BAB II
TINJAUAN TEORETIK

Penjabaran untuk memperoleh persamaan (1.1) dan (1.2) pada dasarnya dapat dibagi menjadi empat metode yang berbeda. Metode pertama berdasarkan pada perolehan persamaan untuk skalar tangap (*retarded scalar*) dan potensial-potensial vektor dari muatan titik yang bergerak (potensial Lienard-Wiechert) dan kemudian mendiferensialkannya (Griffiths, 1988). Metode ini meliputi diferensiasi panjang dan rumit serta menggunakan manipulasi vektor, dan merupakan salah satu prosedur yang paling rumit dalam teori elektromagnetik klasik. Dalam kenyataan jarang digunakan, karena terlalu rumit.

Metode kedua berdasarkan pada pendiferensiasian integral untuk potensial tangap dari distribusi muatan yang bergerak (Mason dan Weaver, 1929). Metode ini bahkan lebih kompleks daripada metode pertama.

Metode ketiga yaitu suatu metode untuk mendapatkan persamaan (1.1) dan (1.2) atau ekuivalennya dengan cara menggeneralisasikan hukum medan Coulomb dan hukum Biot–Savart yang gayut waktu. Metode ini juga terlalu rumit.

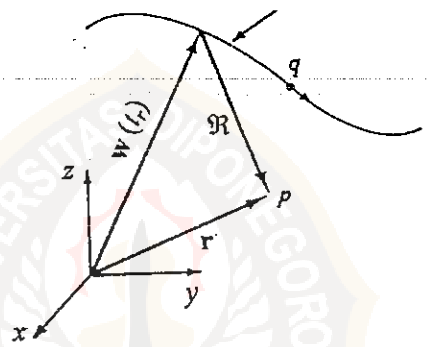
Metode keempat berdasarkan pengaplikasian transformasi koordinat Lorentz pada muatan titik yang diam dalam kerangka kerja teori relativitas khusus (Resnick, 1986). Metode ini relatif mudah, namun kurang cocok digunakan dalam teori elektromagnetik klasik.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

2.1. Potensial Lienard-Wiechert

Potensial Lienard-Wiechert adalah potensial vektor dan skalar yang dihasilkan oleh suatu muatan titik yang bergerak (Reitz, Milford, Christy, 1979).

Medan yang ditimbulkan oleh muatan titik yang bergerak cepat dapat dihitung dari potensial tangap (*retarded potential*). Namun terdapat kesulitan tertentu dalam perhitungan ini yang berhubungan dengan keterlambatan, dan mencerminkan kenyataan bahwa sebaran muatan (dalam ruang) harus diekstrapolasikan kembali ke waktu tangap yang tepat.



Gambar 2.1. Muatan titik yang bergerak

Potensial tangap memperhitungkan kontribusi muatan titik pada titik yang ditinjau dari muatan tangap atau posisi tangap. Karena interaksi elektromagnetik bergerak dengan kecepatan cahaya maka kontribusi muatan q pada titik P adalah kontribusi dari muatan q pada waktu tangap (t_r)

$$t_r = t - \frac{\mathcal{R}}{c} \tag{2.1}$$

Secara implisit waktu tangap dapat ditulis

$$|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r) \tag{2.2}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

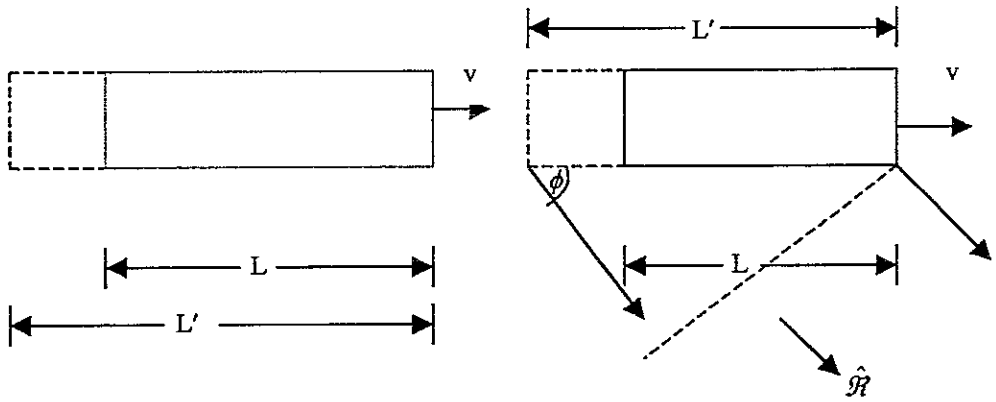
Ruas kiri adalah jarak yang ditempuh dan ruas kanan adalah waktu yang dibutuhkan. Potensial skalar yang ditimbulkan oleh sebaran muatan bergerak

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',\mathrm{t}_r)}{\mathfrak{R}} dv' \tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) tidak dapat lagi diturunkan seperti dalam kasus statis karena ρ harus ditinjau pada waktu yang berbeda untuk bagian yang berbeda dari konfigurasi. Jika sumber bergerak, maka akan memberikan gambaran yang terdistorsi dari total muatan. Dan hal ini tetap berlaku meskipun untuk muatan titik, sebagaimana dalam elektrodinamika Maxwell.

