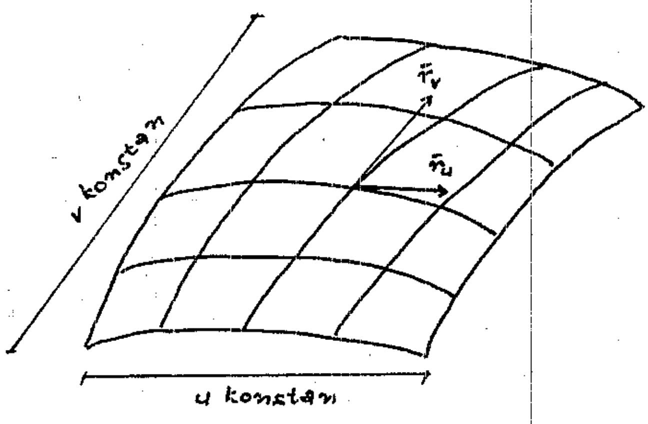
BAB II

PERMUKAAN / BIDANG LENGKUNG

Selanjutnya akan dibahas dasar-dasar Ukur Diferensial suatu permukaan atau bidang lengkung. Suatu hubungan $\varphi (u , v) = 0$ antara koordinat-koordinat kurva linier u , v pada suatu permukaan menentukan sebuah garis lengkung pada permukaan tersebut. Yang dimaksud koordinat-koordinat kurva linier ialah pasangan (u , v) dari suatu titik pada permukaan.

Garis-garis parameter ialah garis lengkung pada bidang lengkung atau permukaan dimana v = konstan atau u = konstan. Jika konstanta-konstanta tersebut berubah , permukaan akan ditutup oleh suatu kumpulan garis-garis parameter. Untuk titik P pada permukaan atau bidang lengkung maka vektor $\bar{r}_u$ akan menyinggung garis parameter v = konstan dititik tersebut, demikian pula vektor $\bar{r}_v$ akan menyinggung garis parameter u = konstan dititik P.



Vektor-vektor $\bar{r}_u$ dan $\bar{r}_v$ dititik P memiliki arah-arah yang berlainan. Garis-garis parameter juga sering disebut garis-garis koordinat. Jika v merupakan fungsi dari u atau $v = \varphi (u)$ maka $\bar{r} (u , v)$ akan merupakan fungsi dari satu parameter saja , jadi merupakan garis lengkung pada permukaan bidang lengkung.

Vektor $\bar{r}' = d\bar{r}/ds$ dapat disajikan oleh persamaan :

$$\bar{r}' = \bar{r}_u \; u' + \bar{r}_v \; v'$$

dan vektor diatas akan menyinggung garis lengkung ,yang berarti pula menyinggung permukaan .Persamaan diatas dapat pula disajikan oleh :

$$d\bar{r} = \bar{r}_u \, du + \bar{r}_v \, dv$$

II.1 BESARAN FUNDAMENTAL ORDE PERTAMA DAN ORDE KEDUA

Elemen garis (ds) adalah jarak antara dua titik sebarang pada bidang lengkung atau permukaan yang saling berdekatan. Hal ini dapat disajikan oleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} ds^2 = |d\bar{r}|^2 &= d\bar{r} \cdot d\bar{r} \\ &= (\bar{r}_u \, du + \bar{r}_v \, dv) \cdot (\bar{r}_u \, du + \bar{r}_v \, dv) \\ &= \bar{r}_u \cdot \bar{r}_u \, du^2 + 2 \, \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v \, du \, dv + \\ &\quad \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v \, dv^2 \\ &= E \, du^2 + 2 \, F \, du \, dv + G \, dv^2 \quad \ldots\ldots(1) \end{aligned}$$

dengan $E = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_u$, $F = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v$, $G = \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v$

$$H^2 = E\,G - F^2$$

yang disebut besaran fundamental orde pertama.

Karena ds merupakan jarak antara dua titik yang berdekatan ,maka :

$$E \, du^2 + 2 \, F \, du \, dv + G \, dv^2 > 0$$

atau nol untuk $du = dv = 0$. Kita selidiki selalu permukaan-permukaan yang riel.

Harga $E\,G - F^2 > 0$ dapat diperlihatkan sebagai berikut :

$$(\bar{r}_u \times \bar{r}_v) \cdot (\bar{r}_u \times \bar{r}_v) = (\bar{r}_u \cdot \bar{r}_u)(\bar{r}_v \cdot \bar{r}_v) - (\bar{r}_u \cdot \bar{r}_v)^2$$

