

BAB II

DASAR TEORI

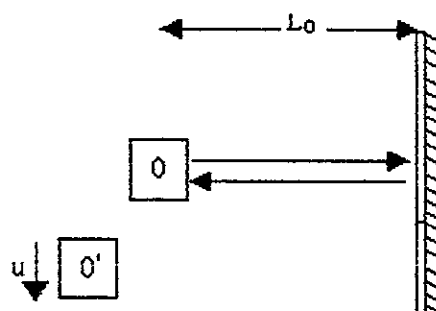
2.1. Waktu Relativitas

Waktu adalah suatu besaran fisis yang menunjukkan (secara kualitatif) lama tidaknya suatu proses kejadian berlangsung. Konsep klasik menjelaskan bahwa waktu punya nilai sama antara satu kerangka dengan kerangka yang lain. Oleh karena perkembangan konsep tentang waktu tersebut, dalam pembahasan fisika modern waktu tidak lagi punya nilai yang sama antara satu kerangka dengan kerangka yang lain. Waktu dalam suatu kerangka akan terlihat mulur (terdilatasi) oleh kerangka yang lain diakibatkan beberapa gejala fisis yaitu adanya kecepatan relatif antara kerangka yang satu dengan yang lain (relativitas khusus) dan perbedaan medan massa suatu kerangka dengan kerangka yang lain (relativitas umum), yang akan dibahas dalam sub bab berikut ini.

2.1.1. Dilatasi Waktu oleh Kecepatan

Salah satu efek yang riil dari teori relativitas khusus adalah terjadinya dilatasi waktu (pemuluran waktu) oleh suatu pengamat di kerangka yang bergerak terhadap obyek pengamatan. Hal ini dapat dijelaskan dengan percobaan khayal berikut, tinjau dua pengamat di O dan di O' . Dari kerangka di O ditembakkan seberkas cahaya menuju sebuah cermin berjarak L_0 (dalam gambar 2.1) darinya dan kemudian didapat selang waktu Δt_0 , adalah waktu yang diperlukan berkas tersebut untuk menempuh jarak ke cermin dan kemudian terpantulkan kembali ke O (tentu $L_0 = 0,5 \cdot c \cdot \Delta t_0$). Maka diperoleh pers. (2.1) (Beiser, 1992) sebagai berikut;

$$\Delta t_0 = 2 L_0 / c \quad (2.1)$$



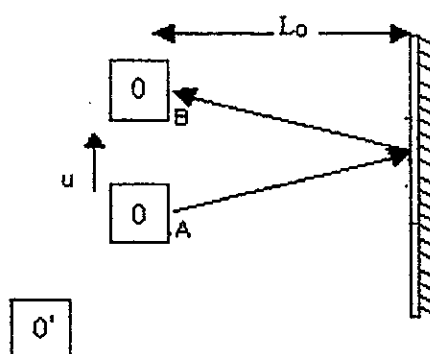
Gambar 2.1. Pengamat mengirimkan dan menerima seberkas cahaya yang dipantulkan. Pengamat O' bergerak u (Krane, 1993).

Pengamat di O' sedang bergerak dengan laju u menjauhi O dengan arah tegak lurus terhadap garis menuju cermin. Gambar 2.2 memperlihatkan percobaan yang sama pada sudut pandang di O' , yang menurutnya kerangka O sedang bergerak dengan laju $-u$. Menurut pandangan di O' , berkas cahaya dikirim dari titik A dan diterima di titik B setelah selang waktu Δt kemudian waktu untuk menempuh A ke B adalah $u \cdot \Delta t$, maka dengan memanfaatkan teorema Pythagoras persamaannya (Beiser, 1992) adalah;

$$\left(\frac{c \cdot \Delta t}{2} \right)^2 = L_0^2 + \left(\frac{u \cdot \Delta t}{2} \right)^2 \quad (2.2)$$

Dengan mensubstitusikan pers. (2.1) ke pers. (2.2) diperoleh persamaan sebagai berikut;

$$\Delta t_0 = \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta t \quad (2.3)$$



Gambar 2.2. Pengamat O' melihat kejadian, O memancarkan dari A diterima di B (Krane, 1993).