Persamaan potensial Lienard-Wiechert dapat diturunkan dari gambaran bahwa suatu benda yang bergerak menuju pengamat akan terlihat lebih panjang dari panjang sebenarnya (gambar 2.2). Hal ini disebabkan karena cahaya (informasi) yang sampai kepada pengamat secara serentak (bagian depan dan belakang benda) bukan berasal dari cahaya (informasi) yang dikirim secara serentak dari benda, menurut persamaan:

$$\frac{L'}{c} = \frac{L'-L}{v} \quad \text{atau} \quad L' = \frac{L}{(1-v/c)} \tag{2.4}$$



Gambar 2.2 Bentuk benda bergerak

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

Dalam bentuk umum, jika kecepatan benda membentuk sudut ϕ dengan garis pandang pengamat, cahaya dari belakang benda harus menempuh jarak ekstra sebesar $L'\cos\phi$. Dalam waktu $L'\cos\phi/c$, benda bergerak menempuh jarak $(L'-L)$, sehingga

$$\frac{L'\cos\phi}{c}=\frac{L'-L}{v} \quad \text{atau} \quad L'=\frac{L}{(1-\frac{v\cos\phi}{c})} \tag{2.5}$$

Hubungan gambaran ini dengan potensial tangap adalah bahwa ketika kita mengintegrasikan $\int \rho(\mathbf{r}',t_r)\,d\upsilon'$ yang intergrandnya ditinjau pada waktu lalunya, maka volume efektif yang muncul termodifikasi (berubah) dengan faktor

$$\upsilon'=\frac{\upsilon}{(1-\frac{\hat{\mathfrak{R}}.\mathbf{v}}{c})} \tag{2.6}$$

Karena kecilnya ukuran partikel, persamaan (2.3) menjadi

$$\int\rho(\mathbf{r}',t_r)d\upsilon'=\frac{q}{(1-\frac{\hat{\mathfrak{R}}.\mathbf{v}}{c})} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(\mathfrak{R}-\frac{\mathfrak{R}.\mathbf{v}}{c})} \tag{2.7}$$

dimana $\mathbf{v}$ adalah kecepatan muatan dan $\mathfrak{R}$ adalah vektor dari posisi lalu terhadap titik ρ. Sementara itu, karena rapat arus dari obyek tegar adalah $\rho\mathbf{v}$ maka

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)\mathbf{v}(t_r)}{\mathfrak{R}}d\upsilon'\\&=\frac{\mathbf{v}}{c^2}\phi(\mathbf{r},t)\end{aligned} \tag{2.8}$$

Persamaan (2.6) dan (2.7) adalah potensial skalar dan vektor Lienard-Wiechert.

Potensial dari muatan titik yang bergerak dengan kecepatan tetap dapat kita turunkan dari persamaan di atas. Untuk lebih mudahnya, dianggap partikel melewati titik pusat pada saat $t=0$, maka

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{v}t$$

dengan memakai persamaan (2.1) dapat dihitung waktu tangapnya

$$|\mathbf{r} - \mathbf{v}t_r| = c\,(t - t_r) \tag{2.8a}$$

dengan mengkuadratkan persamaan (2.8a)

$$r^2 - 2\mathbf{r}.\mathbf{v}.t_r + v^2\,t_r^2 = c^2(t^2 - 2tt_r + t_r^2)$$

$$t_r = \frac{(c^2t - \mathbf{r}.\mathbf{v}) \pm \sqrt{(c^2t - \mathbf{r}.\mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}{(c^2 - v^2)} \tag{2.9}$$

Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, dianggap $\mathbf{v} = 0$

$$t_r = t \pm \frac{r}{c}$$

Dalam kasus ini muatan diam pada pusat dan waktu tangapnya haruslah (t–r/c); karenanya dipakai tanda minus. Dari persamaan 1.2.

$$\mathcal{R} = c\,(t - t_r) \quad \text{dan} \quad \mathfrak{R} = \mathbf{r} - \mathbf{v}\,t_r$$

maka didapatkan

$$(\mathcal{R}c - \mathfrak{R}.\mathbf{v}) = \sqrt{(c^2t - \mathbf{r}.\mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2)} \tag{2.10}$$

sehingga

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t - \mathbf{r}.\mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}} \tag{2.10.a}$$

2.1.1. Medan Muatan Titik yang Bergerak

Untuk mendapatkan persamaan medan listrik dan magnet muatan listrik yang bergerak, dengan menggunakan potensial Lienard–Wiechert ke dalam persamaan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Diferensiasi harus memperhitungkan posisi dan waktu tangap

$$\Re = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r) \text{ dan } \mathbf{v} = \mathbf{w}(t_r)$$

Dengan menggunakan aljabar dan manipulasi vektor maka akan didapatkan :

$$\nabla\phi = \frac{qc}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(\mathcal{R}c - \Re.\mathbf{v})^3}\left\{(\mathcal{R}c - \Re.\mathbf{v})\mathbf{v} - [c^2 - v^2 + (\Re.\mathbf{a})]\right\} \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{qc}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(\mathcal{R}c - \Re.\mathbf{v})}\left\{(\mathcal{R}c - \Re.\mathbf{v})(-\mathbf{v} + \frac{\mathcal{R}}{c}\mathbf{a}) + \frac{\mathcal{R}}{c}[c^2 - \mathbf{v}^2 + (\Re.\mathbf{a})]\mathbf{v}\right\} \tag{2.12}$$

Untuk menyederhanakan persamaan medan listrik dari potensial-potensial di atas maka didefinisikan vektor

$$\mathbf{u} = c\,\hat{\mathcal{R}} - \mathbf{v} \tag{2.13}$$

Oleh karena itu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathcal{R}}{(\Re.\mathbf{u})^3}[\mathbf{u}(c^2 - \mathbf{v}^2) + \Re \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] \tag{2.14}$$

dan

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{(\Re.\mathbf{u})^3}\Re \times [\mathbf{v}(c^2 - v^2) + \mathbf{v}(\Re.\mathbf{a}) + \mathbf{a}(\Re.\mathbf{u})] \tag{2.15}$$

yang mana dapat dengan mudah dilihat bahwa hubungan antara medan magnetik dan medan listrik adalah

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\hat{\mathcal{R}} \times \mathbf{E} \tag{2.16}$$

Karena yang dibicarakan adalah medan listrik dan magnet dari muatan titik dengan kecepatan tetap (**a**=0) maka persamaan (2.14) dan (2.15) menjadi :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(c^2 - v^2)}{(\mathfrak{R}.\mathbf{u})^3}\mathfrak{R}\mathbf{u} \tag{2.17a}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(c^2 - v^2)}{(\mathfrak{R}.\mathbf{u})^3}\mathfrak{R} \times \mathbf{v} \tag{2.17b}$$

2.2. Penurunan Medan Muatan Titik yang Bergerak Tetap dalam Kerangka Relativitas Khusus

Teori relativitas khusus adalah teori yang dibangun atas dasar dua postulat yang salah satunya menyatakan bahwa hukum-hukum fisika di semua kerangka lembam adalah sama dan tidak adanya kerangka diam mutlak. Atas dasar ini dapat dipilih kerangka mana yang dianggap diam atau bergerak dalam batas kelembaman. Dalam kasus ini dapat diberikan suatu kerangka diam S_o pada muatan q yang bergerak seragam relatif terhadap kerangka S. Kemudian, digunakan persamaan tranformasi untuk medan elektromagnetik, dan secara langsung diperoleh medan-medan yang terkait di kerangka S.