$$= E G - F^2$$

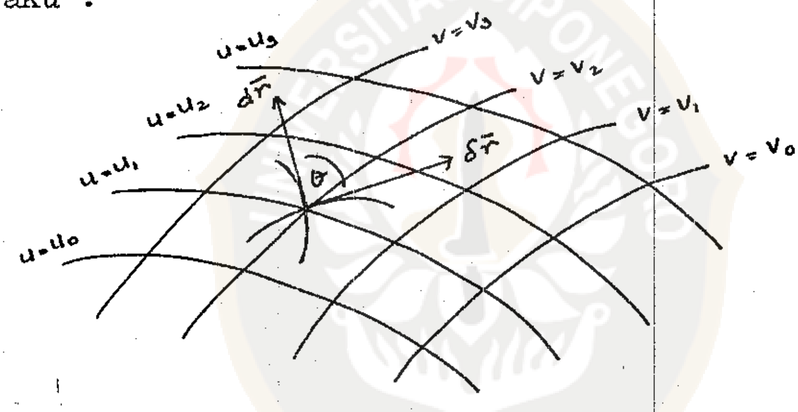
oleh karena $\bar{r}_u \times \bar{r}_v \neq 0$ maka terbuktilah bahwa :

$$E G - F^2 > 0$$

Dengan menggunakan besaran E ,F ,G kita dapat menghitung sudut antara dua garis lengkung pada permuka - an. Jika $d\bar{r} = \bar{r}_u \, du + \bar{r}_v \, dv$

$$\delta\bar{r} = \bar{r}_u \delta u + \bar{r}_v \delta v$$

berlaku :



$$\cos \theta = \frac{d\bar{r} \cdot \delta\bar{r}}{|d\bar{r}|\,|\delta\bar{r}|}$$

$$= \frac{\bar{r}_u \cdot \bar{r}_u du\,\delta u + (\bar{r}_u \cdot \bar{r}_v)(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v dv\,\delta v}{|d\,\bar{r}|\,|\delta\bar{r}|}$$

$$= \frac{E\,du\,\delta u + F\,(\,du\,\delta v + dv\,\delta u\,) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du dv + G dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\delta u \delta v + G\,\delta v^2}}$$

$$= E\,\frac{du}{ds}\frac{\delta u}{\delta s} + F\left(\frac{du\,\delta v}{ds\,\delta s} + \frac{dv\,\delta u}{ds\,\delta s}\right) + G\,\frac{dv}{ds}\frac{\delta v}{\delta s}$$

Sifat -sifat khusus sebagai berikut :

1. Jika kedua garis lengkung saling tegak lurus ma ka $\theta = \pi/2$ berlaku :

   $E\,du\,\delta u + F\,(\,du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0$ ...

   .... (2)

   Pandang persamaan :

   $$P + 2\,Q\,v' + R\,v'^2 = 0$$

   P ,Q ,R merupakan fungsi u ,v ,sedangkan v_1' dan

dan v_2' menyatakan arah-arah permukaan. Jika persamaan (2) kita ubah menjadi :

$$E + F (v_1' + v_2') + G v_1' \; v_2' = 0$$

diperoleh syarat perlu dan cukup agar dua arah saling tegak lurus yaitu :

$$E R - 2 F Q + G P = 0$$

2. Sudut ω antara garis-garis parameter u = konstan (berarti du = 0 dan dv sebarang) dan v= konstan (berarti dv = 0 dan du sebarang) memberikan hubungan sebagai berikut :

$$\cos \omega = F/\sqrt{E G}$$

$$\sin \omega = \sqrt{1 - \cos^2 \omega}$$

$$= \sqrt{1 - F^2/E G}$$

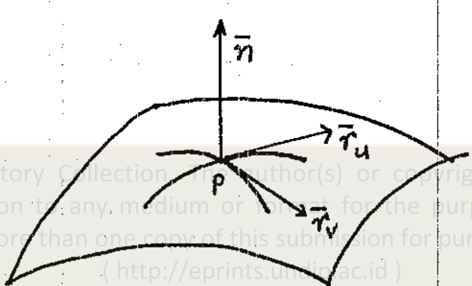
$$= \sqrt{\frac{E G - F^2}{E G}}$$

$$= H/\sqrt{E G}$$

Sehingga diperoleh $\operatorname{tg} \omega = H/F$.

3. Dari hal khusus 2) dapat ditarik kesimpulan bahwa garis-garis parameter saling tegak lurus jika $F = 0$.

Selanjutnya akan kita bahas tentang besaran fundamental orde dua. Garis normal permukaan dititik P pada bidang lengkung ialah garis melalui titik P dan tegak lurus pada bidang singgung permukaan.



$\bar{n}$ = normal satuan, merupakan vektor tegak lurus bidang singgung permukaan.

$$\bar{n} \perp \bar{r}_u \ , \ \bar{n} \perp \bar{r}_v \ \longrightarrow \ \bar{n} = \lambda \, \bar{r}_u \times \bar{r}_v$$

$$|\bar{r}_u \times \bar{r}_v| = H \text{ maka } |\bar{n}| = \lambda \, |\bar{r}_u \times \bar{r}_v|$$

$$\text{atau } 1 = \lambda H \ \longrightarrow \ \lambda = 1/H$$

Sehingga diperoleh normal satuan pada permukaan ialah : $\bar{n} = \dfrac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{H}$, dengan $H^2 = E\,G - F^2$

