

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Meminimalkan kadar zat pencemar dalam air limbah adalah tujuan dari pengolahan air limbah, sedangkan tahap penanganan secara biologis aerobik terutama bertujuan menurunkan kandungan pencemar organik dalam air limbah (terukur sebagai penurunan COD).

Tahap penanganan ini meliputi penambahan lumpur aktif (lumpur yang mengandung mikroorganisme pengurai) dan penambahan oksigen ke dalam air limbah. Proses yang terjadi adalah degradasi material organik secara oksidasi dengan dikatalisis oleh enzim yang dihasilkan mikroorganisme pengurai dalam lumpur aktif.

2.1 Pengolahan Air Limbah Secara Biologis

Pengolahan secara biologis adalah salah satu cara pengolahan air limbah di samping kedua cara lainnya, yaitu cara pengolahan secara fisika dan kimia. Setiap jenis limbah membutuhkan tahap-tahap pengolahan tertentu. Pengolahan untuk air limbah domestik terutama ditujukan untuk mereduksi kandungan organiknya dan kadang-kadang juga senyawa-senyawa nitrogen dan fosfor. Pengolahan untuk air limbah pertanian terutama ditujukan untuk menurunkan kandungan senyawa-senyawa nitrogen dan fosfor karena dapat merangsang tumbuhnya tanaman-tanaman air pengganggu. Sementara itu pengolahan untuk air

limbah industri bertujuan untuk mereduksi baik kandungan organik maupun anorganik.

Tujuan utama pengolahan secara biologis adalah untuk mengkoagulasikan dan memisahkan zat padat koloid yang tidak terendapkan dan untuk menstabilkan bahan-bahan pencemar organik. Pengolahan secara biologis dikelompokkan menjadi empat jenis proses seperti berikut ini :

1. Proses Aerobik : proses pengolahan yang menggunakan oksigen, dikelompokkan lagi menjadi 3 jenis proses, yaitu proses suspended growth, attached growth dan proses gabungan. Proses pengolahan dengan lumpur aktif merupakan salah satu tahap dalam proses suspended growth dari proses aerobik.
2. Proses Anaerobik : proses pengolahan dalam lingkungan yang bebas oksigen, terdiri dari proses suspended growth dan attached growth.
3. Proses Anoksik : proses pengolahan dalam lingkungan bebas oksigen, di mana proses yang terjadi adalah peruraian nitrogen nitrat menjadi gas nitrogen secara biologis. Proses ini juga terdiri dari proses suspended growth dan proses attached growth.
4. Proses gabungan antara proses aerobik dengan anaerobik atau dengan anoksik. Terdiri atas proses suspended growth, attached growth dan proses gabungan.

2.2 Aspek-aspek Biokimia dan Mikrobiologi

2.2.1 Mikroorganisme pengurai

Berbagai jenis mikroorganisme (alga, fungi, protozoa, virus, crutacean, dll) terlibat dalam penguraian bahan organik dalam air limbah, tetapi yang terutama berperan adalah bakteri. Dengan enzim yang dihasilkannya, bakteri menguraikan bahan organik melalui tahapan-tahapan proses berikut :⁹⁾

1. Kontak antara molekul substrat dengan dinding sel. Pada tahap ini enzim yang terdapat di luar sel (extracellular enzim) berperan dalam menguraikan substrat yang tidak dapat ditransport ke dalam sel menjadi bentuk yang dapat ditansport.
2. Transport molekul substrat ke dalam sel.
3. Metabolisme substrat oleh sel. Tahap ini meliputi proses dissimilatory dan dan assimilatory yang dikatalisis oleh enzim yang terdapat di dalam sel (intracellular enzim). Dissimilatory merupakan proses oksidasi substrat yang menghasilkan energi. Energi yang dihasilkan umumnya disimpan dalam bentuk ATP (adenosin triphosphat). Pada saat sel membutuhkan energi untuk sintesa sel (assimilatory process) dan kelangsungan hidupnya, energi diambil dari cadangan dan ATP diubah menjadi ADP. Molekul ADP kemudian menangkap energi dari reaksi oksidasi substrat sehingga berubah menjadi ATP kembali dan seterusnya.

