

BAB II

DASAR TEORI

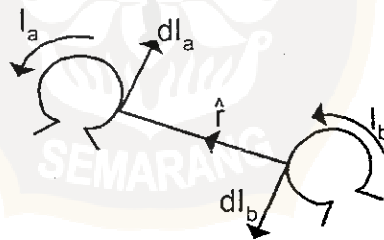
2.1. TEORI POTENSIAL MAGNETIK

2.1.1. Induksi Magnetik

Ditinjau dua buah loop arus listrik yang diidentikkan sebagai dua buah titik massa magnetik. Gambar (2.1) merupakan interaksi dua buah arus, arus I_a dan I_b . Gaya yang bekerja pada elemen dI_a dari loop a dipengaruhi oleh arus listrik pada elemen dI_b dari loop b, ditunjukkan dengan persamaan gaya Lorentz (Blakely,1995):

$$d\mathbf{f}_a = C_m I_a I_b \frac{dI_a \times (dI_b \times \hat{r})}{r^2} \quad (2.1)$$

dengan C_m merupakan faktor konstanta.



Gambar.2.1. Dua buah loop arus listrik I_a dan I_b (Blakely,1995)

Jika ditinjau sebuah titik massa sebagai partikel uji pada jarak tertentu, didapatkan \mathbf{B} :

$$d\mathbf{B}_b = C_m I_b \frac{dI_b \times \hat{r}}{r^2} \quad (2.2)$$

sehingga,

$$d\mathbf{f}_a = \mathbf{I}_a d\mathbf{I}_a \times d\mathbf{B}_b \quad (2.3)$$

Bentuk derivatif dari persamaan Lorentz menunjukkan bahwa gaya bekerja pada muatan Q yang bergerak dengan kecepatan \mathbf{v} dalam medan magnetik dirumuskan:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.4)$$

Dengan mengintegrasikan persamaan (2.2) sepanjang loop, dihasilkan hukum Biot Savart (Blakely, 1995):

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{I}_b \oint \frac{d\mathbf{l}_b \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (2.5)$$

\mathbf{B} pada persamaan (2.5) disebut induksi magnetik. Induksi magnetik terbatas pada gaya induksi arus listrik dari muatan yang bergerak, gaya ini merupakan vektor dari medan induksi magnetik dan kecepatan muatan dengan $\hat{\mathbf{r}}$ adalah berarah dari sumber (loop b) ke titik pengamatan (loop a) (Blakely, 1995).

2.1.2. Hukum Gauss Untuk Medan Magnetik

Persamaan Maxwell yang pertama menunjukkan bahwa nilai divergensi dari induksi magnetik adalah nol (Wangness, 1986):

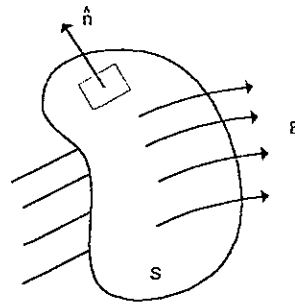
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.6)$$

Hal ini berlaku pada semua titik walaupun berada di dalam bahan magnetik. Integrasi dari persamaan (2.6) dalam daerah R , dengan theorem divergensi didapatkan hubungan:

$$\int_R \nabla \cdot \mathbf{B} dv = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0 \quad (2.7)$$

pada daerah sembarang R.

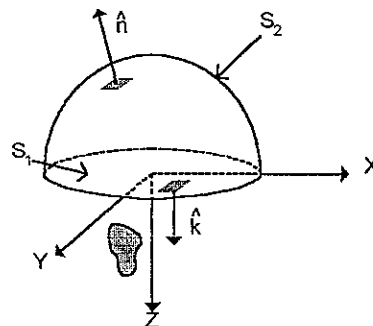
Persamaan di atas menunjukkan bahwa komponen normal dari semua fluks yang masuk sama dengan komponen normal dari semua fluks yang keluar.