Dengan

Δt_0 adalah perjalanan waktu berkas cahaya menurut O

Δt adalah perjalanan waktu berkas cahaya menurut O'

u adalah laju gerak relatif

c adalah laju cahaya

Dalam koordinat Cartesian (x, y, z) , diferensial panjang suatu busur ds diperoleh dari;

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (2.4a)$$

Transformasi pers. (2.4a) ke koordinat umum menghasilkan persamaan (Speigel, 1988);

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.4b)$$

Pers. (2.4b) dapat diperluas untuk ruang berdimensi N dengan koordinat $(x^1, x^2, x^3, \dots, x^N)$

dan untuk $N = 4$ diperoleh, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = ct$, untuk $i \neq j$, $g_{ij} = 0$, persamaannya adalah;

$$ds^2 = g_{tt} c^2 (dt)^2 + g_{xx} (dx)^2 + g_{yy} (dy)^2 + g_{zz} (dz)^2 \quad (2.5)$$

untuk geometri datar (*euklid*) berlaku $g_{tt} = 1$, $g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = -1$, dan didapat persamaan;

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (2.6a)$$

Dari pers. (2.6) dapat dimanipulasi seperti pada pers. (2.3) dan bahwa satuan panjang kurva dibagi kecepatan cahaya merupakan satuan selang waktu ($ds / c = dt_0$). Sehingga diberikan persamaan di bawah (Bergmann, 1961);

$$\begin{aligned} \frac{ds^2}{c^2} &= dt^2 - \left(\frac{dx^2}{c^2} + \frac{dy^2}{c^2} + \frac{dz^2}{c^2} \right) \\ &= dt^2 \left\{ 1 - \left(\frac{dx^2}{c^2 dt^2} + \frac{dy^2}{c^2 dt^2} + \frac{dz^2}{c^2 dt^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.6b)$$

$$\frac{ds^2}{c^2} = dt_0^2$$

dan $\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = u^2$, maka

$$dt_0 = dt \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

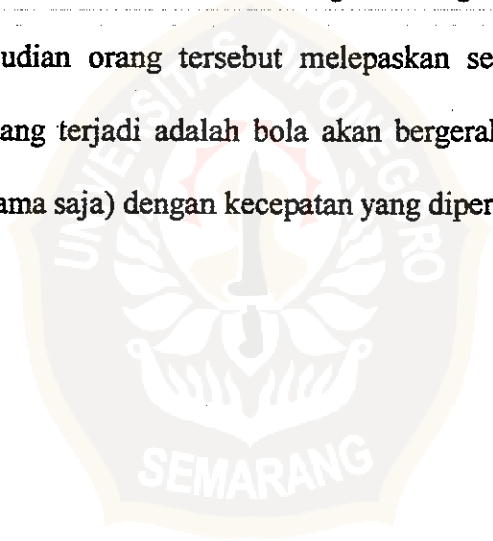
Integrasi dari pers. (2.7) menghasilkan persamaan yang sama dengan pers. (2.3) dan merupakan penelusuran lain terhadap dilatasi waktu oleh kecepatan gerak kerangka satu terhadap yang kerangka yang lainnya.