2.2.2 Kebutuhan oksigen mikroorganisme

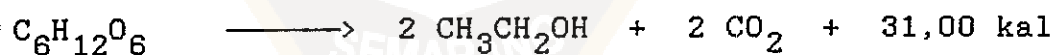
Dari kebutuhannya terhadap oksigen, mikroorganisme dapat dikelompokkan menjadi tiga golongan, yaitu golongan aerob, anaerob dan fakultatif. Golongan aerob mutlak membutuhkan oksigen untuk pertumbuhannya, golongan anaerob membutuhkan lingkungan yang bebas oksigen, sementara golongan fakultatif dapat hidup dengan ataupun tanpa oksigen.

Mikroorganisme yang digunakan dalam penanganan biologis aerobik adalah dari golongan aerob dan fakultatif. Pertumbuhan akan lebih efisien dalam lingkungan aerobik, sebab oksidasi secara aerobik pada umumnya merupakan reaksi oksidasi sempurna dari material organik. Akibatnya energi yang dihasilkan lebih besar, sehingga tersedia energi lebih banyak untuk pertumbuhan sel, dengan reaksi sebagai berikut :

reaksi oksidasi sempurna :



reaksi oksidasi sebagian :



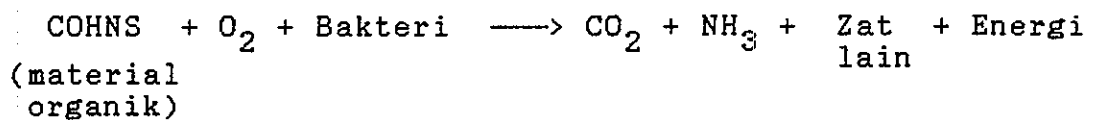
2.2.3 Reaksi degradasi material organik terlarut dalam air limbah

Material organik dalam air limbah dapat dibedakan menjadi dua macam, yakni organik terlarut / soluble organic substances (SOS) dan partikulat organik / particulate organic substances (POS). Analisis kinetika penguraian SOS dibedakan jelas dari POS karena peruraiannya yang berbeda. Hasil penelitian

menunjukkan bahwa POS sangat cepat diabsorpsi oleh lumpur aktif tetapi lebih sulit didegradasi daripada SOS⁵⁾. Untuk pembicaraan selanjutnya, bahan organik adalah bahan organik terlarut (SOS).

Sementara itu menurut Tchobanoglous (1979), degradasi bahan organik oleh mikroorganisme dapat digambarkan dalam reaksi oksidasi sbb :⁸⁾

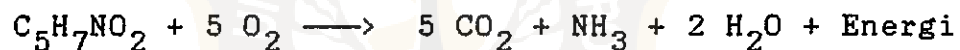
a. reaksi oksidasi (dissimilatory process) :



b. reaksi sintesis (assimilatory process) :



c. respirasi endogen (autooxidation) :



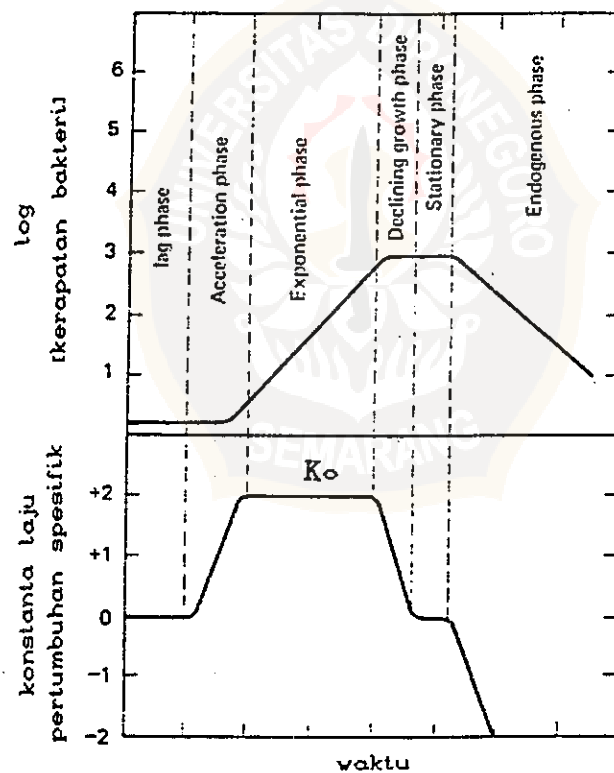
Jadi pada akhir proses akan terjadi pengurangan material organik serta penambahan sel/biomass.

