diatas sama dengan scalar triple product yang telah diketahui pada bab II.1 halaman 13 dan 14 . Bila scalar triple product tersebut disamakan dengan nol ,akan ditemukan persamaan diferensial garis kelengkungan . Maka persamaan (4) dapat diperluas hingga memberikan torsi garis asimptotik .

$$\text{Untuk} \quad \begin{aligned} d\bar{n} &= \bar{n}' = \bar{n}_u \, du + \bar{n}_v \, dv \\ d\bar{r} &= \bar{r}' = \bar{r}_u \, du + \bar{r}_v \, dv \end{aligned} \quad \text{...........(5)}$$

akan dapat ditentukan scalar triple product dengan $\bar{n}$ yaitu :

$$[\bar{n} , \bar{n}_u , \bar{r}_u] = \frac{E\,M - F\,L}{H}$$

$$[\bar{n} , \bar{n}_u , \bar{r}_v] = \frac{F\,M - G\,L}{H}$$

$$[\bar{n} , \bar{n}_v , \bar{r}_u] = \frac{E\,N - F\,M}{H}$$

$$[\bar{n} , \bar{n}_v , \bar{r}_v] = \frac{F\,N - G\,M}{H}$$

sehingga torsi garis asimptotik menjadi :

$$\tau = 1/H \left\{ (EM - FL)\, du^2 + (EN - GL)\, du dv + (FN - GM)\, dv^2 \right\}$$

Jika garis asimptotik merupakan garis parameter maka dipenuhi :

$$L = 0 \; , \; N = 0 \text{ dan } M \neq 0$$

Oleh sebab itu torsi garis asimptotik dapat diperoleh menurut teorema Beltrami-Enneper.

Teorema :

Torsi-torsi garis asimptotik mempunyai tanda berlainan dan mempunyai besar sama dengan akar negatip kelengkungan Gauss.

Bukti :

Jika garis asimptotik sebagai garis parameter maka L = N = 0, hingga rumus torsi yang diberikan oleh :

$$\tau = 1/H \{(EM-FL)du^2 + (EN-GL)\, du\, dv + (FN-GM)\, dv^2\}$$

menjadi :

$$\tau = 1/H \quad E\, M\, du^2 - G\, M\, dv^2$$

$$= 1/H \quad M\, (\, E\, du^2 - G\, dv^2\,)$$

$$\tau = M/H\, (\, E\, du^2 - G\, dv^2\,)$$

Untuk garis asimptotik $dv = 0$ berlaku:

$$\tau = M/H \quad E\, (\, du/ds\,)^2$$

karena $dv = 0$ maka $ds^2 = E\, du^2$ atau

$$du/ds = 1/\sqrt{E}$$

hingga diperoleh :

$$\tau = M/H = \sqrt{-K}$$

Untuk garis asimptotik $du = 0$ berlaku

$$\tau = M/H \quad (-G\, (\, dv/ds\,)^2)$$

karena $du = 0$ maka $ds^2 = G\, dv^2$ atau

$$dv/ds = 1/\sqrt{G}$$

$$\tau = - M/H = - \sqrt{-K}$$

Terbuktilah teorema Beltrami-Enneper.

Torsi garis asimptotik identik dengan torsi garis geodetik . Yang dimaksud garis geodetik ialah garis lengkung terpendek yang menghubungkan dua titik pada permukaan atau dapat pula dikatakan sebagai garis lengkung yang kung dititik tersebut. Hal ini berarti normal utama garis geodetik berimpit dengan normal bidang lengkung.

Jika $\bar{r}$ suatu titik pada garis geodetik , $\bar{r}'$ adalah garis singgung satuan ,sedang normal utama adalah normal satuan $\bar{n}$ pada permukaan. Binormal satuan diberikan oleh persamaan :

$$\bar{b} = \bar{r}' \times \bar{n}$$

jika $\bar{b}$ didiferensialkan terhadap s diperoleh torsi garis geodetik yaitu :

$$-\tau \bar{n} = \bar{r}'' \times \bar{n} + \bar{r}' \times \bar{n}'$$

oleh karena $\bar{r}''$ sejajar dengan $\bar{n}$ maka $\bar{r}'' \times \bar{n} = 0$,sehingga berlaku :

$$\tau \bar{n} = \bar{n}' \times \bar{r}'$$

$$\tau = [\bar{n} , \bar{n}' , \bar{r}'] \text{ .... } (6)$$

Persamaan ini merupakan torsi garis geodetik yang identik dengan torsi garis asimptotik yang telah diketahui pada bab III.2 halaman 27 persamaan (4).