Bila $\bar{r}_{uu} = \dfrac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^2}$, $\bar{r}_{uv} = \dfrac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \partial v}$

dan $\bar{r}_{vv} = \dfrac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v^2}$

maka besaran orde dua dapat disajikan sebagai berikut :

$$L = \bar{n} \cdot \bar{r}_{uu} \ , \ M = \bar{n} \cdot \bar{r}_{uv} \ , \ N = \bar{n} \cdot \bar{r}_{vv}$$

$$\text{dan } T^2 = L\,N - M^2$$

Jika $\bar{n} \cdot \bar{r}_u = 0$ dideferensialkan masing- masing terhadap u dan v berlaku :

a. $\bar{n}_u \cdot \bar{r}_u + \bar{n} \cdot \bar{r}_{uu} = 0$

$\bar{n}_u \cdot \bar{r}_u + L = 0$

$\bar{n}_u \cdot \bar{r}_u = - L$ ....(3)

b. $\bar{n}_v \cdot \bar{r}_u + \bar{n} \cdot \bar{r}_{uv} = 0$

$\bar{n}_v \cdot \bar{r}_u + M = 0$

$\bar{n}_v \cdot \bar{r}_u = - M$ ....(3')

Demikian pula bila $\bar{n} \cdot \bar{r}_v = 0$ dideferensialka ter masing-masing terhadap u dan v diperoleh :

a. $\bar{n}_u \cdot \bar{r}_v + \bar{n} \cdot \bar{r}_{uv} = 0$

$\bar{n}_u \cdot \bar{r}_v + M = 0$

$\bar{n}_u \cdot \bar{r}_v = - M$ ....(4)

b. $\bar{n}_v \cdot \bar{r}_v + \bar{n} \cdot \bar{r}_{vv} = 0$

$\bar{n}_v \cdot \bar{r}_v + \quad N \quad = 0$

$\bar{n}_v \cdot \bar{r}_v \quad = - N$ ....(4')

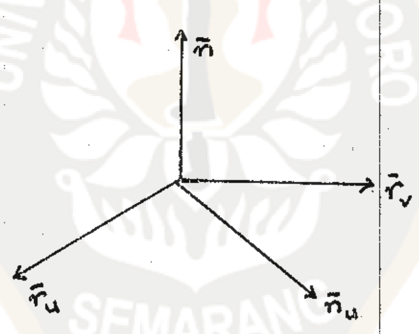
Selanjutnya kita cari turunan $\bar{n}$ terhadap u dan v yaitu :

$$\bar{n} \cdot \bar{n} = 1$$

bila persamaan diatas didiferensialkan terlebih dahulu terhadap u akan diperoleh :

$$\bar{n}_u \cdot \bar{n} + \bar{n} \cdot \bar{n}_u = 0 \longrightarrow 2\,\bar{n}_u \cdot \bar{n} = 0$$

maka $\bar{n} \perp \bar{n}_u$



$\bar{n}_u = \lambda \bar{r}_u + \mu \bar{r}_v$ ....(5)

persamaan (5) kita gandakan masing-masing dengan $\bar{r}_u$ dan $\bar{r}_v$ maka diperoleh :

$$\left.\begin{aligned} \bar{n}_u \cdot \bar{r}_u &= \lambda\, \bar{r}_u \cdot \bar{r}_u + \mu\, \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v \\ -L &= \lambda E + \mu F \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{n}_u \cdot \bar{r}_v &= \lambda\, \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v + \mu\, \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v \\ -M &= \lambda F + \mu G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (5')$$

Demikian pula jika $\bar{n} \cdot \bar{n} = 1$ didiferensialkan terhadap v maka diperoleh :

$$\bar{n}_v \cdot \bar{n} + \bar{n} \cdot \bar{n}_v = 0 \longrightarrow 2\,\bar{n}_v \cdot \bar{n} = 0$$

$$\bar{n}_v \perp \bar{n}$$

$\bar{n}_v = \alpha\, \bar{r}_u + \beta\, \bar{r}_v$ ....(6)

$\bar{r}_u$ dan $\bar{r}_v$ hingga didapat :

$$\begin{array}{lll} \bar{n}_v \cdot \bar{r}_u = \alpha\, \bar{r}_u \cdot \bar{r}_u + \beta\, \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v & & \\ - M = \alpha E + \beta F & \ldots\ldots\ldots & \\ \bar{n}_v \cdot \bar{r}_u = \alpha\, \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v + \beta\, \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v & & (6') \\ - N = \alpha F + \beta G & \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Persamaan (5') akan menghasilkan λ dan μ sebagai berikut :

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} -L & F \\ -M & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{F M - G L}{H^2}$$

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} E & -L \\ F & -M \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{F L - E M}{H^2}$$

Demikian pula persamaan (6') akan menghasilkan α dan β ialah :

$$\alpha = \frac{F N - G M}{H^2}$$

$$\beta = \frac{F M - E N}{H^2}$$

Akhirnya kita peroleh harga-harga $\bar{n}_u$ dan $\bar{n}_v$:

$$\left.\begin{array}{l} H^2\ \bar{n}_u = (F M - G L)\bar{r}_u + (F L - E M)\bar{r}_v \\ H^2\ \bar{n}_v = (F N - G M)\bar{r}_u + (F M - E N)\bar{r}_v \end{array}\right\} \ldots .(7)$$