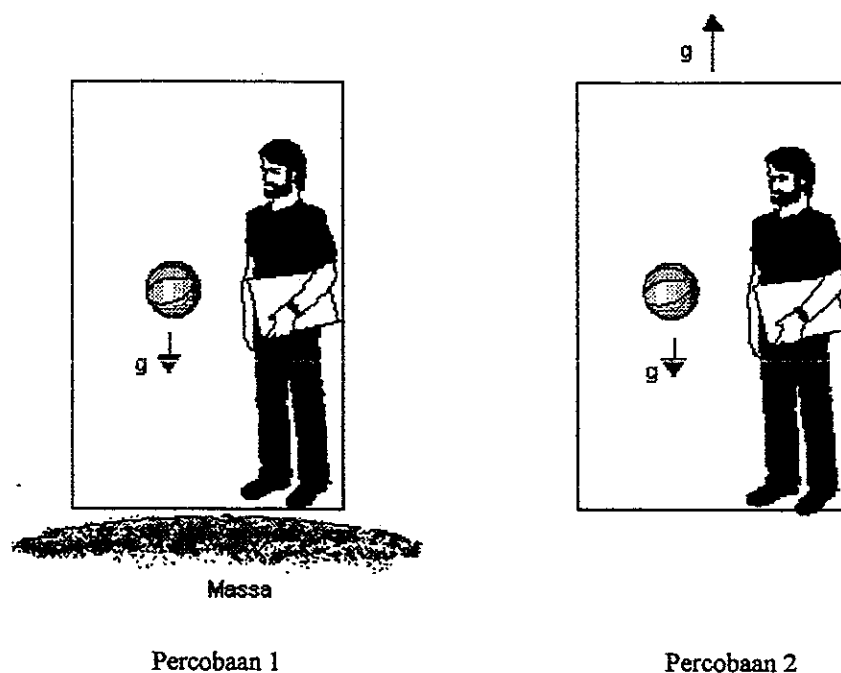
2.1.2. Asas Kesetaraan

Dalam pembahasan fisika modern keberadaan teori gravitasi didasarkan pada asas kesetaraan, dimana asas ini didukung oleh dua percobaan khayal yang dilakukan oleh Einstein yaitu:

Percobaan pertama adalah seseorang berada dalam sebuah pesawat di mana pesawat tersebut berada dalam permukaan sebuah massa (anggap saja Bumi), pesawat diam terhadap massa tersebut. Dan kemudian orang itu melepaskan sebuah benda (anggap saja bola) dari ketinggian tertentu, maka benda tersebut akan jatuh bebas menuju lantai pesawat dengan kecepatan yang dipercepat sebesar g satuan.

Percobaan kedua adalah seseorang berada dalam sebuah pesawat, pesawat tersebut berada dalam keadaan bebas dari medan massa dan bergerak dengan kecepatan yang dipercepat sebesar g satuan. Kemudian orang tersebut melepaskan sebuah bola dari suatu jarak terhadap lantai, maka yang terjadi adalah bola akan bergerak menuju lantai (atau lantai bergerak menuju bola, sama saja) dengan kecepatan yang dipercepat sebesar g satuan.





Gambar.2.3. Percobaan khayal, seseorang dalam sebuah pesawat, (Zeilik, 1979)

- Pesawat diam dan berada dekat di permukaan suatu massa (Bumi) kemudian orang di dalam pesawat melepaskan bola.
- Pesawat dalam keadaan bebas dari medan massa namun sedang bergerak dengan percepatan g dan orang di dalam pesawat melepaskan bola.

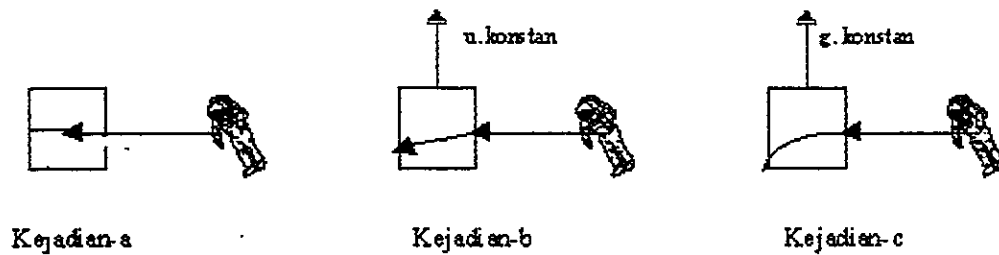
Dari kedua percobaan khayal itu dapat disimpulkan bahwa tidak dapat dibedakan antara suatu kerangka yang diam dan berada dalam suatu daerah kecil (dalam perbedaan radius kecil) dari medan gravitasi dengan suatu kerangka bergerak, percepatan g , ini dinamakan asas kesetaraan (Wheeler, dkk, 1993).