2.2.4 Pola Pertumbuhan Mikroorganisme

Monod (1949) mengatakan bahwa pola pertumbuhan mikroorganisme terbagi menjadi enam fasa, sebagai berikut :³⁾

1. Lag phase : masa adaptasi terhadap lingkungan baru, waktu regenerasi tinggi, pertumbuhan sel masih nol.
2. Acceleration phase : Penurunan waktu regenerasi, kenaikan tingkat pertumbuhan.

3. Exponential phase : Waktu regenerasi konstan dan minimal, tingkat pertumbuhan (K_0) konstan dan maksimal, tingkat peruraian substrat maksimal.
4. Declining growth phase : Kenaikan waktu regenerasi dan penurunan konstanta pertumbuhan yang terjadi karena penurunan konsentrasi substrat.
5. Stationary Phase : Terjadinya keseimbangan antara tingkat pertumbuhan dan tingkat kematian sel.
6. Endogenous phase : Terjadi pernafasan endogen, peruraian sel dan tingkat kematian yang tinggi.



Gambar II.1 Pola Pertumbuhan Mikroorganisme³⁾

Pola pertumbuhan yang digambarkan di atas bukan merupakan sifat dasar dari sel bakteri, tetapi merupakan hasil interaksi sel dengan lingkungannya dalam sistem tertutup (contohnya sistem Batch). Fasa eksponential dapat dipertahankan untuk periode waktu yang panjang dalam suatu sistem terbuka seperti sistem aliran kontinu.

2.3 Kinetika Enzim

2.3.1 Persamaan Michaelis-Menten

Michaelis dan Menten (1913) mengatakan bahwa reaksi yang dikatalisis Enzim meliputi reaksi pembentukan kompleks, ES secara reversibel dan reaksi peruraian kompleks secara ireversibel, dengan reaksi sbb :⁴⁾



di mana E = Enzim

S = Substrat

ES = Kompleks Enzim-Substrat

P = produk

k_{+2} = konstanta

Mereka mengasumsikan bahwa tahap reversibel reaksi di atas dapat dinyatakan dengan suatu tetapan kesetimbangan sbb :

$$K_s = \frac{[E][S]}{[ES]} \dots\dots\dots(1)$$

atau : $[ES] = \frac{[E][S]}{K_s} \dots\dots\dots(2)$

di mana [E] dan [S] = konsentrasi enzim dan substrat pada waktu t. Konsentrasi substrat dan enzim bebas pada waktu

tertentu tidak dapat diukur langsung, sehingga kemudian dikonversikan ke konsentrasi awal dengan hubungan stoikiometri berikut :

$$[E]_0 = [E] + [ES] \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$[S]_0 = [S] + [ES] \quad \dots\dots\dots(4)$$

di mana $[E]_0$ dan $[S]_0$ = konsentrasi enzim dan konsentrasi substrat mula-mula.