Dari persamaan (7) diperoleh turunan-turunan $\bar{r}$ terhadap u dan v yaitu :

$$\left.\begin{array}{l} T^2\ \bar{r}_v = (F M - E N)\bar{n}_u + (E M - F L)\bar{n}_v \\ T^2\ \bar{r}_u = (G M - F N)\bar{n}_u + (F M - G L)\bar{n}_v \end{array}\right\} \ldots .(8)$$

Untuk memperoleh triple product antara vektor - vektor $\bar{n}$,$\bar{n}_u$,$\bar{n}_v$ dapat diturunkan rumus sebagai berikut :

dari persamaan (7) diperoleh :

$$H^4\ \bar{n}_u \times \bar{n}_v = \left\{ (MF-GL)(FM-EN)-(FL-EM)(FN-GM) \right\} \bar{r}_u \times \bar{r}_v$$

$$= \left\{ (M^2F^2 - EFMN - GLFM + GLEN - F^2LN + FLGM + EFMN - EGM^2) \right\} \bar{r}_u \times \bar{r}_v$$

$$= (-F^2(LN-M^2) + EG\ (LN-M^2))\ \bar{r}_u \times \bar{r}_v$$

$$= ((LN - M^2)(EG - F^2))\ \bar{r}_u \times \bar{r}_v$$

$$= T^2 H^2\ \bar{r}_u \times \bar{r}_v$$

$$H^2\ \bar{n}_u \times \bar{n}_v = T^2\ \bar{r}_u \times \bar{r}_v$$

$$= H\ T^2\ \bar{n}$$

$$[\bar{n}\ ,\bar{n}_u\ ,\bar{n}_v] = T^2 / H$$

Demikian pula dari persamaan (8) diperoleh :

a. $T^2\ \bar{r}_u = (FM - EN)\ \bar{n}_u + (EM - FL)\ \bar{n}_v$

$$T^2\ \bar{n}_u \times \bar{r}_u = (EM - FL)\ \bar{n}_u \times \bar{n}_v$$

$$T^2\ \bar{n} \cdot \bar{n}_u \times \bar{r}_u = (EM - FL)\ \bar{n} \cdot \bar{n}_u \times \bar{n}_v$$

$$= T^2 / H\ \ (EM - FL)$$

$$[\bar{n}\ ,\bar{n}_u\ ,\bar{r}_u] = \frac{EM - FL}{H}$$

b. $T^2\ \bar{r}_v = (GM - FN)\ \bar{n}_u + (FM - GL)\ \bar{n}_v$

$$T^2\ \bar{n}_u \times \bar{r}_v = (FM - GL)\ \bar{n}_u \times \bar{n}_v$$

$$T^2\ \bar{n} \cdot \bar{n}_u \times \bar{r}_v = (FM - GL)\ \bar{n} \cdot \bar{n}_u \times \bar{n}_v$$

$$= T^2 / H\ \ (FM - GL)$$

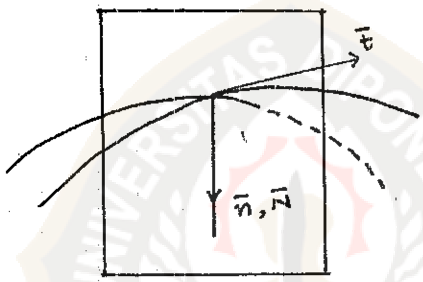
$$[\bar{n}\ ,\bar{n}_u\ ,\bar{r}_v] = \frac{FM - GL}{H}$$

dengan cara sama dapat diperoleh pula :

c. $[\bar{n}\ ,\bar{n}_v\ ,\bar{r}_u] = \dfrac{EN - FM}{H}$

d. $\left[\bar{n}, \bar{n}_v, \bar{r}_v\right] = \dfrac{FN - GM}{H}$

Perpotongan normal disuatu titik pada permukaan ialah perpotongan bidang lengkung dengan bidang datar dengan normal dititik tersebut ,sedemikian hingga perpotongan ini merupakan garis lengkung dengan normal utamanya sejajar dengan normal permukaan.



k_n dari garis lengkung perpotongan positip jika garis lengkung konkaf (kepihak dimana $\bar{n}$ ada). Bila permukaan merupakan fungsi u ,v dimana u ,v merupakan fungsi parameter s maka :

$$d\bar{r}/ds = \bar{r}' = \bar{r}_u\, du/ds + \bar{r}_v\, dv/ds$$

$$\begin{aligned} \bar{r}'' &= \bar{r}_{uu}(du/ds)^2 + \bar{r}_{uv} du/ds.dv/ds + \bar{r}_u\, d^2 u/ds^2 \\ &\quad + \bar{r}_{uv} du/ds.dv/ds + \bar{r}_{vv}(dv/ds)^2 + \bar{r}_v\, d^2 v/ds^2 \end{aligned}$$