Hubungan-hubungan antara torsi garis asimptotik dan torsi garis geodetik :

1. Jika garis geodetik menyinggung kurva pada sebarang titik disebut garis singgung geodetik . Oleh karena itu torsi garis asimptotik sama dengan torsi garis singgung geodetik.
2. Garis geodetik menyinggung garis kelengkungan jika torsinya nol. Jadi garis geodetik adalah kurva bidang dan merupa-kan garis kelengkungan. Yang dimaksud kurva bidang adalah suatu kurva yang terletak pada bidang datar.

   Pernyataan ini berlaku sebaliknya yaitu garis geodetik merupakan garis kelengkungan dan kur-

Bila triple product $[\bar{n}, \bar{n}', \bar{r}']$ diperluas sesuai dengan persamaan (5) ,torsi garis geodetik menjadi :

$$\tau = 1/H \{ (EM-FL)\, du^2 + (EN-GL)\, dudv + (FN-GM)\, dv^2 \}$$

Karena garis kelengkungan sebagai garis parameter dan telah diketahui $F = M = 0$ maka $H^2 = E\,G$.

Torsi garis geodetik menjadi :

$$\tau = 1/H\, (EN - GL)\, du\, dv$$

$$= 1/\sqrt{EG}\, (EN - GL)\, du\, dv$$

$$= \sqrt{EG}\, (N/G - L/E)\, du\, dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6')$$

Pada bab II.2 persamaan (4) telah dikemukakan ,jika garis kelengkungan merupakan garis parameter maka persamaan kelengkungan normal menjadi :

$$k_n = \frac{L\, du^2 + N\, dv^2}{E\, du^2 + G\, dv^2}$$

$$= L\, (du/ds)^2 + N\, (dv/ds)^2 \quad \ldots\ldots\ldots(7)$$

Untuk garis parameter $v = C$ akan diperoleh :

$$k_a = L/E$$

sedang untuk garis parameter $u = C$ diperoleh :

$$k_b = N/G$$

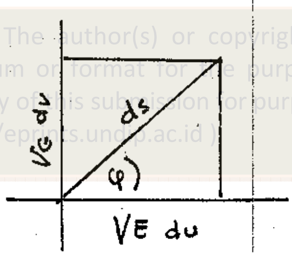
Harga k_a dan k_b kita masukkan pada persamaan (7) berlaku :

$$k_n = k_a\, E\, (du/ds)^2 + k_b\, G\, (dv/ds)^2 \quad \ldots\ldots(8)$$

jika φ sudut inklinasi maka diperoleh harga-harga :

$$\cos\varphi = \sqrt{E}\, du/ds$$

$$\sin\varphi = \sqrt{G}\, dv/ds$$



Sesuai persamaan (6'') torsi garis geodetik dapat disajikan oleh persamaan :

$$\tau = \cos\varphi \sin\varphi \; (k_a - k_b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Dengan persamaan (9) dapat dinyatakan bahwa dua - garis geodetik yang membentuk sudut 90^o mempunyai torsi - torsi yang sama dan berlawanan tanda.

Kelengkungan garis asimptotik dapat ditentukan bila vektor singgung satuan $\bar{t} = \bar{r}'$ didiferensialkan ter - hadap s ,hingga memberikan persamaan :

$$k \bar{N} = \bar{r}''$$

telah diketahui bahwa :

$$\bar{N} = \bar{n} \times \bar{t}$$

maka dengan membentuk scalar product vektor $\bar{N}$ diatas akan diperoleh :

$$k = [\bar{n} , \bar{r}' , \bar{r}'']$$

maka kelengkungan garis asimptotik merupakan triple product dari $\bar{n}$,$\bar{r}'$,$\bar{r}''$.