Medan listrik dan magnet merupakan aspek yang berbeda dari fenomena yang sama (Achmad, 1986). Dalam bentuk tensor rank dua (tensor medan) generatornya dapat disajikan :

$$F^{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_z \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{Bmatrix}, \qquad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \text{ (tensor antisimetris)}$$

yang bertransformasi menurut :

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\lambda}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}F^{\lambda\sigma} \tag{2.18}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

Λ adalah matrik transformasi Lorentz (Wheeler, 1972) dan $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

Dari persamaan (2.18) didapatkan :

$$E_x' = E_x \qquad E_y' = \gamma\,(E_y - v\,B_z) \qquad E_z' = \gamma(E_z + vB_y)$$

$$B_x' = B_x \qquad B_y' = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z) \quad B_x' = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) \tag{2.19}$$

yang mana dapat dilihat bahwa jika **B** = 0 atau **E** = 0 pada salah satu kerangka, maka pada kerangka lainnya akan berlaku persamaan berturut-turut :

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c^2}(\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \text{ atau } \mathbf{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{2.20}$$

Sekarang jika muatan q diam pada kerangka S_o, sedangkan kerangka S bergerak dengan kecepatan **v** ke kanan relatif terhadap S_o, maka dalam kerangka S_o akan berlaku Hukum Coulomb

$$\mathbf{E}_o = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}\hat{r}_0$$

atau

$$E_{xo} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}$$

$$E_{yo} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qy_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}$$

$$E_{zo} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qz_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}$$

Dari persamaan transformasi (2.19), diperoleh komponen-komponen E :

$$E_x = E_{xo} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}$$

$$E_y = \gamma_o E_{yo} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma_0 q y_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

$$E_z = \gamma_o E_{yo} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma_0 q z_0}{(x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} + z_0^{\ 2})}$$

Persamaan di atas masih dalam bentuk koordinat So. Jika diubah ke dalam koordinat S dengan transformasi Lorentz (invers transformasi Lorentz)

$$x_o = \gamma_o (x + v_o t) = \mathfrak{R}_x$$

$$y_o = y = \mathfrak{R}_y$$

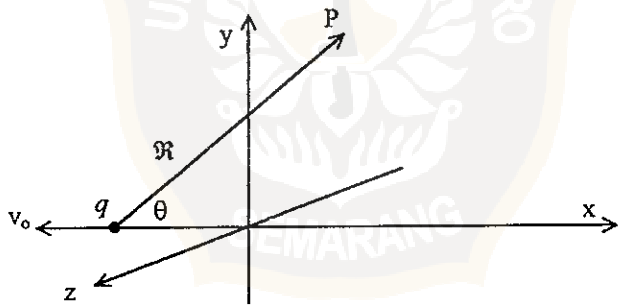
$$z_o = z = \mathfrak{R}_z$$

dimana $\mathfrak{R}$ adalah vektor jarak q ke P (gambar 2.3) maka akan didapat

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma_0 q}{(\gamma_0^{\ 2} \mathfrak{R}^2 \cos^2\theta + \mathfrak{R}^2 \sin^2\theta)^{3/2}} \mathfrak{R}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(1 - v^2/c^2)}{(1 - (v^2/c^2)\sin^2\theta)^{3/2}} \frac{\hat{\mathfrak{R}}}{\mathfrak{R}^2} \qquad (2.21a)$$

yang sesuai dengan persamaan (1.1)



Gambar 2.3. Muatan titik yang diam dipandang dari kerangka yang bergerak

untuk memperoleh persamaan medan magnetnya digunakan persamaan (2.20) dan (2.21a), sehingga diperoleh :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \frac{\gamma_0 q v}{(1 - (v^2/c^2) sin^2\theta)^{3/2}} \frac{\hat{\phi}}{\mathfrak{R}^2} \qquad (2.21b)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

2.3. Metode Baru dengan Pendekatan Klasik

Disini akan dihadirkan penurunan yang relatif sederhana dari medan yang dihasilkan oleh muatan titik yang bergerak serba sama berdasarkan persamaan umum untuk medan listrik dan magnetik dari suatu muatan gayut waktu yang berubah-ubah *(arbitrary time-dependent charge)* dan distribusi arus

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{[\nabla'\rho + (1/c^2)(\partial\mathbf{J}/\partial t)]}{r}\,d\upsilon' \tag{2.22}$$

dan

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{[\nabla'\times\mathbf{J}]}{r}\,d\upsilon' \tag{2.23}$$

dengan : t = waktu tinjauan untuk **E** dan **H**

ρ = kerapatan muatan listrik

J = kerapatan arus

r = jarak antara titik-titik medan x, y, z (titik tinjauan untuk **E** dan **H**) dengan titik sumber x', y', z' (elemen volume $d\upsilon'$)

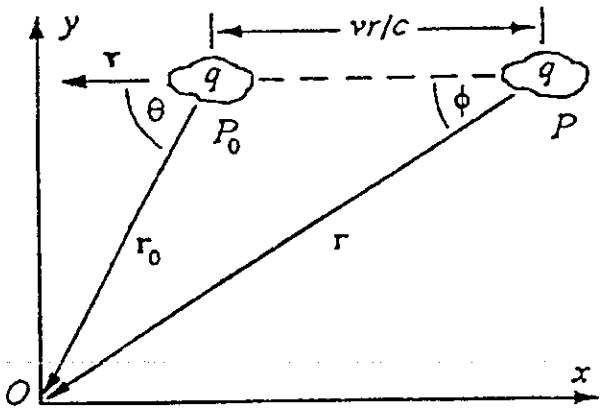
c = kecepatan cahaya

Dalam persamaan-persamaan ini, tanda kurung kuadrat merupakan simbol perlambatan yang menunjukkan bahwa besaran-besaran dalam tanda kurung ditinjau untuk waktu tangapnya $t' = t - r/c$.