Karena $[S]_0$ yang digunakan umumnya sangat besar dibandingkan $[E]_0$, maka diasumsikan bahwa $[S]_0 = [S]$. Bentuk persamaan untuk $[ES]$ menjadi :

$$[ES] = \frac{([E]_0 - [ES])[S]}{K_s} \quad \dots\dots\dots(5)$$

atau :

$$[ES] = \frac{[E]_0}{(K_s/[S]) + 1} \quad \dots\dots\dots(6)$$

Sementara itu tahap kedua didefinisikan sebagai reaksi sederhana orde-1 dengan konstanta kecepatan reaksi k_{+2} , sehingga kecepatan reaksi adalah :

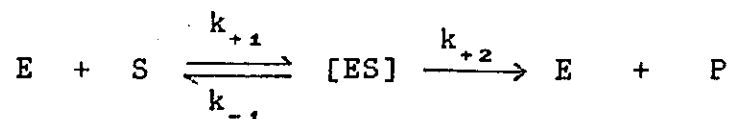
$$r = k_{+2}[ES] = \frac{k_{+2} [E]_0}{(K_s/[S]) + 1} = \frac{k_{+2} [E]_0 [S]}{K_s + [S]} \quad \dots\dots(7)$$

Persamaan-7 di atas disebut Persamaan M-M (Michaelis-Menten), meskipun sebelumnya juga pernah diturunkan oleh Henri (1902,1903).

2.3.2 Keadaan Tetap (Steady-State)

Persamaan-7 tidak memberikan petunjuk mengenai besarnya konstanta-konstanta terpaut. Briggs dan Haldane (1925)

kemudian mengembangkan gagasan mengenai keadaan steady-state :



$$\frac{d[ES]}{dt} = k_{+1}([E]_0 - [ES])[S] - k_{-1}[ES] - k_{+2}[ES] \dots\dots\dots(8)$$

Briggs dan Haldane menyatakan bahwa keadaan steady-state dicapai saat [ES] konstan/tetap, atau $d[ES]/dt = 0$, maka :

$$k_{+1}([E]_0 - [ES])[S] - k_{-1}[ES] - k_{+2}[ES] = 0$$

$$\text{atau : } [ES] = \frac{k_{+1}[E]_0[S]}{k_{-1} + k_{+2} + k_{+1}[S]} \dots\dots\dots(9)$$

sehingga kecepatan reaksi dapat diturunkan :

$$r = k_{+2}[ES] = \frac{k_{+1}k_{+2}[E]_0[S]}{k_{-1} + k_{+2} + k_{+1}[S]} = \frac{k_{+2}[E]_0[S]}{\frac{k_{-1} + k_{+2}}{k_{+1}} + [S]} \dots\dots\dots(10)$$

atau dituliskan dalam bentuk yang lebih umum :

$$r = \frac{R_{\max} [S]}{K_m + [S]} \dots\dots\dots(11)$$

di mana $R_{\max} = k_{+2} [E]_0$

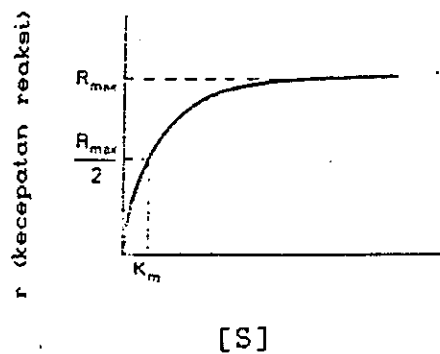
$$K_m = \frac{k_{-1} + k_{+2}}{k_{+1}}$$

Persamaan-11 merupakan bentuk persamaan M-M yang lebih modern, dan identik dengan persamaan-7. Dua konstanta terlibat adalah R_{\max} (kecepatan maksimum) dan K_m (konstanta M-M).

2.3.3 Kecepatan reaksi Enzim-Substrat

Persamaan M-M dapat digambarkan secara grafik seperti

berikut:



Gambar II.2 : Grafik dari Persamaan Michaelis-Menten ^{a)}

Dari gambar dapat dibaca suatu fenomena khusus yang hanya dijumpai pada reaksi enzim :

