LAMPIRAN A

Arti Geometri dari Persamaan (2.3)

Dengan menuliskan kembali produk geometri dari persamaan (2.3)

$$\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \qquad \text{(A.1)}$$

yang merupakan dekomposisi produk geometri menjadi bagian simetri $\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{vu}$ dan bagian asimetri $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = - \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}$. Dari produk geometri (A.1) dapat ditunjukkan bahwa produk dari vektor *kollinier* adalah skalar dan produk dari vektor *orthogonal* merupakan bivektor.

Produk geometri ini mempunyai interpretasi yang berbeda dengan produk *dyadic* (Boas, 1983) yang menunjukkan sebuah komponen dari tensor rank-2 dan juga produk $(\sigma \boldsymbol{u})(\sigma \boldsymbol{v})$ dalam aljabar Pauli yang dipisahkan menjadi produk skalar $\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v}$ dan produk $i.(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})$ dengan i bilangan imajiner satuan (Sokolov, 1966).

Produk geometri (A.1) dapat diinterpretasi sebagai penjumlahan skalar dan bivektor yang menghasilkan sebuah produk yang memuat keduanya. Interpretasi ini serupa dengan penambahan bilangan real dan bilangan imajiner menjadi bilangan komplek yang memuat kedua bilangan tersebut (Hestenes, 1996). Produk geometri (A.1) ini selanjutnya mengarah pada multivektor sebagai penjumlahan dari bagian skalar dan bivektor yang digunakan untuk mengkombinasikan dua kuantitas yang berbeda.

Selanjutnya produk *dyadic* dapat dilihat sebagai bagian bivektor dari produk geometri (A.1) dengan $\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ sebagai produk dari vektor *orthogonal*. Produk $(\sigma \boldsymbol{u})(\sigma \boldsymbol{v})$ dari aljabar Pauli dapat diinterpretasi kembali dengan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

menganggap penjumlahan bagian real (skalar) dan imajiner $i.(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})$ tidak membentuk kuantitas tunggal sebagai sebuah vektor atau skalar. Dalam interpretasi ini bilangan imajiner satuan dari aljabar Pauli digantikan dengan bivektor **i** yang mempunyai arti geometri.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

LAMPIRAN B

Penurunan Persamaan Dirac dalam Representasi Matrik

Dengan menuliskan bentuk dari persamaan Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi \qquad \text{(B.1)}$$

dengan Ψ merupakan fungsi gelombang yang menggambarkan state dari elektron. Operator H diasumsikan menjadi fungsi dari operator momentum $-i\nabla$ dan massa m yang nampak menggambarkan energi dari elektron. Untuk eletron bebas, diasumsikan $\boldsymbol{H}$ tidak gayut waktu. Selanjutnya kaitan relativistik $E^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + \mathrm{m}^2c^4$ yang dikenakan pada penyelesaian gelombang bidang $\Psi \propto e^{-ip.x}$. Yang dapat diselesaikan jika persamaan (B.1) mengarah pada

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\Psi = \left[c^2\left(-i\hbar\nabla\right)^2 + m^2c^4\right]\Psi \qquad \text{(B.2)}$$

Dikenakan turunan pertama $i\partial/\partial t$ dari persamaan (B.1) untuk mendapatkan

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\Psi = Hi\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H^2\Psi$$

$$= \left[c^2\left(-i\hbar\nabla\right)^2 + m^2c^4\right]\Psi \qquad \text{(B.3)}$$

atau

$$H^2 = c^2\left(-i\hbar\nabla\right)^2 + m^2c^4 \qquad \text{(B.4)}$$

Persamaan (B.2) ini tidak lain merupakan persamaan Klein-Gordon. Jadi, jika suatu fungsi gelombang memenuhi persamaan Dirac juga harus memenuhi persamaan Schrödinger. Suatu fungsi gelombang relativistik yang memenuhi persamaan Klein-Gordon konsisten dengan $E^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