Operator ∇' hanya beroperasi pada koordinat utama, dan integral dikenakan pada semua ruang. Kedua persamaan ini merupakan penyelesaian umum dari persamaan Maxwell untuk medan dalam ruang hampa.

Persamaan Heaviside (1.1) menyatakan medan listrik dalam bentuk koordinat "posisi saat ini" $\mathbf{r}_o$ dan θ seperti yang ditunjukkan dalam gambar 2.4.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)



Gambar 2.4. Hubungan geometris antara r_0 dan r

Kebanyakan penurunan modern menyatakan medan listrik dan medan magnet dari suatu muatan bergerak dalam bentuk koordinat "tangap" **r** dan ϕ. Pada bentuk koordinat posisi tangap, medan muatan titik bergerak serba sama adalah :

$$\mathbf{E} = \frac{q(1-v^2/c^2)}{4\pi\,\varepsilon_0 r^3[1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc]^3}[\mathbf{r}-\frac{r\mathbf{v}}{c}] \tag{2.24}$$

dan

$$\mathbf{H} = \frac{q(1-v^2/c^2)}{4\pi\, r^3[1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc]^3}[\mathbf{v}\times\mathbf{r}] \tag{2.25}$$

persamaan (2.24) dan (2.25) tidak lain adalah persamaan (2.17a) dan (2.17b). Dalam hal ini karena titik yang ditinjau adalah titik pusat, maka $\mathfrak{R}$=**r** yaitu vektor jarak antara muatan dengan titik pusat (0,0).

2.3.1. Medan Suatu Muatan Titik Diam dan Medan Arus Filamen Diam

Persamaan (2.22) dan (2.23) tidak terkenal dan jarang digunakan. Untuk menggunakan persamaan-persamaan ini, harus melibatkan operasi analisis vektor yang jarang digunakan meskipun sangat sederhana. Cara terbaik untuk lebih memahami operasi ini adalah dengan menganggap ke dalam bentuk tidak gayut

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

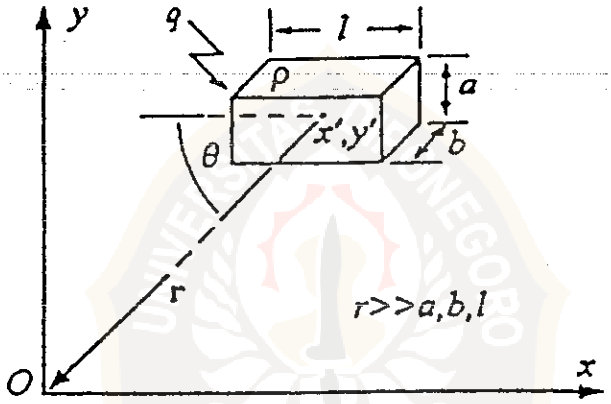
waktu dari persamaan (2.22) dan (2.23).

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{\nabla'\rho}{r}\,dv' \tag{2.26}$$

dan

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla'\times\mathbf{J}}{r}\,dv' \tag{2.27}$$

Persamaan (2.26) dapat digunakan untuk menurunkan persamaan (1.3). Dengan menganggap distribusi muatan konstan ρ dibatasi oleh suatu prisma kecil tegak lurus, sebagaimana dapat dilihat pada gambar 2.5 di bawah ini ,



Gambar 2.5. Distribusi muatan ρ dalam prisma kecil

Prisma ini berpusat pada titik x', y' pada bidang xy dari sistem koordinat tegak lurus yang bersisi l ,a, dan b yang berturut-turut sejajar dengan sumbu x, y dan z. Jarak antara titik x', y' dan titik pusat koordinat adalah $r >> a, b, l$. Kemudian dijabarkan persamaan medan listrik pada titik pusat yang disebabkan oleh distribusi muatan.

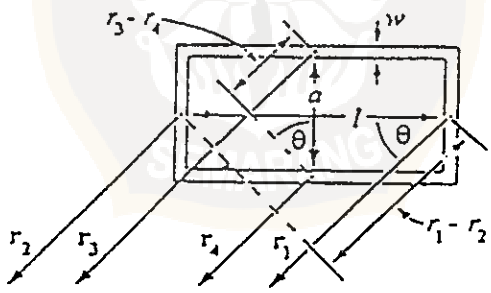
Karena ρ konstan didalam prisma, maka $\nabla'\rho = 0$, sehingga kontribusi $\nabla'\rho$ datang hanya dari lapisan permukaan prisma, sedangkan ρ berubah dari ρ (dalam prisma) menjadi 0 (diluar prisma). Bila ketebalan lapisan permukaan prisma w

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

dimasukkan dalam perhitungan, maka $\nabla'\rho$ menyatakan laju perubahan ρ pada arah laju perubahan terbesar. Sehingga diperoleh $\nabla'\rho = (\rho/w)\ \mathbf{n}_{in}$, dimana $\mathbf{n}_{in}$ adalah satuan normal vektor terhadap lapisan permukaan dan menembus ke dalam prisma. Integral volume dari persamaan (2.26) dapat diuraikan menjadi enam integral. Setiap integral volume dari masing-masing lapisan permukaan sesuai dengan keenam permukaan prisma.

Karena pusat prisma pada bidang xy ($z' = 0$), integral yang meliputi dua lapisan permukaan sejajar bidang xy saling menghilangkan, karena $\nabla'\rho$ untuk salah satu lapisan berlawanan dengan lapisan lainnya, dan r sama untuk kedua lapisan tersebut. Maka hanya tinggal empat integral yang meliputi lapisan yang sejajar dengan bidang xz dan yz yang diperhitungkan.