Gambar.2.2. Komponen normal dari \mathbf{B} dengan integrasinya bernilai nol pada daerah permukaan tertutup (Blakely,1995)

Persamaan (2.7) di atas dikenal sebagai hukum Gauss untuk medan magnetik, dan memberikan pemecahan untuk berbagai kasus. Sebagai contoh: jika medan pada sumber magnetik terlokalisir melewati permukaan horisontal S_1 , maka fluks yang masuk kedalam daerah batas S_1 , dan daerah permukaan setengah bola S_2 bernilai nol sesuai dengan persamaan Gauss (Blakely,1995):

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{k}} ds_1 + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds_2 = 0 \quad (2.8)$$



Gambar.2.3. Daerah R dibatasi oleh permukaan horisontal S_1 , dan permukaan setengah bola S_2 . Sumber magnetik berada di bawah permukaan S_1 (Blakely,1995)

2.1.3. Skalar dan Vektor Potensial

Mengacu pada persamaan Maxwell pertama, dan teorema Helmholtz, maka potensial \mathbf{A} dirumuskan (Blakely,1995):

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.9)$$

Persamaan Maxwell kedua menunjukkan bahwa nilai curl dari \mathbf{B} sama dengan jumlah total vektor dari berbagai macam muatan yang bergerak dalam suatu luasan (Wangness,1986) dirumuskan:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi C_m I_t = 4\pi C_m \left(\mathbf{I}_m + \nabla \times \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (2.10)$$

dimana, I_t merupakan jumlah total dari semua arus listrik dalam suatu luasan, yang didalamnya terdapat arus \mathbf{I}_m , arus ini berhubungan dengan intensitas magnetisasi (\mathbf{I}), dan pergerakan total arus $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$. Kuantitas dari \mathbf{I}_m dan \mathbf{I}_t adalah rapat arus yang didefinisikan sebagai kuat arus per satuan luas (Am^{-2}) (Blakely,1995).

Hubungan antara \mathbf{B} dan \mathbf{I}_t rata-rata saat melewati permukaan S didapatkan dengan mengintegalkan persamaan (2.10) menjadi:

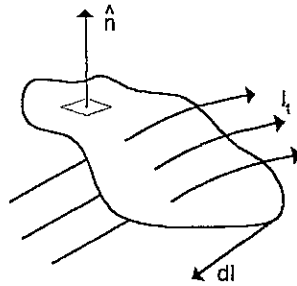
$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \hat{n} ds = 4\pi C_m \int_S \mathbf{I}_t \cdot \hat{n} ds \quad (2.11)$$

dengan menggunakan theorema Stokes didapat:

$$\oint B \cdot dl = 4\pi C_m \int_S \mathbf{I}_t \cdot \hat{n} ds \quad (2.12)$$

dimana, \mathbf{I}_t merupakan jumlah total dari semua arus listrik yang menunjukkan rapat arus melewati permukaan S , sehingga induksi magnetik yang diintegrasikan pada

loop tertutup berkesesuaian dengan komponen normal dari semua arus yang melewati loop (Blakely,1995).



Gambar.2.4. Komponen normal dari semua arus I_t yang melewati permukaan S (Blakely,1995)

Jika pada daerah pengamatan tidak terdapat arus, maka :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

\mathbf{B} irrotasional.

Dengan teorema Helmholtz didapatkan potensial skalar A (Blakely,1995):

$$\mathbf{B} = - \nabla A \quad (2.14)$$

\mathbf{B} merupakan medan potensial di daerah tak berarus.

2.2. MEDAN MAGNETIK DIPOL

Jika A merupakan medan potensial suatu titik massa yang berada jauh dari distribusi arus yang tersebar pada permukaannya, dan medan magnetik dipol yang dihasilkan oleh sumber dipol m pada koordinat sferis dirumuskan (Wangness,1986):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0 m \sin \theta \hat{\phi}}{4\pi r^2} \quad (2.15)$$

dengan $\mathbf{m} = m \hat{z}$, dan jika A_φ merupakan komponen dari \mathbf{A} yang tidak bernilai nol dirumuskan (Blakely,1995):

$$r^2 = \left(\frac{\mu_0 m}{4\pi A_\varphi} \right) \sin \theta = C \sin \theta \quad (2.16)$$

dengan C merupakan konstanta yang bergantung pada nilai A_φ dan menunjukkan karakteristik dari garis-garis gaya pada medan magnetik.

Jika $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, didapatkan (Wangness,1986):

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin A_\varphi) = \left(\frac{\mu_0 m}{4\pi} \right) \frac{2 \cos \theta}{r^3}$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r A_\varphi] = \left(\frac{\mu_0 m}{4\pi} \right) \frac{\sin \theta}{r^3} \quad (2.17)$$

Jika \mathbf{B} berada sebidang dengan titik medan \mathbf{m} dan \mathbf{A} tegak lurus terhadap bidang tersebut, maka $B_\varphi = 0$.