Dengan H^2 menjadi bentuk kuadrat dari fungsi $-ic\hbar\nabla$ dan mc^2 , operator H ini mempunyai bentuk linier dari $-ic\hbar\nabla$ dan mc^2, yaitu

$$H = c\alpha\,.\,(-i\hbar\nabla) + \beta mc^2 \qquad \text{(B.5)}$$

dengan α dan β beberapa konstanta yang mengarah pada representasi matrik. Dari persamaan (B.4) selanjutnya didapatkan

$$H^2 = [(c\alpha_i(-i\hbar\nabla_i) + \beta mc^2]\,[c\alpha_j(-i\hbar\nabla_j) + \beta mc^2]$$

$$= \sum_{i,j} c^2\alpha_i\alpha_j(-i\hbar\nabla_i)(-i\hbar\nabla_j) \rightarrow \begin{pmatrix} \sum_i c^2\alpha_i^2(-i\hbar\nabla_i)^2 \\ + \sum_{i>j} c(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)(-i\hbar\nabla_i)(-i\hbar\nabla_j) \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} + \sum_i \alpha_i\beta(-i\hbar\nabla_i)mc^3 \\ + \sum_j \beta\alpha_j(-i\hbar\nabla_j)mc^3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \sum(\alpha_i\beta + \beta\alpha_j)(-i\hbar\nabla_i)mc^3$$

$$+ \beta^2 m^2 c^4$$

$$= c^2(-i\hbar\nabla)^2 + m^2c^4 \qquad \text{(B.6)}$$

yang dipenuhi jika

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \qquad \begin{pmatrix} \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 \quad (i \neq j) \\ \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \end{pmatrix} \qquad (i, j = 1,2,3) \qquad \text{(B.7)}$$

Dengan menggunakan simbol antikomutator

$$\{A, B\} \equiv AB + BA \qquad \text{(B.8)}$$

keadaan ini dapat dituliskan dengan

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0 \qquad (i \neq j)$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \qquad (i, j = 1, 2, 3) \qquad \text{(B.9)}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

Keadaan ini simetri di antara empat kuantitas α_1, α_2, α_3 dan β, dimana masing-masing kuadratnya adalah satu dan saling komut.Kuantitas tersebut sekuarng-kurangnya merupakan matrik 4 x 4.

Sebuah matrik antikomut bebas liner, yaitu matrik Pauli σ_1(i = 1, 2, 3) diberikan oleh

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(B.10)}$$

yang juga hermitian dan tidak mempunyai *trace*

$$\sigma_i^+ = \sigma_i \qquad \mathrm{Tr}\sigma_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad \text{(B.11)}$$

yang memenuhi

$$\sigma_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i = i\sigma_k$$

$$(i, j, k : \text{siklik}) \qquad \text{(B.12)}$$

atau ekuivalen dengan

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3) \qquad \text{(B.13)}$$

Pada persamaan (B.12) , 1 ini sebenarnya merupakan matrik identitas 2 x 2 dan pada persamaan (B.13) matrik identitas dihilangkan. Dengan menggunakan persamaan (B.13) dapat diperoleh

$$(\boldsymbol{a} \,.\, \sigma)(\boldsymbol{b} \,.\, \sigma) = \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b} + \mathrm{i}\sigma \,.\, (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \qquad \text{(B.14)}$$

dan

$$e^{ia.\sigma} = \cos \boldsymbol{a} + ia \,.\, \sigma \sin \boldsymbol{a} \qquad \text{(B.15)}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

dengan $\boldsymbol{a}$ dan σ merupakan 3-komponen vektor dan

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|, \ \hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}/a, \qquad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \tag{B.16}$$

Satu hal yang penting dalam matrik Pauli adalah $\sigma_i/2$ dikenakan sebagai operator momentum angular spin ½. Dari (B.13) dapat dilihat bahwa $\sigma_i/2$ memenuhi aturan komutasi dari momentum angular $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$:

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2} \tag{B.17}$$

Matrik Pauli ini bebas, hermitian, tidak mempunyai *trace*, antikomut dan kuadratnya adalah satu. Matrik Pauli ini dapat dituliskan :

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{B.18}$$

dengan I adalah matrik identitas.