Dengan menganggap jarak empat lapisan dari pusat koordinat sebagai r_1, r_2, r_3 dan r_4, dan memperhatikan gambar 2.6 berikut ini



Gambar 2.6. Jarak dari empat lapisan permukaan prisma

maka persamaan (2.26) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{\rho/w}{r_1}\mathbf{n}_{1in}\,d\upsilon_1' - \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{\rho/w}{r_2}\mathbf{n}_{2ini}\,d\upsilon_2' - \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{\rho/w}{r_3}\mathbf{n}_{3in}\,d\upsilon_3' - \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{\rho/w}{r_4}\mathbf{n}_{4in}\,d\upsilon_4' \qquad (2.28)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

dengan $d\upsilon_1'$, $d\upsilon_2'$, $d\upsilon_3'$dan $d\upsilon_4'$ berturut-turut adalah elemen-elemen dari keempat lapisan, dan $\mathbf{n}_{1in}$, $\mathbf{n}_{2in}$, $\mathbf{n}_{3in}$, dan $\mathbf{n}_{4in}$ adalah satuan normal vektor pada lapisan dan menembus ke dalam prisma. Karena dimensi linier prisma lebih kecil dari r_1, r_2, r_3 atau r_4, tiap integral dapat diganti dengan perkalian integrandnya terhadap volume dari lapisan yang sesuai. Selanjutnya didapatkan :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\rho' w}{r_1}abw(-\mathbf{i}) - \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\rho' w}{r_2}abw\,\mathbf{i} \\ &\quad -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\rho' w}{r_3}blw(-\mathbf{j}) - \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\rho' w}{r_4}blw\,\mathbf{j} \\ &= -\frac{\rho}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{ab}{r_1}\mathbf{i} - \frac{ab}{r_2}\mathbf{i} + \frac{bl}{r_3}\mathbf{j} - \frac{bl}{r_4}\mathbf{j}\right) \\ &= -\frac{\rho}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(ab\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\mathbf{i} + bl\frac{r_3 - r_4}{r_3 r_4}\mathbf{j}\right)\end{aligned} \tag{2.29}$$

Karena dimensi-dimensi linier prisma jauh lebih kecil daripada jarak antara prisma dengan titik pusat, pada dasarnya keempat r sejajar, sebagaimana terlihat pada gambar 2.6, $r_1 - r_2 = l\cos\theta$, dan $r_3 - r_4 = a\sin\theta$. Selanjutnya, perkalian r_1 r_2 dan r_3 r_4 pada dasarnya adalah sama dengan r^2 (kuadrat jarak antara pusat prisma dan titik pusat). Persamaan (2.29) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{\rho}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(abl\frac{\cos\theta}{r^2}\mathbf{i} + bla\frac{\sin\theta}{r^2}\mathbf{j}\right) \\ &= -\frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^3}\left(r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j}\right)\end{aligned} \tag{2.30}$$

atau

$$\mathbf{E} = \left(q/4\pi\,\varepsilon_0 r^3\right)\mathbf{r} \tag{2.31}$$

yang merupakan medan muatan titik yang diharapkan.

Dengan menganggap medan magnet yang dihasilkan oleh kawat yang bertampang lintang tegak lurus membawa arus listrik tunak I dengan kerapatan arus konstan **J**, dan kawat sejajar dengan sumbu x, berarti sumbu kawat terletak

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

pada bidang xy, dan permukaan-permukaan kawat sejajar dengan bidang-bidang xy, dan xz. Arah arus dianggap negatif dalam arah x, lebar dan ketebalan kawat adalah a dan b. Titik pengamatan berada pada titik pusat dan kawat berada jauh dari titik pusat. Dengan menggunakan persamaan (2.27), dapat dihitung kontribusi pada segmen kecil dari panjang kawat l, dengan r adalah jarak medan magnet ke titik pusat (segmen ini merupakan prisma tegak yang bentuk, kedudukan dan dimensinya sama dengan prisma pada gambar 2.5). Rapat arus dalam kawat adalah tetap. Oleh karena itu $\nabla' \times \mathbf{J} = 0$ di dalam kawat. Kontribusi $\nabla' \times \mathbf{J}$ hanya berasal dari lapisan permukaan kawat, dengan perubahan arus dari $\mathbf{J}$ (dalam kawat) menjadi nol (diluar kawat). Ketebalan lapisan permukaan adalah w. Karena $\nabla' \times \mathbf{J}$ merupakan laju perubahan $\mathbf{J}$ dalam arah tegak lurus terhadap $\mathbf{J}$, dan karena arah dari $\nabla' \times \mathbf{J}$ adalah aturan tangan kanan relatif terhadap $\mathbf{J}$, maka diperoleh empat lapisan permukaan yang sesuai dengan empat permukaan kawat

$\nabla' \times \mathbf{J} = (J / w)\mathbf{j}$ untuk lapisan permukaan depan

$\nabla' \times \mathbf{J} = -(J / w)\mathbf{j}$ untuk lapisan permukaan belakang

$\nabla' \times \mathbf{J} = -(J / w)\mathbf{k}$ untuk lapisan permukaan atas

$\nabla' \times \mathbf{J} = (J / w)\mathbf{k}$ untuk lapisan permukaan bawah

Karena $\nabla' \times \mathbf{J}$ di lapisan permukaan depan adalah kebalikan $\nabla' \times \mathbf{J}$ di lapisan permukaan belakang, sedangkan kedua lapisan permukaan berada pada jarak r yang sama dari titik pengamatan, kontribusi kedua lapisan ini dalam integral persamaan (2.27) saling menghilangkan.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

Dengan menentukan jarak dari batas atas dan bawah lapisan permukaan segmen, dan segmen titik pusat sebagai r_3 dan r_4 (dengan notasi sama dengan gambar 2.6), maka akan diperoleh medan magnet

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{J/w}{r_3}\mathbf{k}\,dv' + \frac{1}{4\pi}\int \frac{J/w}{r_4}\mathbf{k}\,dv' \tag{2.32}$$

dimana integral dikenakan pada seluruh volume lapisan permukaan atas dan bawah. Karena dimensi linier segmen jauh lebih kecil daripada r_3 dan r_4 kita dapat mengganti integral dengan perkalian integrandnya dengan volume lapisan permukaan, sehingga