Saat $[S] \gg K_m$, laju reaksi konstan dan berorde nol terhadap $[S]$. Kecepatan reaksi menjadi :

$$r = R_{max} \dots\dots\dots(14)$$

Pada $[S]$ rendah ($[S] \ll K_m$), kecepatan reaksi sebanding dengan $[S]$, yaitu berorde-1 terhadap $[S]$. Kecepatan reaksi menjadi :

$$r = \frac{R_{max} [S]}{K_m} \dots\dots\dots(12)$$

Karena R_{max} dan K_m keduanya konstan, maka dapat dituliskan :

$$r = K [S] \dots\dots\dots(13)$$

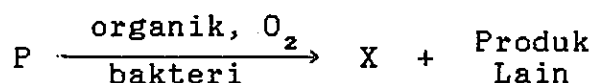
di mana $K = \frac{R_{max}}{K_m}$

Pada daerah intermediet, orde reaksi adalah pecahan dan disebut daerah percampuran orde. Segel (1968) mengatakan bahwa kinetika orde-nol dapat diasumsikan pada $[S] \geq 100K_m$,

sedangkan kinetika reaksi orde-1 berlaku pada $[S] \leq 0,01K_m$. Tetapi Goldman (1974) mengatakan bahwa kinetika orde-1 berlaku pada $[S] \leq K_m$.

2.4 Hubungan Kinetika dengan Mikrobiologi

Reaksi oksidasi yang menghasilkan sel dapat dinyatakan sbb:

$$E + S \rightleftharpoons ES \longrightarrow E + P$$


di mana P = produk disosiasi ES selain enzim, yaitu CO_2 , NH_3 , zat lain dan energi.

X = sel baru / biomass yang terbentuk

Sehingga dapat diringkaskan seperti berikut :



dengan y adalah unit sel yang terbentuk per unit substrat yang digunakan

Analog dengan persamaan M-M dapat dirumuskan :

$$-\frac{dS}{dt} = \frac{1}{y} \left(\frac{dX}{dt} \right) = \frac{R_{\max.} [S]}{(K_m + [S])} \dots\dots\dots (15)$$

Jika semua kebutuhan dan nutrisi yang diperlukan terpenuhi, maka pertumbuhan/kenaikan konsentrasi sel mikroorganisme, ΔX , terhadap waktu, Δt , akan sebanding dengan jumlah/konsentrasi sel (biomass).

$$\Delta X \sim [X] \cdot \Delta t$$

$$\Delta X = K \cdot [X] \cdot \Delta t \dots\dots\dots (16)$$

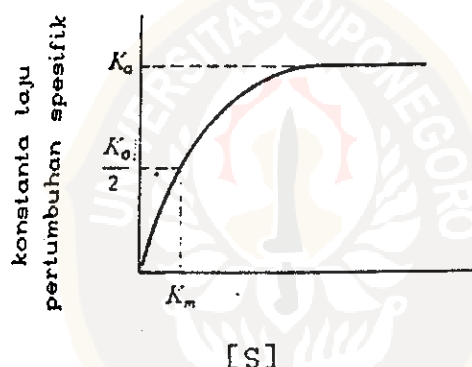
$$\left(\frac{dX}{dt}\right) = K \cdot [X] \dots\dots\dots(17)$$

di mana $K = \left(\frac{dX}{dt}\right)/[X]$, dan disebut konstanta laju pertumbuhan spesifik.

Di luar fasa exponential (Gambar-II.1), kecepatan pertumbuhan bukan hanya merupakan fungsi dari konsentrasi sel, X, tetapi juga tergantung dari konsentrasi substrat. Monod (1949) mengadakan percobaan dan merumuskan hasilnya sbb :

$$K = K_o \cdot \frac{[S]}{K_m + [S]} \dots\dots\dots(18)$$

di mana K_o adalah konstanta laju pertumbuhan spesifik yang maksimum. Persamaan-18 dapat digambarkan dengan grafik sbb:



Gambar II.3 : Hubungan konstanta laju pertumbuhan spesifik dengan konsentrasi substrat

Substitusi persamaan-18 ke persamaan-17 menghasilkan :

$$\left(\frac{dX}{dt}\right) = \frac{K_o [X] [S]}{(K_m + [S])} \dots\dots\dots(19)$$

Sehingga

$$-\frac{dS}{dt} = \frac{1}{y} \left(\frac{dX}{dt}\right) = \frac{K_o [X] [S]}{y(K_m + [S])} \dots\dots\dots(20)$$

di mana dengan merujuk pada persamaan-15, terlihat bahwa R_{max} akan sama nilainya dengan $\frac{K_o}{y} [X]$.