2.1.3. Lintasan Cahaya

Percobaan khayal juga dilakukan untuk lintasan suatu cahaya, bila cahaya datang dari suatu kerangka melintas ke kerangka yang lain, maka terdapat tiga kejadian yang dapat dianalisa, yaitu;

- Pesawat dalam keadaan diam terhadap kerangka sumber cahaya, dan cahaya melintas dengan garis lurus.
- Pesawat bergerak dengan kecepatan tetap, dan cahaya melintas lurus dibiaskan.
- Pesawat bergerak dengan percepatan g , dan cahaya melintas melengkung.

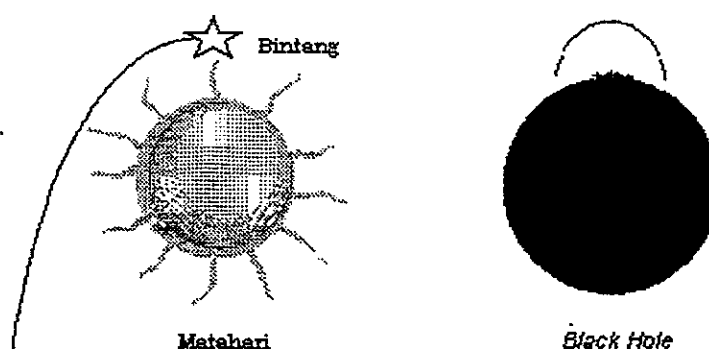
Seperti pada gambar di bawah



Gambar 2.4. Suatu berkas cahaya melintas dalam kerangka pesawat dengan kejadian (Krane, 1993)-

- pesawat diam
- bergerak kecepatan konstan
- bergerak dengan percepatan g

Oleh karena asas kesetaraan di atas, maka berkas cahaya akan mengalami hal yang sama ketika dilewatkan dalam suatu daerah kecil medan massa sehingga lintasan cahaya melengkung saat melewati medan massa dan lurus ketika bebas dari medan massa.



Gambar 2.5. Perjalanan cahaya ketika melalui suatu massa (Sutanto, 1984).

- a. Lintasan cahaya dibelokan $1,7''$ ketika menyinggung Massa Matahari.
- b. Lintasan cahaya tak dapat keluar ketika melalui *Black Hole*.

Berkas cahaya mempunyai tempat yang khusus dalam pembahasan ruang dan waktu, karena cahaya harus melintasi lintasan terpendek (lintasan *geodesik*) secara langsung antara dua titik. Jika cahaya menempuh lintasan lengkung sebagai lintasan terpendek antara dua titik, maka ruang akan melengkung, dan penyebab kelengkungan adalah medan gravitasi (Krane, 1993).

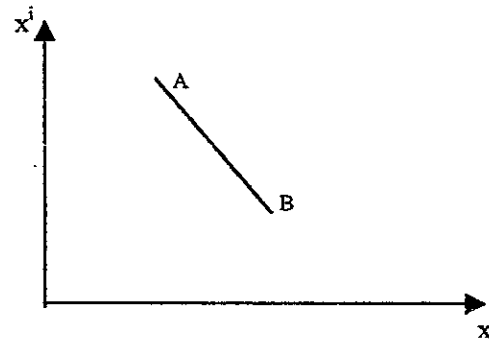
2.1.4. Kurva Ruang-Waktu Melengkung

Seperti halnya pers. suatu busur, pers. kurva *geodesik* secara umum baik untuk geometri *euklid* atau geometri lengkung adalah seperti dituliskan dalam pers. (2.4b) adalah;

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

Dengan demikian bila berkas cahaya bergerak dari titik A ke titik B dalam geometri datar atau geometri *euklid*, *geodesik*nya adalah garis lurus, seperti gambar 2.6, untuk koordinat kartesian pada pers.(2.6) dan untuk koordinat bola dengan $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$,

$x^4 = ct$, (variable x, y, z , dapat terwakilkan dalam besaran r , juga untuk g_{xx}, g_{yy}, g_{zz} , dapat terwakilkan dalam g_{rr} , sehingga pers. *geodesiknya* untuk geometri lengkung lebih sederhana bila ditulis dalam koordinat bola).