Selanjutnya diperoleh persamaan yang linier dalam turunan ke waktu dan konsisten dengan kaitan relativistik $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Dengan mengkombinasikan persamaan (B.1) dan (B.5) didapatkan

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x) = [c\alpha \,.\, (-i\hbar\nabla) + \beta mc^2]\Psi(x) \tag{B.19}$$

dengan α_i dan β merupakan matrik 4 x 4 yang didefinisikan oleh persamaan (B.9) dan secara eksplisit diberikan oleh persamaan (B.18). Dengan α_i dan β merupakan matrik 4 x 4, fungsi gelombang Ψ mempunyai 4 komponen kuantitas (yang disebut spinor Dirac, 4-komponen spinor atau spinor) :

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \\ \Psi_4(x) \end{pmatrix}, \quad \Psi_n \ (n = 1, 2, 3, 4) : \text{komplek} \tag{B.20}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

Persamaan (B.19) dapat dituliskan dengan menyatakan komponen ruang dan waktu lebih simetri. Hal ini dapat dilakukan dengan mengalikan β didapatkan :

$$i\hbar\,\beta\frac{\partial}{\partial t}\Psi = [c\beta\alpha_i(-i\nabla_i) + mc^2)\,\Psi \qquad \text{(B.21)}$$

dan didefinisikan matrik gamma

$$\gamma_0 \equiv \beta,\ \gamma_i \equiv \beta\alpha_i \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad \text{(B.22)}$$

Selanjutnya dengan $\partial_0 = \partial/\partial t$, $\nabla_i = \partial_i$ persamaan (B.22) dapat dituliskan sebagai

$$[i\hbar\ (\gamma_0\partial_0 + \gamma_i\partial_i) - mc]\Psi = 0 \qquad \text{(B.23)}$$

atau

$$(i\hbar\,\gamma_\mu\partial_\mu - mc)\Psi = 0 \qquad \text{(B.23)}$$

Persamaan ini disebut dengan persamaan Dirac untuk partikel bebas. Untuk persamaan Dirac yang melibatkan efek dari medan magnet eksternal yang diberikan oleh potensial $\boldsymbol{A}$, persamaan Dirac-nya mempunyai bentuk

$$(i\hbar\,\gamma_\mu\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu - mc)\Psi = 0 \qquad \text{(B.24)}$$

atau dapat dituliskan dengan

$$(i\hbar\,\gamma_\mu\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu)\Psi = mc\Psi \qquad \text{(B.25)}$$

Dari sifat persamaan (B.9) dari α_i dan β dapat ditunjukkan bahwa empat matrik yang diberikan dalam persamaan (B.22) memenuhi aturan anti komutasi :

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \qquad \text{(B.26)}$$

yang ekuivalen dengan $\gamma_0^2 = 1, \gamma_1^2 = -1$ dan semua empat matriknya lainnya anti komut. Kaitan (B.26) disebut dengan aljabar Clifford yang ekuivalen dengan persamaan (B.9).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

LAMPIRAN C

Penurunan Persamaan (4.23)

Dituliskan kembali persamaan Dirac

$$i\hbar \square \psi - \frac{e}{c} A \psi = mc \psi \gamma_0 \tag{C.1}$$

dengan operator energi-momentum $\underline{p}_\mu$ didefinisikan dengan

$$\underline{p}_\mu \ \psi = \partial_\mu \psi i \hbar - \frac{e}{c} A_\mu \ \psi \tag{C.2}$$

Tensor energi -momentumya diberikan oleh

$$T_{\mu\nu} \equiv \left\{ \gamma_0 \tilde{\psi} \gamma_\mu \left(\underline{p}_\nu \psi \right) \right\}_S$$

$$\equiv \left\{ \gamma_0 \tilde{\psi} \gamma_\mu \left(\partial_\nu \psi \gamma_2 \gamma_1 \hbar - \frac{e}{c} A_\nu \psi \right) \right\}_S$$

$$\equiv \hbar \left(\gamma_\mu \partial_\nu \psi i \gamma_3 \tilde{\psi} \right)_S - \frac{e}{c} \rho v_\nu A_\nu \tag{C.3}$$