Hubungan magnetudo dengan momen suatu dipol dirumuskan (Wangness,1986):

$$\mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\mathbf{m}}{M} \right) \mathbf{E} \quad (2.18)$$

2.3. MAGNETISASI BENDA

Medan geomagnetik secara umum dapat dipandang sebagai medan suatu dipol. Sehingga garis medan magnet akan berarah tertentu, yaitu kearah kutub selatan magnetik bumi. Arah tersebut menyimpang dari kutub geografis bumi, dengan sudut penyimpangan yang disebut sudut Deklinasi. Sudut penyimpanganya terhadap bidang horisontal disebut sudut Inklinasi. Potensial skalar magnetik dari suatu dipol dalam suatu volume (Wayan,1999):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\int_V \mathbf{M} \cdot \nabla \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right] d^3 \mathbf{r}_0 \quad (2.19)$$

dengan \mathbf{M} adalah momen dipol magnet bumi persatuan volume dan \mathbf{r} adalah posisi dari sumber dipol geomagnetik.

Suatu material dikatakan sebagai material magnetik jika didalamnya terdapat dipol-dipol magnet yang dapat menyearah searah dengan medan magnet luar yang bekerja padanya. Untuk material yang termagnetisasi linier (Wayan,1999):

$$\mathbf{I} = \Delta k \mathbf{H}_0 \quad (2.20)$$

dengan Δk adalah kontras suseptibilitas magnetik = $k - k_0$, k_0 sebagai suseptibilitas magnetik rata-rata batuan di sekeliling material magnetik, dan \mathbf{H}_0 adalah kuat medan geomagnetik.

Kuat medan magnetik benda termagnetisasi (Wayan,1999):

$$\Delta H(\mathbf{r}) = -\nabla A(\mathbf{r}) \quad (2.21)$$

sehingga didapatkan kuat medan magnetik total (Wayan,1999):

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \Delta \mathbf{H} \quad (2.22)$$

Untuk benda yang magnetisasinya searah dengan medan geomagnetik dirumuskan (Telford,1976):

$$\Delta T(\mathbf{r}) = \Delta k H_0 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \int_V \frac{d^3 \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.23)$$

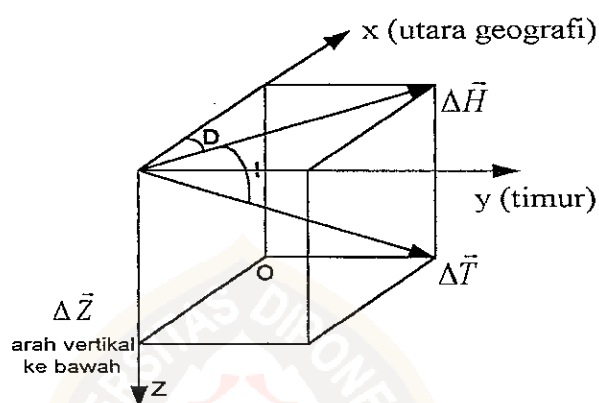
akan terpenuhi jika $|\Delta H| \ll H_0$.

Sehingga dapat diketahui bahwa besarnya anomali medan magnetik total dirumuskan (Wayan,1999):

$$\Delta T = -\frac{\partial}{\partial \alpha} A \quad (2.24)$$

dengan α merupakan arah medan geomagnetik, dimana berlaku hubungan (Wayan,1999):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \beta} = \cos Ink \sin Dek \frac{\partial}{\partial x} + \cos Ink \cos Dek \frac{\partial}{\partial y} + \sin Ink \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.25)$$



Gambar.2.5. Hubungan antara elemen-elemen magnetik (Dobrin,1988)

Gambar (2.5) memberikan hubungan antara elemen-elemen magnetik sebagai berikut (Dobrin,1988):

$$\Delta T^2 = \Delta H^2 + \Delta Z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$\Delta H = \Delta T \cos Ink$$

$$X = \Delta H \cos Dek$$

$$Y = \Delta H \sin Dek$$

$$Z = \Delta T \sin Ink$$

$$\tan Ink = \frac{\Delta Z}{\Delta H}, \text{ dan } \tan Dek = \frac{Y}{X}$$

Jika material mengandung momen dipol magnet permanen cukup kuat sehingga imbasan H relatif sangat kecil, maka arah $\alpha \neq \beta$ maka:

$$\Delta T(\mathbf{r}) = \Delta k H_0 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \int \frac{d^3 \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.26)$$

dengan β adalah arah magnetisasi, dan α adalah arah medan magnet bumi.