Gambar 2.6. Lintasan cahaya dalam ruang-waktu (Krane, 1993)

Persamaan (2.6) (kurva *geodesik*) bila ditransformasikan ke koordinat bola dengan pers. transformasinya (Lass, 1967) adalah

$$g_{uv} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^u} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^v} \quad (2.8)$$

Pada umumnya $u = v$ dan $\alpha = \beta$, maka

$$g_{uu} = g_{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^u} \right)^2 \quad (2.9)$$

Dan hubungan antara koordinat bola dengan koordinat Cartesian (Lass, 1967) adalah;

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \quad (2.10a)$$

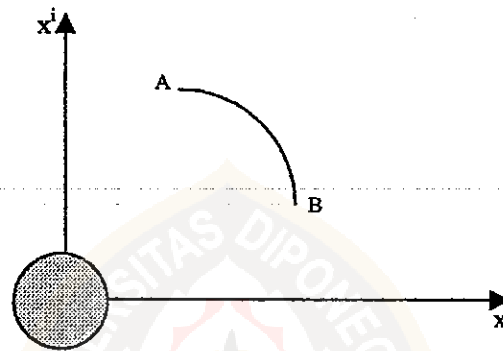
$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (2.10b)$$

$$z = r \cos(\theta). \quad (2.10c)$$

maka pers. kurva *geodesik* untuk geometri *euklid* pada koordinat bola (lampiran I) (Sokolnikoffl, 1951) adalah;

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - (dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \quad (2.11)$$

Sekarang andaikan pada titik asal koordinat ditempatkan sebuah massa M yang besar (lihat Gambar 2.7), lintasan cahaya dipengaruhi medan gravitasi massa M . Jadi, lintasan *geodesik*nya tidak lagi lurus tapi melengkung.



Gambar 2.7. Lintasan cahaya dalam ruang-waktu terdapat massa M di pusat (Krane, 1993).

Persamaan kurva *geodesik*nya pada $r \rightarrow \infty$ sama dengan (2.11), maka kelengkungan ruang-waktu dipengaruhi oleh nilai r , sehingga persamaan kurva *geodesik* pada koordinat lengkung (Sokolnikoffl, 1951) adalah;

$$ds^2 = f_1(r)(dt)^2 - f_2(r)(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \quad (2.12a)$$

Dan dimisalkan, $f_1 = c^2 e^\mu$, $f_2 = e^\lambda$, maka;

$$ds^2 = e^\mu c^2 (dt)^2 - e^\lambda (dr)^2 - r^2 (d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \quad (2.12b)$$

Dari sifat turunan intrinsik kedua suatu tensor (anggap A_i) yang diturunkan pertama oleh x^j kemudian diturunkan oleh x^k maka diperoleh A_{ijk} , dan bila prosesnya dibalik yaitu A_i pertama diturunkan terhadap x^k dan kemudian diturunkan terhadap x^j diperoleh A_{ikj} . Bila kedua turunan di atas di kurangkan satu dengan yang lain (lampiran II) maka (Anonim, 1999) diperoleh;

$$A_{ijk} - A_{ikj} = R^{\alpha}_{ijk} A_{\alpha} \quad (2.13a)$$

Dengan R^{α}_{ijk} (Anonim, 1999)

$$R^{\alpha}_{ijk} = \left[\frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ i \quad k \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x^j} - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ i \quad j \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x^k} + \left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ i \quad k \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \gamma \quad j \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ i \quad j \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \gamma \quad k \end{smallmatrix} \right\} \right] \quad (2.13b)$$

Dimana $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ i, j \end{smallmatrix} \right\} = \Gamma^k_{ij}$ adalah symbol Christoffel dimana

$$\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ i, j \end{smallmatrix} \right\} = \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kk} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\} \quad (2.13c)$$

Hal yang penting dari hasil tersebut adalah bahwa sisi kanan pers. (2.13a) A_{α} tidak memuat derivatifnya dan merupakan tensor sembarang, R^{α}_{ijk} juga merupakan tensor dan disebut tensor Reimann-Christoffel (Setiawan, 1992).