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi}\frac{J/w}{r_3}bhw\mathbf{k} + \frac{1}{4\pi}\frac{J/w}{r_4}bhw\mathbf{k} = \frac{Jbl}{4\pi}\frac{r_3 - r_4}{r_3 r_4}\mathbf{k} \tag{2.33}$$

Karena $r_3 - r_4 = a \sin\theta$, sehingga dengan memasukkan $r_3 - r_4$ dan mengganti perkalian $r_3 r_4$ menjadi r^2 akan diperoleh

$$\mathbf{H} = \frac{J}{4\pi r^2}abl \sin\theta\,\mathbf{k} = \frac{I}{4\pi r^2}l \sin\theta\,\mathbf{k} \tag{2.34}$$

merupakan persamaan yang diharapkan untuk medan magnet terhadap arus dalam segmen yang ditentukan.

2.3.2. Bentuk dan Ukuran Muatan Bergerak pada Posisi Tangap

Perhitungan medan listrik dan medan magnet dari suatu muatan titik yang bergerak dengan kecepatan tetap sesuai dengan persamaan (2.22) dan (2.23) yang pada dasarnya sama dengan perhitungan medan muatan titik diam, kecuali perhitungan dua penggabungan efek tangap yang dihubungkan dengan gerakan muatan.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

Efek pertama adalah perubahan semu dari panjang muatan bergerak. Efek ini adalah efek yang sama seperti telah disebutkan pada sub bab 2.1.

Muatan yang bergerak menjauh dari pengamat terlihat lebih pendek, sementara muatan yang bergerak menuju pengamat terlihat lebih panjang dari sesungguhnya. Panjang semu dari muatan yang bergerak dengan dimensi liniernya adalah kecil dibandingkan dengan jarak r dari titik pengamatan adalah :

$$l^* = \frac{l}{1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc} \tag{2.35}$$

persamaan (2.35) tidak lain adalah persamaan (2.5), dengan l^* adalah panjang semu dari muatan, **v** adalah kecepatan muatan,dan vektor kedudukan muatan **r** berarah menuju titik pengamatan (**v**,**r**, dan r diambil pada waktu titik tangap).

Efek kedua adalah perubahan semu dari bentuk muatan bergerak. Anggap suatu muatan kecil yang bergerak berlawanan dengan sumbu x, dengan kecepatan tetap **v** yang diamati dari sebuah titik 0 (gambar 1). Kedudukan tangapnya pada titik P dinyatakan dengan vektor **r**. Kedudukan "saat ini" pada titik P_o dinyatakan dengan vektor $\mathbf{r}_o$. Jarak Δx dari P ke P_o adalah jarak muatan bergerak selama waktu sinyal (medan) untuk merambat dari P ke 0, yaitu $\Delta x = v\ (r/c)$. Di dalam muatan, garis-garis yang sejajar dengan sumbu y pada saat muatan dalam keadaan diam atau pada kedudukan "saat ini", akan terlihat miring ketika muatan bergerak dan berada pada kedudukan tangapnya.

Pertama, dicari hubungan antara komponen x dari kedudukan saat ini, vektor $\mathbf{r}_o$ dan komponen x dan y dari kedudukan tangap vektor **r**. Dari gambar 2.4 diperoleh

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

$$x = x_o + rv/c \tag{2.36}$$

atau

$$x = x_o + (x^2 + y^2)^{1/2}\, v/c \tag{2.37}$$

Lalu dengan mendiferensialkan persamaan (2.37) dan tetap mempertahankan x_0 konstan akan diperoleh

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y(v/c)}{r[1-(v/c)(x/r)]} \tag{2.38}$$

yang dapat ditulis sebagai :

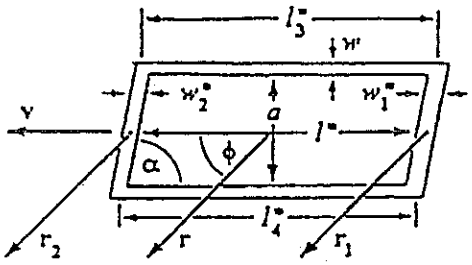
$$\frac{dx}{dy} = \frac{y(v/c)}{r[1-(v/c)\cos\phi]} = \frac{y(v/c)}{r[1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc]}$$

$$= \frac{(v/c)\sin\phi}{1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc} \tag{2.39}$$

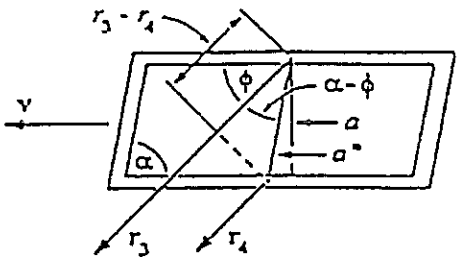
Jadi, menurut persamaan (2.39), garis vertikal x_0 = konstan, dx_o/dy_o = 0) pada muatan yang berada pada kedudukan saat ini terlihat miring ketika muatan diamati pada kedudukan tangapnya. Dan sudut kemiringan α diberikan oleh :

$$\cot\alpha = \frac{(v/c)\sin\phi}{1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc} \tag{2.40}$$

Hal ini dapat dilihat pada gambar 2.7 berikut :



Gambar 2.7. Bentuk muatan pada kedudukan tangap



Gambar 2.8. Hubungan antara $\mathbf{r}_3$ dan $\mathbf{r}_4$ pada kedudukan tangap

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

jika muatan bergerak dalam bentuk prisma tegak dan jika muatan berada pada kedudukan tangapnya (titik P pada gambar 2.4), maka akibatnya adalah :

