BAB I

PENDAHULUAN

Sebelum kita bicarakan jurusan sekawan , jurusan asimptotik dan garis asimptotik terlebih dahulu akan dibahas vektor-vektor satuan $\bar{t}$,$\bar{n}$,$\bar{b}$. Besaran Fundamental orde pertama dan orde kedua akan dibicarakan pada bab II.

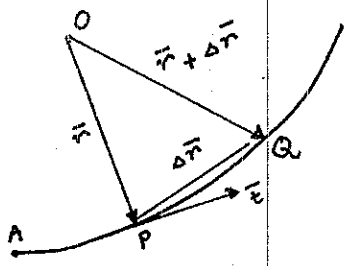
Sedang pada bab III akan dibicarakan tentang jurusan sekawan ,jurusan asimptotik dan garis asimptotik pada suatu permukaan ,dan garis asimptotik pada beberapa - permukaan akan diuraiakan pada bab IV.

RUMUS SERRET DAN FRENET

a. Vektor singgung satuan.

Vektor $\bar{r}$ dari suatu titik pada suatu kurva ruang disebut radius vektor yang merupakan fungsi panjang busur s dan dihitung dari titik A pada kurva itu. $\bar{r}'$,$\bar{r}''$,$\bar{r}'''$ dan seterusnya merupakan turunan-turunan $\bar{r}$ terhadap s. Titik P dan titik Q pada kurva berhubungan dengan vektor-vektor $\bar{r}$ dan $\bar{r}+\Delta\bar{r}$,dengan kedua vektor tersebut merupakan fungsi s dan s $+\Delta$ s. Jika vektor $\overline{PQ}$ dinyatakan dengan $\Delta\bar{r}$,maka $\Delta\bar{r}/\Delta s$ merupakan vektor yang berarah sama dengan vektor $\overline{PQ}$. Limit $\Delta\bar{r}/\Delta s$ jika Δs mendekati nol merupakan arah garis singgung dititik P. Harga $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\Delta\bar{r}/\Delta s$ merupakan vektor satuan yang sejajar garis singgung kurva dititik P dan disebut vektor $\bar{t}$, sehingga vektor $\bar{t}$ dapat disebut sebagai vektor singgung satuan dititik P , dan dinyatakan oleh persamaan :

$$\bar{t} = \underset{\Delta s \to 0}{\text{limit}}\ \Delta\bar{r}/\Delta s = d\bar{r}/ds = \bar{r}'$$

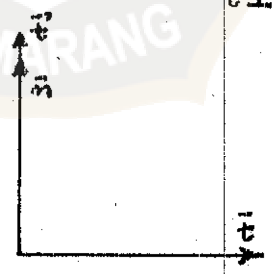


b. <u>Vektor normal satuan.</u>

Vektor normal satuan ialah vektor satuan yang tegak lurus pada vektor singgung satuan $\bar{t}$. Oleh karena $\bar{t}$ adalah vektor satuan maka $\bar{t} \cdot \bar{t} = 1$, jika persamaan tersebut didiferensialkan terhadap s diperoleh $\bar{t}'.\bar{t} + \bar{t}.\bar{t}' = 0 \longrightarrow$

$$2\ \bar{t}.\bar{t}' = 0$$

yang berarti $\bar{t}' \perp \bar{t}$,sebab $\left.\begin{matrix}\bar{t}' \perp \bar{t} \\ \bar{t} \perp \bar{n}\end{matrix}\right\} \longrightarrow \bar{t}' // \bar{n}$

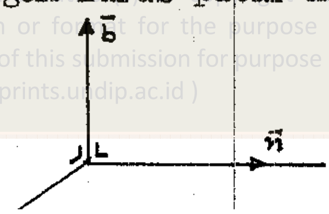


c. <u>Vektor binormal satuan.</u>

Normal pada suatu titik yang tegak lurus pada bidang yang dibentuk oleh vektor normal satuan dan vektor singgung satuan disebut vektor binormal satuan yang disajika oleh persamaan :

$$\bar{b} = \bar{t} \times \bar{n}$$

Sehingga ketiga vektor satuan itu membentuk sistim sumbu tegak lurus putar kanan.



Hubungan-hubungan yang terjadi dari ketiga vektor tersebut disajikan oleh :

$$\bar{t} \cdot \bar{n} = \bar{n} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{t} = 0$$

$$\bar{t} \cdot \bar{t} = \bar{n} \cdot \bar{n} = \bar{b} \cdot \bar{b} = 1$$

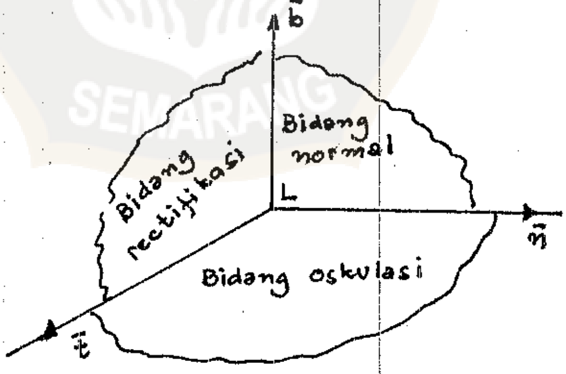
$$\bar{t} \times \bar{n} = \bar{b} \text{ , } \bar{n} \times \bar{b} = \bar{t} \text{ , } \bar{b} \times \bar{t} = \bar{n}$$

Ketiga vektor tersebut juga membentuk bidang- bidang yang saling tegak lurus :

a. Bidang oskulasi ialah bidang yang melalui vektor singgung satuan $\bar{t}$ dan normal satuan $\bar{n}$.

b. Bidang normal ialah bidang yang melalui vektor normal satuan $\bar{n}$ dan vektor binormal satuan $\bar{b}$.

c. Bidang rectifikasi ialah bidang yang melalui vektor binormal satuan $\bar{b}$ dan vektor singgung satuan $\bar{t}$.