Dalam prakteknya tidak semua bakteri akan hidup atau aktif berkembang, karena adanya autooksidasi/respirasi endogen. Laju autooksidasi umum dinyatakan sebagai reaksi orde-1, sbb:

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_{\text{endg}} = -K_d [X] \dots\dots\dots(21)$$

Sehingga laju netto pertumbuhan biomass/sel baru :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{K_o [X] [S]}{K_m + [S]} - K_d [X] \dots\dots\dots(22)$$

atau :

$$-\frac{dS}{dt} = \frac{K_o [X] [S]}{y(K_m + [S])} - \frac{K_d}{y} [X] \dots\dots\dots(23)$$

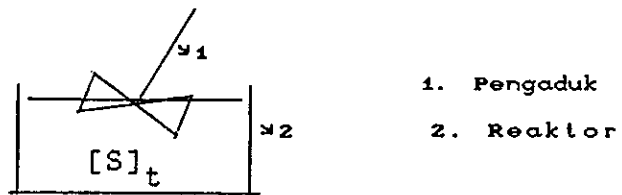
2.5 Sistem Reaktor

Ada beberapa jenis reaktor yang digunakan dalam proses pengolahan air limbah, seperti : Sistem Reaktor Batch, Sistem Reaktor Plug-Flow, Sistem Reaktor Kontinu, Sistem Reaktor Arbitrary-Flow, Sistem Reaktor Packed-bed, Sistem Reaktor Fluidized-bed. Berikut ini hanya akan ditinjau dua sistem reaktor, yaitu sistem reaktor Batch dan reaktor Kontinu.

2.5.1 Sistem Reaktor Batch (tak kontinu)

Merupakan sistem di mana reaktan dimasukkan ke dalam reaktor dan reaksi dibiarkan berlangsung hingga tingkat yang dikehendaki. Komposisi dalam sistem semacam ini berubah terhadap waktu, namun isi reaktor dianggap homogen karena

dilengkapi dengan pengaduk..



Gambar II.4 : Sistem Reaktor Bacth di mana tidak terjadi aliran masuk dan keluar reaktor.

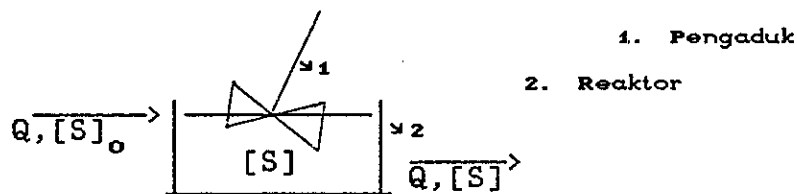
2.5.2 Sistem Reaktor Kontinu

Sistem reaktor dengan aliran kontinu (Continuous-Flow Stirred Tank Reaktor / CFSTR) dioperasikan dalam keadaan steady-state sehingga komposisi sistem tidak berubah dengan waktu. Reaktan dialirkan secara kontinu ke dalam reaktor dan produk dialirkan secara kontinu juga, sementara itu komposisi sistem dipertahankan seragam di seluruh bagian reaktor dengan pengadukan. Besaran waktu/t dalam reaktor kontinu dirumuskan :

$$t_{CFSTR} = V / Q \dots\dots\dots(24)$$

di mana V = volume reaktor

Q = laju alir reaktan masuk atau produk keluar dari reaktor



Gambar II.5 : Sistem Reaktor Kontinu di mana terjadi aliran masuk dan keluar reaktor

2.6 Penentuan Konstanta Biokinetika

Konstanta-konstanta K_o , K_d , K_m dan y mempunyai nilai yang berbeda-beda untuk setiap jenis limbah. Penentuan nilai konstanta-konstanta tersebut perlu ditetapkan pada tahap awal pengolahan sehubungan dengan perancangan reaktor dan kondisi pengolahan yang diperlukan.