1. Bentuk muatan berubah menjadi prisma miring (gambar 2.7)
2. Panjang permukaan atas prisma (jarak r_3 dari titik pusat, seperti pada gambar 2.6 dan 2.7) menjadi persamaan (2.35)

$$l_3^* = \frac{l}{1-(\mathbf{r}_3.\mathbf{v})/r_3c} \tag{2.41}$$

dan pada permukaan bawah (jarak r_4 dari titik pusat) menjadi

$$l^*_4 = \frac{l}{1-(\mathbf{r}_4.\mathbf{v})/r_4c)} \tag{2.42}$$

3. Ketebalan lapisan permukaan sebelah kanan (jarak r_1 dari titik pusat) menjadi

$$w^*_1 = \frac{w}{1-(\mathbf{r}_1.\mathbf{v})/r_1c)} \tag{2.43}$$

dan ketebalan lapisan permukaan sebelah kiri (jarak dari titik pusat) menjadi

$$w^*_2 = \frac{w}{1-(\mathbf{r}_2.\mathbf{v})/r_2c)} \tag{2.44}$$

4. Selisih antara r_1 dan r_2 (gambar 2.6dan 2.7) menjadi

$$r_1 - r_2 = l^* \cos\phi = l\frac{\cos\phi}{1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc} \tag{2.45}$$

5. Selisih antara r_3 dan r_4 juga diubah seperti pada gambar 2.8 menjadi

$$\begin{aligned} r_3 - r_4 &= a^* \cos(\alpha - \phi) \\ &= \frac{a}{\sin\alpha}\cos(\alpha-\phi) \\ &= \frac{a}{\sin\alpha}(\cos\alpha\cos\phi + \sin\alpha\sin\phi) \\ &= a(\cot\alpha\cos\theta + \sin\phi) \end{aligned} \tag{2.46}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

dengan persamaan (2.40) menjadi

$$r_3 - r_4 = a\left[\frac{(v/c)\sin\phi\cos\phi}{1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc} + \sin\phi\right]$$

$$= a\left[\frac{(v/c)\sin\phi\cos\phi}{1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc} + \sin\phi\right]$$

$$= a\left[\frac{(v/c)(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rv + 1 - (\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc}{1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc}\sin\phi\right] \qquad (2.47)$$

atau

$$r_1 - r_4 = \frac{a}{1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc}\sin\phi \qquad (2.48)$$

6. Perkalian titik $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).\mathbf{v}$ adalah l^*v (gambar 2.7, dengan $\mathbf{r}_1$ dan $\mathbf{r}_2$ berimpit pada titik pusat), atau dengan persamaan (2.35) menjadi

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).\mathbf{v} = \frac{lv}{1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc} \qquad (2.49)$$

7. Perkalian titik $(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4).\mathbf{v}$ adalah $\mathbf{a}^*\mathbf{v} = (a\ l\ \sin\alpha)v\ \cos\alpha = av\ \cot\alpha$ (gambar 5), atau dengan persamaan (2.40) menjadi

$$(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4).\mathbf{v} = a\frac{(v^2/c)\sin\phi}{1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc} \qquad (2.50)$$

2.3.3 Medan Listrik dan Medan Magnet dari suatu Muatan Titik yang Bergerak dengan Kecepatan Tetap

Untuk menentukan medan listrik dan medan magnet dari suatu muatan listrik yang bergerak dengan kecepatan tetap digunakan persamaan (2.22).

Sebagaimana sebelumnya untuk muatan diam, muatan dianggap berada dalam bentuk prisma, dan mempunyai dimensi yang sama seperti gambar 2.5.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

Untuk memakai persamaan (2.22) disamping $\nabla'\rho$, harus diketahui laju perubahan rapat arus terhadap waktu $\partial\mathbf{J}/\partial t$. Muatan bergerak dengan kecepatan tetap, bukan berarti $\mathbf{J} = \rho.\mathbf{v}$ juga tetap, sehingga derivatif terhadap waktunya adalah 0. Tetapi ρ dan $\mathbf{J}$ dalam persamaan (4) tidak hanya merupakan besaran vektor dan besaran skalar, namun medan vektor dan medan skalar. Sebagai medan vektor, $\mathbf{J}$ gayut waktu, karena dihasilkan oleh muatan yang bergerak, sehingga kedudukan $\mathbf{J}$ berubah sebagaimana muatan berubah posisinya. Jika kerapatan ρ dari muatan diam adalah suatu fungsi dari x', y', z', kerapatan dari muatan bergerak mempunyai fungsi $x' - v_x t$, $y' - v_y t$, $z' - v_z t$, oleh karena itu,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial\rho}{\partial x'}v_x - \frac{\partial\rho}{\partial y'}v_y - \frac{\partial\rho}{\partial z'}v_x = -\mathbf{v}.\nabla'\rho \tag{2.51}$$

dan

$$\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} = -(\mathbf{v}.\nabla'\rho)\mathbf{v} \tag{2.52}$$

Namun karena muatan bergerak sejajar dengan sumbu x, maka $\mathbf{v}.\nabla' = v\partial/\partial x'$, sehingga

$$\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t} = -v^2\frac{\partial\rho}{\partial x'}\mathbf{i} \tag{2.53}$$

Persamaan (2.22) menjadi

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\left(\nabla'\rho - \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial\rho}{\partial x'}\mathbf{i}\right)\Big/ r\right]dv' \tag{2.54}$$

Sebagaimana muatan dalam keadaan diam, $\nabla'\rho$ adalah nol di dalam muatan, dan juga sama untuk lapisan permukaan muatan. Seperti $\partial\rho/\partial x'$ (yang hanya mengandung komponen x dari $\nabla\rho$) adalah nol di bagian dalam dan tidak

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

nol hanya di bagian kiri dan kanan lapisan permukaan muatan, dimana $\partial\rho/\partial x' = \rho/w$ di lapisan permukaan sebelah kiri dan $\partial\rho/\partial x' = -\rho/w$ di lapisan permukaan sebelah kanan. Sehingga dengan melihat gambar 2.7 dan 2.8, medan listriknya menjadi

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\rho/w}{r_1}abw^*{}_1(-\mathbf{i}) + \dfrac{\rho/w}{r_2}abw^*{}_2\mathbf{i} + \dfrac{\rho/w}{r_3}bl^*{}_3w(-\mathbf{j}) \\ + \dfrac{\rho/w}{r_4}bl^*{}_4w\mathbf{j} + \dfrac{v^2}{c^2}\times\left(\dfrac{\rho/w}{r_1}abw^*{}_1\mathbf{i} - \dfrac{\rho/w}{r_2}abw^*{}_2\mathbf{i}\right)\end{array}\right] \tag{2.55}$$