Aspek penting matematis dari tensor Reimann-Christoffel adalah: Jika sifat kemalaran ada, maka terdapat sistem koordinat dengan acuan dimana g_{ij} merupakan tetapan, maka semua R^{α}_{ijk} terhapuskan. Jika dipilih sembarang sistem koordinat baru sebagai pengganti, g_{ij} yang mengacu padanya bukan tetapan, R^{α}_{ijk} tetap akan lenyap, sehingga memenuhi syarat kemalaran (Setiawan, 1992). Dengan mengontraksi (2.13b)

terhadap indeks α dan k didapat tensor kovarian tingkat kedua dan R_{ij} (Sokolnikoff, 1951) sebagai berikut;

$$R_{ij} = \left[\frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ i \quad k \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x^j} - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ i \quad j \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x^k} + \left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ i \quad k \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ \gamma \quad j \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ i \quad j \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ \gamma \quad k \end{smallmatrix} \right\} \right] \quad (2.14)$$

Dari pers.(2.11), $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ i, j \end{smallmatrix} \right\} = \Gamma_{ij}^k$ pada pers. (2.13c) minimal harus memiliki 2 variable yang

sama, dan didapat hasil sebagai berikut;

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \quad 1 \end{smallmatrix} \right\} &= \frac{1}{2} \lambda', & \dots \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \quad 2 \end{smallmatrix} \right\} &= \frac{1}{r}, & \left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \quad 3 \end{smallmatrix} \right\} &= \frac{1}{r} \\ \left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \quad 4 \end{smallmatrix} \right\} &= \frac{1}{2} \mu', & \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \quad 2 \end{smallmatrix} \right\} &= -r e^{-\lambda}, & \left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \quad 3 \end{smallmatrix} \right\} &= \cot \theta \\ \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \quad 3 \end{smallmatrix} \right\} &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}, & \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \quad 3 \end{smallmatrix} \right\} &= -\sin \theta \cos \theta, \dots, & \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \quad 4 \end{smallmatrix} \right\} &= \frac{1}{2} e^{\mu-\lambda} \mu' \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nilai-nilai pada pers.(2.15) bila disubstitusikan pada pers.(2.14) untuk tensor rank-4 (lampiran II) diperoleh hasil sebagai berikut;

$$R_{11} = \frac{1}{2} \mu'' - \frac{1}{4} \lambda' \mu' + \frac{1}{4} (\mu')^2 - \frac{\lambda'}{r} = 0 \quad (2.16a)$$

$$R_{22} = e^{-\lambda} \left[1 + \frac{1}{2} r (\mu' - \lambda') \right] - 1 = 0 \quad (2.16b)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta \left[e^{-\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} r (\mu' - \lambda') \right) - 1 \right] = 0 \quad (2.16c)$$

$$R_{44} = e^{\mu-\lambda} \left[-\frac{1}{2} \mu'' + \frac{1}{4} \lambda' \mu' - \frac{1}{4} (\mu')^2 - \frac{\mu'}{r} \right] = 0 \quad (2.16d1)$$

Pada pers. (2.16d1) harus disepakati bahwa

$$\left[-\frac{1}{2}\mu'' + \frac{1}{4}\lambda'\mu' - \frac{1}{4}(\mu')^2 - \frac{\mu'}{r} \right] = 0 \quad (2.16d2)$$

sebab untuk $e^{\mu-\lambda} = 0$, didapat harga $\mu-\lambda = -\infty$, adalah suatu penyelesaian yang tidak mungkin.