Di bawah ini akan ditinjau penentuan nilai konstanta-konstanta di atas dengan sistem kontinu dan sistem batch. Untuk menjelaskan perubahan yang terjadi dalam reaktor digunakan dasar pendekatan neraca/kesetimbangan massa (hukum kekekalan massa).

2.6.1 Percobaan dengan Sistem Aerator Kontinu.

Massa tidak dapat dimusnahkan ataupun diciptakan. Pada sistem kontinu, reaktan dialirkan masuk dan keluar reaktor dengan debit konstan sehingga keadaan sistem dapat dinyatakan dengan neraca massa :

$$\text{perubahan massa S} = \text{aliran masuk reaktor} - \text{aliran keluar reaktor} - \text{massa yang bereaksi}$$

Secara matematis dilambangkan :⁸⁾

$$V \left(\frac{dS}{dt} \right)_{\text{netto}} = Q [S]_o - Q [S] - V \frac{dS}{dt} \quad \dots\dots (25)$$

di mana V = volume reaktor

Q = laju aliran influent masuk = laju aliran efluent keluar reaktor (steady-state condition)

$[S]_o$ = konsentrasi substrat dalam influent

$[S]$ = konsentrasi substrat dalam efluent

Sehingga perubahan massa produk X dinyatakan sbb :

$$V\left(\frac{dX}{dt}\right)_{\text{netto}} = Q [X]_o - Q [X] + V \frac{dX}{dt} \dots\dots(26)$$

Substitusi persamaan-23 ke persamaan-26 menghasilkan :

$$V\left(\frac{dX}{dt}\right)_{\text{netto}} = Q [X]_o - Q [X] + V \left(- y \frac{dS}{dt} - K_d [X]\right) \dots(27)$$

Dengan asumsi bahwa limbah awal tidak mengandung biomass dan keadaan adalah steady-state, maka diperoleh :

$$\frac{Q}{V} = \frac{1}{t} = - y \frac{1}{[X]} \frac{dS}{dt} - K_d \dots\dots\dots(28)$$

Sementara itu dapat didefinisikan :

$$r_s = \frac{dS}{dt} = - \frac{[S]_o - [S]}{t} \dots\dots\dots(29)$$

Substitusi persamaan-29 ke persamaan-28 menghasilkan :

$$\frac{1}{t} = y \frac{[S]_o - [S]}{[X] t} - K_d \dots\dots\dots(30)$$

atau
$$\frac{[S]_o - [S]}{[X]} = \frac{K_d t}{y} + \frac{1}{y} \dots\dots\dots(31)$$

Hubungan antara $\frac{[S]_o - [S]}{[X]}$ dengan t dalam persamaan-31 menghasilkan persamaan garis linier yang dapat digunakan untuk mendapatkan harga y dan K_d . Harga K_o dan K_m didapat dengan menyamakan persamaan-29 dengan persamaan-20 sbb:

$$- \frac{[S]_o - [S]}{t} = - \frac{K_o [X] [S]}{y(K_m + [S])} \dots\dots\dots(32)$$

Dengan membagi kedua sisi dengan $[X]$ didapatkan :

$$\frac{K_o [S]}{y(K_m + [S])} = \frac{[S]_o - [S]}{[X] t} \dots\dots\dots(33)$$

$$\text{atau : } \frac{[X] t}{[S]_o - [S]} = \left(\frac{K_m y}{K_o} \right) \frac{1}{[S]} + \frac{y}{K_o} \dots\dots\dots(34)$$

Dengan menggunakan persamaan-31 dan persamaan-34 bersama-sama dapat diperoleh harga K_o , K_m , K_d dan y .