Dengan mensubtitusikan w_1^*, w_2^*, l_3^*, l_4^*, dari persamaan (2.43),(2.44),(2.41) dan (2.42), dengan menghilangkan w, dan menyusunnya kembali, diperoleh

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l}\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)\left(\dfrac{1}{r_2(1-(\mathbf{r}_2.\mathbf{v})/r_2c)} - \dfrac{1}{r_1[1-(\mathbf{r}_1.\mathbf{v})/r_1c]}\right)ab\mathbf{i} \\ + \left(\dfrac{1}{r_4[1-(\mathbf{r}_4.\mathbf{v})/r_4c]} - \dfrac{1}{r_3[1-(\mathbf{r}_3.\mathbf{v})/r_3c]}\right)bl\mathbf{j}\end{array}\right] \tag{2.56}$$

atau

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l}\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)\dfrac{r_1-(\mathbf{r}_1.\mathbf{v})/c - r_2 + (\mathbf{r}_2.\mathbf{v})/c}{r_2r_1[1-(\mathbf{r}_2.\mathbf{v})/r_2c][1-(\mathbf{r}_1.\mathbf{v})/r_1c]}ab\mathbf{i} \\ + \dfrac{r_3-(\mathbf{r}_3.\mathbf{v})/c - r_4 + (\mathbf{r}_4.\mathbf{v})/c}{r_4r_3[1-(\mathbf{r}_4.\mathbf{v})/r_4c][1-(\mathbf{r}_3.\mathbf{v})/r_3c]}bl\mathbf{j}\end{array}\right] \tag{2.57}$$

Karena dimensi linier dari muatan jauh lebih kecil dari pada r, r_1, r_2, r_3, dan r_4 penyebut dalam persamaan (2.57) dapat ditulis menjadi $r^2\,[1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc]^2$. Dengan menyederhanakan pembilang menggunakan persamaan (2.45),(2.49),(2.48) dan (2.50) akan didapatkan

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 r^2[1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc]^2}\left[\begin{array}{l}\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)\left(\dfrac{l\cos\phi}{1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc} - \dfrac{lv/c}{1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc}\right)ab\mathbf{i} \\ + \left(\dfrac{a\sin\phi}{1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc} - \dfrac{a(v^2/c^2)\sin\phi}{1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc}\right)bl\mathbf{j}\end{array}\right] \tag{2.58}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

mengingat $\rho abl = q$

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2[1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc]^3}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(cos\phi - \frac{v}{c})\mathbf{i} + (1-\frac{v^2}{c^2})sin\phi\,\mathbf{j}\right]$$

$$= -\frac{q(1-v^2/c^2)}{4\pi\varepsilon_o r^3[1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc]^3}\left[rcos\phi\,\mathbf{i} + rsin\phi\,\mathbf{j} - \frac{r\,v}{c}\mathbf{i}\right] \tag{2.59}$$

sehingga

$$\mathbf{E} = -\frac{q(1-v^2/c^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^3[1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc]^3}(\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{v}}{c}) \tag{2.60}$$

adalah persamaan yang ingin diperoleh.

Sekarang akan ditentukan medan magnet dari muatan yang bergerak dengan menggunakan persamaan (2.23). Perbedaan antara persamaan (2.23) dan (2.27) (yang menyatakan medan magnet arus stasioner) hanyalah $\nabla' \times \mathbf{J}$ dalam persamaan (2.23) diintegrasikan pada waktu tangapnya. Oleh karena itu, dapat ditentukan medan magnet dari muatan bergerak dari persamaan (2.32) dan (2.33), yang menyatakan pemakaian posisi tangap dan volume lapisan permukaan tangap. Dengan memasukkan ke dalam perhitungan rapat arus dari muatan bergerak adalah $J = \rho v$, dan dengan menggunakan persamaan (2.33),(2.41) dan (2.42) diperoleh :

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\rho v/w}{r_3}bl_3{}^{*}w\mathbf{k} + \frac{1}{4\pi}\frac{\rho v/w}{r_4}bl_4{}^{*}w\mathbf{k}$$

$$= \frac{\rho bv}{4\pi}\left(\frac{l}{r_3[1-(\mathbf{r}_3\mathbf{v})/r_3c]} - \frac{l}{r_4[1-(\mathbf{r}_4.\mathbf{v})/r_4c]}\right)\mathbf{k} \tag{2.61}$$

atau dengan menyederhanakan penyebut seperti persamaan (2.58)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

$$\mathbf{H} = \frac{\rho bl}{4\pi}\left[\frac{r_4 - (\mathbf{r}_4.\mathbf{v})/c - r_3 + (\mathbf{r}_3.\mathbf{v})/c}{r^2\left[1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc\right]^2}\right]\mathbf{k} \tag{2.62}$$

Dengan menggunakan persamaan(2.48) dan (2.50), diperoleh

$$\mathbf{H} = \frac{\rho blv}{4\pi r^2\left[1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc\right]^2}\left(\frac{a\,sin\phi}{[1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc]} - \frac{a(v^2/c^2)sin\phi}{[1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc]}\right)\mathbf{k}$$

$$= \frac{\rho ablv}{4\pi r^2\left[1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc\right]^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)sin\phi\,\mathbf{k} \tag{2.63}$$

atau, karena $\rho abl = q$

$$\mathbf{H} = \frac{qv(1-v^2/c^2)sin\,\phi}{4\pi r^2\left[1-(\mathbf{r}.\mathbf{v})/rc\right]^3}\mathbf{k} \tag{2.64}$$

yang merupakan persamaan untuk medan magnet.

Dengan membandingkan persamaan (2.64) dan (2.60), dapat dilihat bahwa medan magnet juga dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{H} = \varepsilon_o \mathbf{v} \times \mathbf{E} \tag{2.65}$$

yang mana adalah persamaan Heaviside untuk **H**.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)