$$\bar{r}'' = k_n . \bar{n}$$

$$\bar{r}''.\bar{n} = k_n$$

$$\begin{aligned} k_n &= \bar{n}.\bar{r}_{uu}(du/ds)^2 + \bar{n}.\bar{r}_{uv} du/ds\, dv/ds + \\ &\quad \bar{n}.\bar{r}_u\, d^2 u/ds^2 + \bar{n}.\bar{r}_{vu} du/ds\, dv/ds + \\ &\quad \bar{n}.\bar{r}_{vv}(dv/ds)^2 + \bar{n}.\bar{r}_v\, d^2 v/ds^2 \end{aligned}$$

telah diketahui bahwa :

$$\bar{n} \perp \bar{r}_u ,\ \bar{n} \perp \bar{r}_v \longrightarrow \bar{n}.\bar{r}_u = \bar{n}.\bar{r}_v = 0$$

$$k_n = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

$$k_n = \frac{L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2}{ds^2}$$

$$= \frac{L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

Persamaan (9) disebut persamaan kelengkungan normal .Andaikan bidang lengkung dipotong oleh bidang sebarang yang tidak normal pada bidang lengkung , maka normal utama garis lengkung perpotongan tidak sejajar $\bar{n}$,tetapi sejajar $\bar{r}''$ hingga normal utama satuan $= \bar{r}''/k$.

Misalkan θ sudut antara bidang potong dan bidang normal yang menyinggung garis lengkung perpotongan pada titik yang dipandang maka berlaku :

$$\cos\theta = \frac{\bar{n}\,.\,\bar{r}''}{k}$$

Sedang telah diketahui bahwa $\bar{n}\,.\bar{r}'' = k_n$, maka terdapatlah hubungan antara kelengkungan normal dan kelengkungan yang tidak normal ,hal tersebut dikemukakan oleh MEUNIER sebagai berikut :

$$k_n = k\cos\theta$$

II.2 GARIS KELENGKUNGAN

Dua normal pada dua titik yang saling berdekatan umumnya tidak berpotongan .Syarat perlu supaya normal-normal pada dua titik tersebut saling berpotongan ialah : $\bar{n}$,$d\bar{n}$,$d\bar{r}$ harus terletak pada satu bidang (koplaner) ,dengan demikian triple product ketiga vektor tersebut berharga nol yaitu :

$$[\bar{n}\,, d\bar{n}\,, d\bar{r}\,] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\text{Jika}\quad \left.\begin{aligned} d\bar{n} &= \bar{n}_u\,du + \bar{n}_v\,dv \\ d\bar{r} &= \bar{r}_u\,du + \bar{r}_v\,dv \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

kita substitusikan pada persamaan (1) maka berlaku :

$$[\bar{n},\bar{n}_u,\bar{r}_u]\,du^2 + \{[\bar{n},\bar{n}_u,\bar{r}_v] + [\bar{n},\bar{n}_v,\bar{r}_u]\}\,du\,dv + [\bar{n},\bar{n}_v,\bar{r}_v]\,dv^2 = 0$$

Harga keempat scalar trilple product tersebut telah kita ketahui pada bab II halaman 13 dan 14 ,hingga - persamaan diatas ekwivalen dengan persamaan :

$$(EM-FL)\,du^2 + (EN-GL)\,dudv + (FN-GM)\,dv^2 = 0 \quad ....(3)$$

Persamaan (3) tersebut merupakan sistim dua garis dengan k_n mempunyai harga ekstrim ,dan sistim dua garis itu saling tegak lurus.Bila garis kelengkungan sebagai garis parameter atau F = 0 dan M = 0 ,maka kita peroleh persamaan kelengkungan normal yaitu :

$$k_n = \frac{L\,du^2 + N\,dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2} \quad ....(4)$$

Jika garis kelengkungan diambil sebagai garis parameter v = C ------> dv = 0 , sehingga diperoleh kelengkungan utama k_a = L/E . Untuk garis parameter u = C di - peroleh du = 0 , hingga kelengkungan utama k_b = N/G .

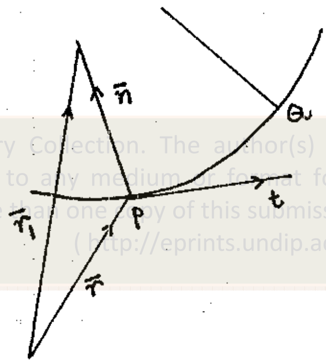
Titik potong normal -normal dititik P dan titik Q yang saling berdekatan dengan titik P disebut titik pusat kelengkungan di P. Pusat kelengkungan ialah titik dengan radius vektornya mempunyai persamaan :