Komponen vertikal:

$$\Delta Z(\mathbf{r}) = \Delta k H_0 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \alpha} \int \frac{d^3 \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.27)$$

Komponen horisontal:

$$\Delta H(\mathbf{r}) = \Delta k H_0 \frac{\partial^2}{\partial h \partial \alpha} \int \frac{d^3 \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.28)$$

Untuk termagnetisasi dua dimensi yaitu suatu benda prismatic yang memanjang pada arah rusuk yang sejajar, maka anomali medan magnetiknya sebagai berikut:

Anomali medan magnetik total:

$$\Delta T(\mathbf{r}) = -2 \Delta k H_0 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \int \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| d^2 \mathbf{r}_0 \quad (2.29)$$

komponen vertikal:

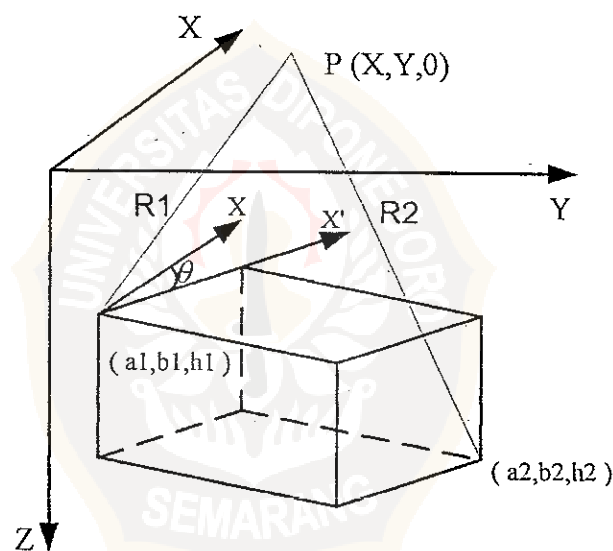
$$\Delta Z(\mathbf{r}) = -2 \Delta k H_0 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \alpha} \int \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| d^2 \mathbf{r}_0 \quad (2.30)$$

kuat medan magnetik horisontal:

$$\Delta H(\mathbf{r}) = -2 \Delta k H_0 \frac{\partial^2}{\partial h \partial \alpha} \int \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| d^2 \mathbf{r}_0 \quad (2.31)$$

2.4. PERSAMAAN ANOMALI PRISMA TEGAK 3 DIMENSI

Pengamatan anomali medan magnetik total pada bidang horizontal X-Y disebabkan oleh sejumlah benda prisma yang mempunyai orientasi magnetik sembarang terhadap sumbu koordinat. Sumbu X searah dengan arah utara geografi, sumbu Y adalah searah dengan arah timur geografi dan sumbu Z adalah arah vertikal ke bawah. Titik 0 adalah sebagai sistem koordinat awal dan pengamatan diambil pada nilai grid yang terletak paralel terhadap sumbu X, dan sumbu Y.



Gambar.2.6. Prisma tiga dimensi
(Opcit Bhaskara dan Ramesh (1991), Yulianto, 2000)

Maka persamaan anomali medan magnetik total pada setiap titik $P(X, Y, 0)$ hasil dari prisma tegak yang sisinya paralel terhadap sumbu koordinat, menurut Bhaskara dan Ramesh (1991) yang disebut dengan persamaan eksak (Yulianto, 2000):

$$\Delta T(x, y, 0) = G_1 F_1 + G_2 F_2 + G_3 F_3 + G_4 F_4 + G_5 F_5 \quad (2.32)$$

$$G_1=I(Mr+Nq), G_2=I(Lr+Np)$$

$$G_3=I(Lq+Mp), G_4=I(Nr-Mq)$$

$$G_5=I(Nr-Lp)$$

dengan I adalah intensitas magnetisasi, L, M, N adalah arah cosinus vektor magnetisasi dan p, q, r adalah arah cosinus medan geomagnetik. Fungsi yang lain:

$$F_1 = \ln \frac{(R_2 + \alpha_1)(R_3 + \alpha_2)(R_5 + \alpha_1)(R_8 + \alpha_2)}{(R_1 + \alpha_1)(R_4 + \alpha_2)(R_6 + \alpha_1)(R_7 + \alpha_2)}$$