Jika nilai konstanta-konstanta di atas diketahui, maka konsentrasi substrat dan biomass dalam efluent dapat diprediksikan sebagai berikut. Jika persamaan-32 disubstitusikan untuk $\frac{[S]_o - [S]}{t}$ ke persamaan-30, akan dihasilkan :

$$\frac{1}{t} = \frac{K_o [S]}{K_m + [S]} - K_d \dots\dots\dots(35)$$

Jika persamaan-35 diselesaikan untuk $[S]$, akan diperoleh :

$$[S] = \frac{K_m (1 + K_d t)}{t(K_o - K_d) - 1} \dots\dots\dots(36)$$

Sedangkan konsentrasi biomass, $[X]$, diperoleh dengan menyelesaikan persamaan-31 sebagai berikut :

$$[X] = \frac{y([S]_o - [S])}{(1 + K_d t)} \dots\dots\dots(37)$$

2.6.2 Percobaan dengan Sistem Batch (tidak kontinu)

Karena tidak ada aliran masuk maupun keluar dari reaktor, maka $Q = 0$, dan persamaan-25 menjadi :

$$-\left(\frac{dS}{dt}\right)_{\text{netto}} = \frac{dS}{dt} \dots\dots\dots(38)$$

Artinya, perubahan massa S dalam reaktor semata-mata terjadi karena reaksi reaktan S dalam reaktor. Akan ditentukan K_o , K_m , K_d dan y dengan dasar persamaan-23. Pada kondisi $[S] \gg K_m$,

maka kebutuhan substrat bagi mikroorganisme terpenuhi dan kemungkinan terjadinya respirasi endogen menjadi sangat kecil, sehingga K_d dapat diasumsikan sama dengan nol. Persamaan-23 menjadi :

$$-\frac{dS}{dt} = \frac{K_o [X] [S]}{y(K_m + [S])} \dots\dots\dots(39)$$

Selanjutnya K_m dapat diabaikan terhadap $[S]$, sehingga persamaan-39 menjadi :

$$-\frac{dS}{dt} = \frac{K_o}{y} [X] \dots\dots\dots(40)$$

$$\frac{dX}{dt} = K_o [X] \dots\dots\dots(41)$$

Dengan integrasi, persamaan-41 menjadi :

$$\ln \frac{[X]}{[X]_o} = K_o \cdot t \dots\dots\dots(42)$$

Jika persamaan-42 kemudian disubstitusikan untuk $[X]$ ke persamaan-40, diperoleh :

$$\frac{[S]_o - [S]}{[X]_o} = \frac{1}{y} (e^{K_o \cdot t} - 1) \dots\dots\dots(43)$$

Dengan membuat kurva $\ln [X]/[X]_o$ vs t untuk persamaan-42 akan didapatkan harga K_o , sedangkan dari persamaan-43 dapat dibuat

kurva $\frac{[S]_o - [S]}{[X]_o}$ vs $(e^{K_o \cdot t} - 1)$ untuk mendapatkan harga y .

Harga K_o dan y kemudian disubstitusikan ke persamaan-45 sehingga harga K dapat dihitung.

Pada kondisi di mana $[S] \ll K_m$, tingkat pertumbuhan sel kecil dan $[S]$ dapat diabaikan terhadap K_m . Persamaan-39 menjadi :

$$-\frac{dS}{dt} = \frac{K_o [X] [S]}{y K_m} \dots\dots\dots(44)$$

Jika pertumbuhan sel kecil, $[X]$ dapat diasumsikan konstan sehingga integrasi persamaan-43 adalah :

$$\ln \frac{[S]_o}{[S]} = \frac{K_o}{y K_m} \overline{[X]} t \dots\dots\dots(45)$$

di mana $\overline{[X]}$ = harga rata-rata $[X]$

Dari persamaan-45 dapat dihitung konsentrasi substrat sebagai berikut :

$$[S] = [S]_o e^{-K_o \cdot \overline{[X]} \cdot t / y \cdot K_m} \dots\dots\dots(46)$$

Sementara itu konsentrasi biomass dapat diturunkan dari persamaan-41 seperti berikut :

$$[X] = [X]_o \cdot e^{K_o \cdot t} \dots\dots\dots(47)$$