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \rho\,\bar{n} \quad ....(5)$$

dengan ρ = jari-jari kelengkungan

$\bar{n}$ = normal satuan dititik P

$\bar{r}$ = radius vektor dari suatu titik pada kurva



Jika radius vektor dari suatu titik diberikan o - leh persamaan (5) berpindah sedikit sepanjang garis lengkung maka diperoleh :

$$d\bar{r}_1 = (d\bar{r} + \rho\, d\bar{n}) + \bar{n}\, d\rho$$

dimana vektor $d\bar{r} + \rho\, d\bar{n}$ merupakan tangensial permukaan a kibatnya $d\bar{r}_1$ searah dengan $\bar{n}$ hingga diperoleh :

$$d\bar{r} + \rho\, d\bar{n} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

untuk $\rho = 1/k$ persamaan (6) menjadi :

$$k\, d\bar{r} + d\bar{n} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Jika persamaan (2) kita substitusikan pada persamaan (7) maka :

$$k\, (\bar{r}_u\, du + \bar{r}_v\, dv) + \bar{n}_u\, du + \bar{n}_v\, dv = 0$$

$$k\, \bar{r}_u\, du + k\, \bar{r}_v\, dv + \bar{n}_u\, du + \bar{n}_v\, dv = 0$$

$$(k\, \bar{r}_u + \bar{n}_u)\, du + (k\, \bar{r}_v + \bar{n}_v)\, dv = 0 \quad \ldots.(8)$$

Persamaan (8) digandakan masing-masing dengan $\bar{r}_u$ dan $\bar{r}_v$ berlaku :

$$(k\, \bar{r}_u.\bar{r}_u + \bar{n}_u.\bar{r}_u)du + (k\, \bar{r}_u.\bar{r}_v + \bar{n}_v.\bar{r}_u)dv = 0$$

$$(k\, E - L)du + (k\, F - M)dv = 0 \quad \ldots\ldots\ldots..(9)$$

$$(k\, \bar{r}_u.\bar{r}_v + \bar{n}_u.\bar{r}_v)du + (k\, \bar{r}_v.\bar{r}_v + \bar{n}_v.\bar{r}_v)\, dv = 0$$

$$(k\, F - M)du + (k\, G - N)\, dv = 0 \quad \ldots\ldots\ldots..(9')$$

Dari kedua persamaan diatas akan diperoleh kelengkungan utama dan arah-arah garis kelengkungan. Jika kita eliminasikan du/dv pada persamaan (9) dan (9') ,maka akan diperoleh persamaan kwadrat yang memberikan harga-harga kelengkungan utamanya yaitu :

$$(k\, E - L)(k\, G - N) = (k\, F - M)^2$$

atau $H^2k^2 - (EN - 2FM + GL)k + T^2 = 0$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots..(10)$

Kelengkungan pertama (J) permukaan pada sebarang titik didefinisikan sebagai jumlahan akar-akar persamaan (10) yaitu :

$$J = \frac{E\,N - 2\,F\,M + G\,L}{H^2}$$

Sedang untuk kelengkungan Gauss (K) permukaan pada sebarang titik didefinisikan sebagai pergandaan dari akar-akar persamaan (10) yaitu :

$$K = \frac{L\,N - M^2}{H^2} = T^2 / H^2$$

II.3 PERSAMAAN GAUSS DAN RELASI MAINARDI - CODAZZI

Kita pakai vektor-vektor dasar $\bar{n}$, $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ untuk memperoleh persamaan Gauss dan relasi Mainardi-Codazzi, dimana :

- $\bar{r}_u$ = garis singgung disuatu titik pada garis parameter v = konstan .
- $\bar{r}_v$ = garis singgung disuatu titik pada garis parameter u = konstan.

Kita nyatakan $\bar{r}_{uu}$, $\bar{r}_{uv}$ dan $\bar{r}_{vv}$ dalam vektor-vektor dasar diatas sebagai berikut :

$$\bar{r}_{uu} = L\,\bar{n} + \left\{ {1\;1 \atop 1} \right\} \bar{r}_u + \left\{ {1\;1 \atop 2} \right\} \bar{r}_v \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\bar{r}_{uv} = M\,\bar{n} + \left\{ {1\;2 \atop 1} \right\} \bar{r}_u + \left\{ {1\;2 \atop 2} \right\} \bar{r}_v \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\bar{r}_{vv} = N\,\bar{n} + \left\{ {2\;2 \atop 1} \right\} \bar{r}_u + \left\{ {2\;2 \atop 2} \right\} \bar{r}_v \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

dengan $\left\{ {1\;1 \atop 1} \right\}$, $\left\{ {1\;1 \atop 2} \right\}$, $\left\{ {1\;2 \atop 1} \right\}$, $\left\{ {1\;2 \atop 2} \right\}$, $\left\{ {2\;2 \atop 1} \right\}$, $\left\{ {2\;2 \atop 2} \right\}$, dan disebut simbol-simbol Christoffel, yang harganya akan kita peroleh sebagai berikut :

$$\bar{r}_u \cdot \bar{r}_u = E$$

persamaan tersebut didiferensialkan terhadap u dan v maka akan diperoleh :

a. $\bar{r}_{uu} \cdot \bar{r}_u + \bar{r}_u \cdot \bar{r}_{uu} = E_u$

$2\ \bar{r}\ \ \bar{r}\ = E$

$$\bar{r}_u \cdot \bar{r}_{uu} = \tfrac{1}{2} E_u$$

b. $\bar{r}_{uv} \cdot \bar{r}_u + \bar{r}_u \cdot \bar{r}_{uv} = E_v$

$$\tfrac{1}{2} E_v = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_{uv}$$

maka persamaan (1) menjadi :