Dengan demikian dari pers. (2.16a) dan (2.16d2) bila dijumlahkan, didapat;

$$\lambda' = -\mu' \quad (2.17a)$$

dapat ditunjukkan bahwa

$$\lambda = -\mu + \text{konstan} \quad (2.17b)$$

pada $r \rightarrow \infty$, λ dan μ mendekati nol, maka

$$\lambda(r) = -\mu(r) \quad (2.17c)$$

pers. (2.17a) bila disubstitusikan ke pers. (2.16b) didapat

$$e^{\mu}(1 + r.\mu') = 1 \quad (2.17d)$$

dimisalkan;

$$e^{\mu} = \gamma \quad (2.17e)$$

dari pers. (2.17d) didapat

$$\gamma + r.\gamma' = 1 \quad (2.17f)$$

penyelesaian dari pers. diferensial di atas adalah

$$\gamma = e^{\mu} = (1 - 2.K/r) \quad (2.17g)$$

Karena kelengkungan ruang-waktu terkait dengan keberadaan massa (M) maka, harga M haruslah dilibatkan dalam K, yang berlawanan dengan γ , dan diperoleh $2.kM/r$ yang tidak bersatuan, sehingga k haruslah konstanta yang bersatuan panjang per massa dan didapat $k = G/c^2$, dengan demikian maka

$$e^{\mu} = e^{-\lambda} = (1 - 2GM/c^2 r) \quad (2.17h)$$

Sehingga pers. kurva *geodesiknya* adalah sebagai berikut (Sokolnikoff, 1951);

$$ds^2 = c^2(1 - 2GM/c^2 r) (dt)^2 - (1 - 2GM/c^2 r)^{-1} (dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \quad (2.18)$$

Dengan analogi yang sama pada pers. (2.7) maka didapat pers. diferensial untuk dilatasi waktu sebagai berikut;

$$\frac{ds^2}{c^2} = \gamma(dt)^2 - \frac{\gamma^{-1}(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2}{c^2}$$

$$\text{dengan, } \frac{\gamma^{-1}(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2}{c^2 dt^2} = \frac{u^2}{c^2}$$

$$\frac{ds^2}{c^2} = dt_0^2$$

$$dt_0 = \left(\gamma - \frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$dt_0 = \left\{ \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) - \frac{u^2}{c^2} \right\}^{\frac{1}{2}} dt \quad (2.19)$$

untuk suatu kerangka yang diam satu dengan yang lain maka;

$$dt_0 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (2.20)$$

Dengan

dt_0 adalah kurva diferensial perjalanan waktu pada suatu tempat dengan jarak r

dt adalah kurva diferensial perjalanan waktu pada suatu tempat dengan jarak $r \rightarrow \infty$

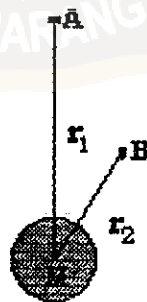
Pers. diferensial dilatasi waktu dari pers. (2.19) atau pers. (2.20) adalah merupakan perbandingan kurva diferensial perjalanan waktu untuk suatu tempat pada radius r (dituliskan dt_0), dengan suatu tempat yang bebas medan massa (ditulis dengan dt). Dari pers. (2.19) atau pers. (2.20) kurva perjalanan waktu di tempat r (dituliskan dt_0), akan terlihat mengalami pemuluran (terdilatasi) ketika dibandingkan dengan kurva perjalanan waktu di tempat $r = \infty$ (ditulis dengan dt).

Dimisalkan suatu massa sebesar M dan suatu tempat (yang diam) yang berjarak r_1 dari pusat massa maka pers. diferensial dari perbandingan perjalanan waktu di tempat r_1 dengan di suatu tempat $r = \infty$, adalah;

$$dt_1 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (2.20a)$$

Dan berarti bahwa perjalanan waktu di r_1 menurut pengamat di $r = \infty$, adalah ketika di $r =$

∞ , waktu berjalan sebesar dt , maka waktu berjalan di r_1 sebesar $\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right)^{\frac{1}{2}} dt$.



Gambar 2.8. Dilatasi waktu pada dua tempat dengan radius yang berbeda dari M .