Kelengkungan dan torsi.

a. Vektor kelengkungan adalah besar perobahan arah vektor singgung sepanjang kurva persatuan panjang busur s. Besaran kelengkungan dinyatakan dengan k, sedang kebalikan dari kelengkungan disebut jari-jari kelengkungan yang dinyatakan dengan ρ .

Pada keterangan terdahulu telah diperoleh :

$$\left.\begin{array}{l} \bar{t}' \perp \bar{t} \\ \bar{t} \perp \bar{n} \end{array}\right\} \dashrightarrow \quad \bar{t}' \,//\, \bar{n}$$

Jika vektor kelengkungan diberikan oleh :

$$\bar{K} = k\,\bar{n} = d\bar{t}/ds$$

yang menggambarkan perobahan arah vektor singgung satuan $\bar{t}$ persatuan panjang busur s ,sedang faktor k pada ruas kanan disebut kelengkungan ,maka panjang vektor kelengkungan adalah $|k|$. Biasanya - vektor $\bar{n}$ dipilih searah dengan vektor $\bar{t}'$, hingga kelengkungan k selalu positip yang disajikan oleh:

$$\left|\frac{d^2\,\bar{r}}{d\,s^2}\right| = \left|\frac{d\bar{t}}{ds}\right| = |\bar{t}'| = k$$

persamaan diatas juga dapat disajikan dalam bentuk:

$$k^2 = \bar{r}'' \cdot \bar{r}''$$

b. Torsi adalah perobahan arah bidang oskulasi ,besaran torsi dinyatakan dengan τ sedang kebalikan torsi disebut jari-jari torsi yang dinyatakan oleh σ . Perobahan arah bidang oskulasi disajikan dengan vektor $\bar{b}' = d\,\bar{b}/d\,s$, dan telah diketahui $\bar{b} \cdot \bar{t} = 0$. Bila persamaan tersebut didiferensialkan terhadap s diperoleh :

$$\bar{b}' \cdot \bar{t} + \bar{b} \cdot \bar{t}' = 0$$

$$\bar{b}' \cdot \bar{t} + \bar{b} \cdot k\,\bar{n} = 0$$

maka $\bar{b}' \cdot \bar{t} = 0$ sehingga berlaku $\bar{b}' \perp \bar{t}$.

Bila $\bar{b} \cdot \bar{b} = 1$ dideferensialkan terhadap s maka :

$$\bar{b} \cdot \bar{b}' + \bar{b}' \cdot \bar{b} = 0 \longrightarrow 2\,\bar{b}' \cdot \bar{b} = 0$$

yang berarti $\bar{b}' \perp \bar{b}$.

Karena $\left.\begin{array}{l} \bar{b}' \perp \bar{t} \\ \bar{b}' \perp \bar{b} \end{array}\right\} \longrightarrow \bar{b}' /\!/ \bar{n}$

Jika τ faktor perbandingan ,maka $d\bar{b}/ds = -\tau\,\bar{n}$, dengan τ adalah torsi kurva. Torsi ini dapat mempunyai harga positip maupun negatip.

Sebelum kita mencari harga torsi terlebih dahulu kita akan mencari turunan $\bar{n}$ terhadap s yaitu :

$$\bar{n} = \bar{b} \times \bar{t}$$

$$d\bar{n}/ds = d/ds\ (\bar{b} \times \bar{t})$$

$$\bar{n}' = -\tau \bar{n} \times \bar{t} + \bar{b} \times (k \bar{n})$$

$$= \tau \bar{b} - k \bar{t}$$

Rumus Serret dan Frenet diperoleh dari ketiga turunan vektor-vektor $\bar{t}$,$\bar{n}$,$\bar{b}$ terhadap s yaitu :

$$\bar{t}' = k \bar{n}$$

$$\bar{n}' = \tau \bar{b} - k \bar{t}$$

$$\bar{b}' = -\tau \bar{n}$$

Untuk torsi kurva dapat diturunkan rumus sebagai berikut :

$$\bar{r}' = \bar{t}$$

$$\bar{r}'' = k \bar{n}$$

$$\bar{r}''' = k' \bar{n} + k \bar{n}'$$

$$= k' \bar{n} + k (\tau \bar{b} - k \bar{t})$$

Triple product ketiga turunan $\bar{r}$ terhadap s meng - hasilkan :

$$[\, r' , r'' , r''' \,] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ -k^2 & k' & k\tau \end{vmatrix} = k^2 \tau$$

maka torsi kurva menjadi :

$$\tau = \frac{\bar{r}' , \bar{r}'' , \bar{r}'''}{k^2}$$

$$\tau = \frac{\bar{r}' , \bar{r}'' , \bar{r}'''}{\bar{r}'' . \bar{r}''}$$