$$\bar{r}_u \cdot \bar{r}_{uu} = L\, \bar{n} \cdot \bar{r}_u + \left\{ {1 \atop 1} {1 \atop } \right\} \bar{r}_u \cdot \bar{r}_u + \left\{ {1 \atop 2} {1 \atop } \right\} \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v$$

$$\tfrac{1}{2} E_u = \left\{ {1 \atop 1} {1 \atop } \right\} E + \left\{ {1 \atop 2} {1 \atop } \right\} F \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Demikian pula jika $\bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = F$ didiferensialkan terhadap u dan v akan diperoleh :

a. $\bar{r}_{uu} \cdot \bar{r}_v + \bar{r}_u \cdot \bar{r}_{uv} = F_u$

$$\bar{r}_u \cdot \bar{r}_{uv} = \tfrac{1}{2} E_v$$

$$\bar{r}_{uu} \cdot \bar{r}_v + \tfrac{1}{2} E_v = F_u$$

$$\bar{r}_{uu} \cdot \bar{r}_v = F_u - \tfrac{1}{2} E_v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

b. $\bar{r}_{uv} \cdot \bar{r}_v + \bar{r}_u \cdot \bar{r}_{vv} = F_v$

$$\bar{r}_{uv} \cdot \bar{r}_v = \tfrac{1}{2} G_u$$

$$\bar{r}_u \cdot \bar{r}_{vv} = F_v - \tfrac{1}{2} G_u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5')$$

Dari hasil-hasil diatas maka persamaan (1) menjadi berubah yaitu :

$$\bar{r}_{uu} \cdot \bar{r}_v = L\, \bar{n} \cdot \bar{r}_v + \left\{ {1 \atop 1} {1 \atop } \right\} \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v + \left\{ {1 \atop 2} {1 \atop } \right\} \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v$$

$$F_u - \tfrac{1}{2} E_v = \left\{ {1 \atop 1} {1 \atop } \right\} F + \left\{ {1 \atop 2} {1 \atop } \right\} G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Persamaan (4) dan persamaan (6) akan menghasilkan $\left\{ {1 \atop 1} {1 \atop } \right\}$ dan $\left\{ {1 \atop 2} {1 \atop } \right\}$ yaitu :

a. $(4) \times F \longrightarrow \left\{ {1 \atop 1} {1 \atop } \right\} EF + \left\{ {1 \atop 2} {1 \atop } \right\} F^2 = \tfrac{1}{2} E_u F$

b. $(6) \times E \longrightarrow \left\{ {1 \atop 1} {1 \atop } \right\} E\, F + \left\{ {1 \atop 2} {1 \atop } \right\} F^2 = EF_u - \tfrac{1}{2} EE_v$

Hasil a dan b dikurangkan hingga diperoleh :

$$\left\{ {1 \atop 2} {1 \atop } \right\} (F^2 - EG) = \tfrac{1}{2} E_u F - E F_u + \tfrac{1}{2} EE_v$$

atau $\left\{ {1 \atop } {1 \atop } \right\} = \dfrac{\tfrac{1}{2} E_u F - E F_u + \tfrac{1}{2} EE_v}{}$

$$\left\{ {}^{1}\,{}_{2}\,{}^{1} \right\}(F^2 - EG) = \frac{2\,E\,F_u - E\,E_v + F\,E_u}{2H^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Jika persamaan (4) digandakan dengan G dan persamaan (6) digandakan dengan F maka diperoleh :

$$\text{c. } \left\{ {}^{1}\,{}_{1}\,{}^{1} \right\} EG + \left\{ {}^{1}\,{}_{2}\,{}^{1} \right\} FG = \tfrac{1}{2}\, E_u\, G$$

$$\text{d. } \left\{ {}^{1}\,{}_{1}\,{}^{1} \right\} F^2 + \left\{ {}^{1}\,{}_{2}\,{}^{1} \right\} FG = F\,F_u - \tfrac{1}{2}\, F\, E_v \quad -$$

$$\left\{ {}^{1}\,{}_{1}\,{}^{1} \right\} E\,G - F^2 = \tfrac{1}{2}\, E_u\, G - F\,F_u + \tfrac{1}{2}\, F\, E_v$$

$$\left\{ {}^{1}\,{}_{1}\,{}^{1} \right\} H^2 = \tfrac{1}{2}\, E_u\, G - F\,F_u + \tfrac{1}{2}\, F\, E_v$$

atau $$\left\{ {}^{1}\,{}_{1}\,{}^{1} \right\} = \frac{E_u\, G - 2\,F\,F_u + E_v\,F}{2H^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh simbol-simbol Christoffel yang lain yaitu :

$$\left\{ {}^{1}\,{}_{1}\,{}^{2} \right\} = \frac{G\,E_v - F\,G_u}{2H^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

$$\left\{ {}^{1}\,{}_{2}\,{}^{2} \right\} = \frac{E\,G_u - F\,E_v}{2H^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9')$$

$$\left\{ {}^{2}\,{}_{1}\,{}^{2} \right\} = \frac{2\,G\,F_v - G\,G_u - F\,G_v}{2H^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

$$\left\{ {}^{2}\,{}_{2}\,{}^{2} \right\} = \frac{E\,G_v - 2\,F\,F_v + F\,G_u}{2H^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