$$F_2 = \ln \frac{(R_2 + \beta_1)(R_3 + \beta_1)(R_5 + \beta_2)(R_8 + \beta_2)}{(R_1 + \beta_1)(R_4 + \beta_1)(R_6 + \beta_2)(R_7 + \beta_2)}$$

$$F_3 = \ln \frac{(R_2 + h_2)(R_3 + h_1)(R_5 + h_1)(R_8 + h_2)}{(R_1 + h_1)(R_4 + h_2)(R_6 + h_2)(R_7 + h_1)}$$

$$F_4 = \arctan \frac{\alpha_2 h_2}{R_3 \beta_2} - \arctan \frac{\alpha_1 h_2}{R_6 \beta_2} - \arctan \frac{\alpha_2 h_2}{R_4 \beta_1} \\ + \arctan \frac{\alpha_1 h_2}{R_2 \beta_1} - \arctan \frac{\alpha_2 h_1}{R_7 \beta_2} + \arctan \frac{\alpha_1 h_1}{R_5 \beta_2} \\ + \arctan \frac{\alpha_2 h_1}{R_3 \beta_1} - \arctan \frac{\alpha_1 h_1}{R_1 \beta_1}$$

$$F_5 = \arctan \frac{\beta_2 h_2}{R_8 \alpha_2} - \arctan \frac{\beta_2 h_2}{R_6 \alpha_1} - \arctan \frac{\beta_1 h_2}{R_4 \alpha_2} \\ + \arctan \frac{\beta_1 h_2}{R_2 \alpha_1} - \arctan \frac{\beta_2 h_2}{R_7 \alpha_2} + \arctan \frac{\beta_2 h_1}{R_5 \alpha_1} \\ + \arctan \frac{\beta_1 h_1}{R_3 \alpha_2} - \arctan \frac{\beta_1 h_1}{R_1 \alpha_1}$$

dimana,

$$R_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + h_1^2}, R_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + h_2^2}$$

$$R_3 = \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_1^2 + h_1^2}, R_4 = \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_1^2 + h_2^2}$$

$$R_5 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_2^2 + h_1^2}, R_6 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_2^2 + h_2^2}$$

$$R_7 = \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + h_1^2}, R_8 = \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + h_2^2}$$

Dan,

$$\alpha_1 = a_1 - x, \alpha_2 = a_2 - x, \beta_1 = b_1 - x, \beta_2 = b_2 - x$$

Jarak horisontal dari pusat ke muka prisma yang paralel terhadap sumbu X dan Y disajikan dengan (a_1, a_2) dan (b_1, b_2) kedalaman dari atas ke bawah dari prisma adalah h_1, h_2 .

Jika sisi horisontal prisma tidak sejajar dengan sumbu koordinat, tetapi berotasi dengan sudut θ terhadap utara geografi maka sistem koordinat baru (x', y') sejajar terhadap sisi horisontal prisma. Titik 0 pada bidang pengamatan tetap merupakan sistem koordinat baru (x', y') . Maka koordinat (x, y) digantikan dengan koordinat baru (x', y') dengan $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$ dan $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$, jika Ink dan Dek adalah inklinasi dan deklinasi medan geomagnet, maka arah cosinus vektor medan geomagnetik adalah:

$$p = \cos \text{Ink} \cos(\text{Dek} - \theta)$$

$$q = \cos \text{Ink} \sin(\text{Dek} - \theta)$$

$$\text{dan, } r = \sin \text{Ink}$$

Jika Ink_0 dan Dek_0 inklinasi dan deklinasi dari vektor magnetisasi, maka arah cosinus magnetisasinya adalah:

$$\mathbf{L} = \cos \text{Ink}_0 \cos (\text{Dek}_0 - \theta)$$

$$\mathbf{M} = \cos \text{Ink}_0 \sin (\text{Dek}_0 - \theta)$$

$$\text{Dan, } \mathbf{N} = \sin \text{Ink}_0$$

Jika anomali pengamatan disebabkan oleh sebanyak N_b prisma, maka persamaan anomali magnetik pada titik medan $(x, y, 0)$ dituliskan dengan (Yulianto, 2000):

$$\Delta T(x, y, 0) = \sum_{k=1}^{N_b} \Delta T_k(x, y, 0) + C \quad (2.33)$$

dengan C adalah konstanta medan regional.