Sementara untuk tempat pada r_2 analog dengan tempat r_1 dan diberikan pers. sebagai berikut;

$$dt_2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (2.20b)$$

Oleh karena daerah r_1 dan r_2 merupakan dua tempat yang medan gravitasi massanya adalah berbeda sehingga kelengkungan ruang-waktu dari dua tempat tersebut adalah berbeda maka r_2 juga akan melihat pemuluran waktu pada r_1 , dan secara matematis diberikan pers. sebagai berikut;

$$dt_1 = \frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right)^{\frac{1}{2}}} dt_2 \quad (2.20c)$$

Dan berarti bahwa perjalanan waktu pengamat di r_1 menurut di r_2 adalah ketika di r_2 , waktu berjalan sebesar dt_2 , maka waktu berjalan di r_1 sebesar

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right)^{-\frac{1}{2}} dt_2.$$

Jadi untuk dua tempat yang masing-masing bergerak dengan u_1 untuk di r_1 dan u_2 untuk pengamat di r_2 , digunakan pers. (2.19) yang prosesnya analog dengan proses pers. (2.20) sampai (2.20c) sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut;

$$dt_1 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} - \frac{u_2^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dt_2 \quad (2.20a)$$

2.2. Sistem Surya

Sistem surya adalah Matahari dan sembilan planet yang mengorbit beserta satelit-satelit pada planet tersebut, juga beberapa benda kecil seperti asteroid dan comet (Hartmann, 1967). Urutannya adalah Matahari ($\odot$), Merkurius (☿), Venus (♀), Bumi ($\oplus$), Mars (♂), Jupiter (♃), Saturnus (♄), Uranus (♅), Neptunus (♆), dan Pluto (♇). Matahari merupakan pusat dari peredaran kesembilan planet dan tiap-tiap planet mempunyai garis edar sendiri-sendiri.

Menurut hukum Kepler I tentang gerak planet-planet disebutkan bahwa:

Setiap Planet bergerak pada lintasan elips dengan Matahari berada pada salah satu titik fokusnya (Kittel, dkk, 1965).

Dari fenomena di atas akan dihitung dengan pers. (2.19) untuk Planet Merkurius (☿), Venus (♀), dan permukaan Matahari ($\odot$) dengan acuan adalah Bumi ($\oplus$).

2.3. Unsur Radioaktif

Jika N inti radioaktif yang berada pada saat t dan jika sekarang tak ada inti baru yang terbentuk dalam suatu sampel, maka jumlah peluruhan dN dalam waktu dt sebanding dengan N sehingga;

$$\lambda = -\frac{(dN/dt)}{N} \quad (2.21)$$

λ disebut konstanta peluruhan. Ruas kanan pers. (2.21) adalah kebolehjadian peluruhan sebuah atom per satuan waktu. Integrasi pers. (2.21) menghasilkan bentuk eksponensial peluruhan bagi radioaktif.

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (2.22)$$

Ketika $N(t)$ tinggal $\frac{1}{2}$ dari N mula-mula maka waktu yang dijalani oleh unsur tersebut dikatakan sebagai waktu-paruh dinyatakan dengan $t_{1/2}$, persamaanya adalah sebagai berikut;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} N_0 &= N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t} \\ -\lambda t_{1/2} &= \ln \frac{1}{2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Waktu hidup τ , adalah waktu rata-rata yang diperlukan oleh inti untuk bertahan sebelum meluruh. Jumlah yang bertahan sampai waktu t hanyalah $N(t)$, dan jumlah yang meluruh antara t dan $t + dt$ adalah $|dN/dt| dt$. Sehingga waktu hidup rata-rata adalah;

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} t |dN/dt| dt}{\int_0^{\infty} |dN/dt| dt} \quad (2.24)$$

Penyebut merupakan jumlah peluruhan total. Integrasi pers. (2.24) didapat $\tau = 1/\lambda$ sehingga secara sederhana waktu hidup merupakan kebolehjadian dari konstanta peluruhan, dengan catatan bahwa τ adalah waktu menurut partikel yang meluruh (Krane, 1988).

Pers. (2.22), (2.23), dan (2.24) adalah persamaan yang melibatkan variable waktu (t) yang akan mengalami kelengkungan oleh karena pengaruh medan gravitasi.