Sehingga rumus (1) ,(2) dan (3) disebut rumus Gauss ,jika simbol-simbol Christoffel yang telah kita peroleh itu kita substitusikan pada persamaan (1),(2) dan(3) maka jika :

$$\frac{\partial}{\partial v}\,\bar{r}_{uu} = \frac{\partial}{\partial u}\,\bar{r}_{uv}$$

dan disubstitusikan harga-harga $\bar{r}_{uu}$ dan $\bar{r}_{uv}$ pada persamaan (1) dan (2) akan diperoleh :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(L\,\bar{n} + \left\{ {}^{1}\,{}_{1}\,{}^{1} \right\}\bar{r}_u + \left\{ {}^{1}\,{}_{2}\,{}^{1} \right\}\bar{r}_v\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(M\bar{n} + \left\{ {}^{1}\,{}_{1}\,{}^{2} \right\}\bar{r}_u + \left\{ {}^{1}\,{}_{2}\,{}^{2} \right\}\bar{r}_v\right.$$

atau :

$$L_v\,\bar{n} + \ell_v \bar{r}_u + \lambda_v \bar{r}_v + L\,\bar{n}_v + \ell\,\bar{r}_{uv} + \lambda\,\bar{r}_{vv} =$$

$$M_u\,\bar{n} + m_u \bar{r}_u + \mu_u \bar{r}_v + M\,\bar{n}_u + m\,\bar{r}_{uu} + \mu\,\bar{r}_{uv}$$

dengan :

$$\ell = \left\{ {1 \atop 1}\,{1 \atop } \right\}, \quad m = \left\{ {1 \atop 1}\,{2 \atop } \right\}, \quad \lambda = \left\{ {1 \atop 2}\,{1 \atop } \right\}, \quad \text{dan}$$

$$\mu = \left\{ {1 \atop 2}\,{2 \atop } \right\}.$$

Bila persamaan diatas masing-masing kita kalikan secara skalar dengan $\bar{n}$ akan diperoleh :

$$L_v + \ell_v \bar{r}_u . \bar{n} + \lambda_v \bar{r}_v . \bar{n} + L\,\bar{n}_v . \bar{n} + \ell\,\bar{r}_{uv} . \bar{n} + \lambda\,\bar{r}_{vv} . \bar{n} =$$

$$M_u + m_u \bar{r}_u . \bar{n} + \mu_u \bar{r}_v . \bar{n} + M\,\bar{n}_u . \bar{n} + m\,\bar{r}_{uu} . \bar{n} + \mu\,\bar{r}_{uv} . \bar{n}$$

Pada halaman 11 dan 12 telah dijelaskan bahwa

$$\bar{n} . \bar{r}_u = \bar{n} . \bar{r}_v = 0$$

$$\bar{n} . \bar{n}_u = \bar{n} . \bar{n}_v = 0$$

sehingga persamaan tersebut diatas menjadi :

$$L_v + \left\{ {1 \atop 1}\,{1 \atop } \right\} M + \left\{ {1 \atop 2}\,{1 \atop } \right\} N = M_u + \left\{ {1 \atop 1}\,{2 \atop } \right\} L + \left\{ {1 \atop 2}\,{2 \atop } \right\} M \quad \ldots\ldots (11)$$

atau $L_v - M_u = \left\{ {1 \atop 1}\,{2 \atop } \right\} L - \left(\left\{ {1 \atop 1}\,{1 \atop } \right\} - \left\{ {1 \atop 2}\,{2 \atop } \right\} \right) M - \left\{ {1 \atop 2}\,{1 \atop } \right\} N$

Dengan cara sama ,jaitu :

$$\frac{\partial}{\partial v} \bar{r}_{uv} = \frac{\partial}{\partial u} \bar{r}_{vv}$$

akan diperoleh :

$$M_v + \left\{ {1 \atop 1}\,{2 \atop } \right\} M + \left\{ {1 \atop 2}\,{2 \atop } \right\} N = N_u + \left\{ {2 \atop 1}\,{2 \atop } \right\} L + \left\{ {2 \atop 2}\,{2 \atop } \right\} M \quad \ldots\ldots (11')$$

atau $M_v - N_u = \left\{ {2 \atop 1}\,{2 \atop } \right\} L - \left(\left\{ {1 \atop 1}\,{2 \atop } \right\} - \left\{ {2 \atop 2}\,{2 \atop } \right\} \right) M - \left\{ {1 \atop 2}\,{2 \atop } \right\} N$

Persamaan (11) dan (11') tersebut diatas disebut relasi Mainardi-Codazzi.