Densitas energi-momentum *proper* diberikan oleh

$$\rho p = T(v) = v_\mu T_\mu \tag{C.4}$$

yang menggambarkan aliran energi-momentum sepanjang kecepatan *streamline.*

Didefinisikan tensor $\overline{T}_\mu$ dari persamaan (C.3) yaitu

$$\overline{T}_\mu = \gamma_\nu T_{\mu\nu} = \gamma_\nu \gamma_\nu \left\{ \hbar \gamma_\nu . \left(\partial_\mu \psi i \gamma_3 \tilde{\psi} \right)_\nu - \frac{e}{c} \rho v_\nu A_\nu \right\}$$

$$= \hbar \left(\partial_\mu \psi i \gamma_3 \tilde{\psi} \right)_\nu - \frac{e}{c} \rho v_\nu A_\nu \tag{C.5}$$

Diberikan hubungan

$$\hbar \left(\partial_\mu \psi i \gamma_3 \tilde{\psi} \right)_\nu = \frac{\hbar}{2} \left(\partial_\mu \psi i \gamma_3 \tilde{\psi} - \psi i \gamma_3 \partial_\mu \tilde{\psi} \right) \tag{C.6}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

Dari definisi spin yang diberikan oleh persamaan (4.5) yaitu $\frac{\hbar}{2}\psi\gamma_3\tilde{\psi} = \rho s$ ditunjukkan bahwa

$$\partial_\mu(i\rho s) = \frac{\hbar}{2}\left(\partial_\mu\psi i\gamma_3\tilde{\psi} + \psi i\gamma_3\partial_\mu\tilde{\psi}\right) \qquad \text{(C.7)}$$

Dari persamaan (C.6) dan (C.7) dan kedua sisinya dikalikan dengan γ^μ didapatkan

$$\hbar(\Box\psi)i\gamma_3\tilde{\psi} = \hbar\,\gamma_\mu(\partial_\mu\psi i\gamma_3\tilde{\psi})_V + \Box(i\rho s) \qquad \text{(C.8)}$$

Dengan menuliskan persamaan Dirac (C.1) dalam bentuk

$$\hbar\Box\psi i\gamma_3\gamma_0 = mc\psi\gamma_0 + \frac{e}{c}A\psi \qquad \text{(C.9)}$$

dikalikan dengan $\gamma_0\tilde{\psi}$ dan dengan menggunakan $\psi\tilde{\psi} = \rho e^{i\beta}$ diperoleh

$$\hbar(\Box\psi)i\gamma_3\tilde{\psi} = mc\rho e^{i\beta} + \frac{e}{c}A\rho v \qquad \text{(C.10)}$$

Dengan mengkombinasikan persamaan (C.4), (C.5), (C.8) dan (C.10) didapatkan

$$\gamma_\mu\,\overline{T}_\mu = mc\rho e^{i\beta} + \Box(i\rho s) \qquad \text{(C.11)}$$

Bagian skalar dari persamaan (C.11) diberikan oleh

$$T_\mu.\gamma_\mu = mc\rho\cos\beta \qquad \text{(C.12)}$$

Dan bagian bivektornya diberikan oleh

$$T_\mu\wedge\gamma_\mu = i\,(\Box\wedge\rho s) = -\partial_\mu(\rho S_\mu) \qquad \text{(C.13)}$$

dengan

$$S_\mu = (is).\ \gamma_\mu = i(s\wedge\gamma_\mu) \qquad \text{(C.14)}$$

Dengan $\partial_\mu x = \gamma_\mu$ didapatkan

$$\partial_\mu(T_\mu\wedge x) = T_\mu\wedge\gamma_\mu - \partial_\mu T_\mu\wedge x \qquad \text{(C.14)}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

dan dari persamaan (4.16) dan (C.13) diperoleh

$$\partial_\mu T_\mu \wedge x \quad = \partial_\mu T_\mu \wedge x - T_\mu \wedge \gamma_\mu = \partial_\mu (T_\mu \wedge x + \rho S_\mu)$$

$$= (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{J}) \wedge \boldsymbol{x} \qquad \text{(C.15)}$$

dengan $J_\mu = T_\mu \wedge x + \rho S_\mu$ (C.16)

yang merupakan tensor momentum angular. Dengan $\boldsymbol{T}(\mathrm{v}) = \rho p$ densitas momentum angularnya adalah

$$\boldsymbol{J}(v) = \rho(p \wedge \boldsymbol{x} + \boldsymbol{S}) \qquad \text{(C.17)}$$

dengan $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{x}$ sebagai momentum angular orbital dan $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{isv}$ sebagai momentum angular intrinsik atau spin.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)