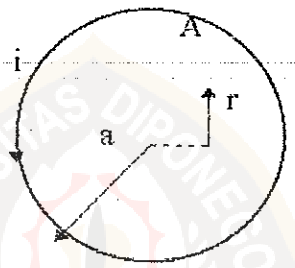
## Lampiran 1

## Penjabaran Vektor Potensial Elektrik dan Magnetik untuk Solenoida dengan Panjang ~ (tak berhingga)

### L. 1.1 Penjabaran Vektor Potensial Elektrik

Untuk kasus gangguan oleh solenoida dengan panjang tak berhingga (Wangsness, 1986)




Gb.L.1-1. Tampang lintang solenoida ideal panjang tak berhingga. (Wangsness,1986)

$$A_{(r)} = A_{\varphi(r)}\,\hat{\varphi}$$

maka

$$\int A.ds = \oint A.\hat{\phi}\, r d\varphi = 2\pi r A_{\varphi} = \Phi$$

$$A_{\varphi(r)} = \frac{\Phi}{2\pi r} \qquad \text{(L.1.1-1)}$$

dengan $\Phi$ adalah potensial skalar yang besarnya

$$\Phi = \int B_i\, \hat{Z}.da\, \hat{Z} = \int \mu_o n\, I\, da = \int \mu_o n I \int da$$

$$\Phi = 2\pi \mu_o n I \int r\, dr = \mu_o n I \pi r^2 \qquad \text{(L.1.1-2)}$$

Maka persamaan L.1.1-1 berubah menjadi

$$A_{\varphi(r)} = \frac{\Phi}{2\pi r} = \frac{\mu_o n I \pi r^2}{2\pi r} \qquad \text{(L.1.1-3)}$$

Untuk kasus vektor potensial di luar solenoida (r > a), maka persamaan (L.1.1-3) dengan mengambil r = a pada persamaan (L.1.1-2):

$$A_{\varphi(r)} = \frac{\mu_o n I \pi a^2}{2\pi r} = \frac{\mu_o n I \pi}{2\pi}\left(\frac{a^2}{r}\right) = \frac{\mu_o n I}{2}\left(\frac{a^2}{r}\right) \qquad \text{(L.1.1-4)}$$

Dengan menggunakan I yang gayut waktu, yaitu :

$$I_{(t)} = I_o e^{i\omega t} \qquad \text{(L.1.1-5)}$$

maka persamaan (L.1.1-4) menjadi :

$$A_{(r,t)} = \frac{1}{2}\mu_o n I_o e^{i\omega t}\left(\frac{a^2}{r}\right) \qquad \text{(L.1.1-6)}$$

### L.1.2. Penjabaran Vektor Potensial Magnetik

Untuk kasus solenoida ideal dengan panjang ~, rapat magnetisasinya :

$$\bar{M} = NSI\ \hat{Z} = nSI\ \hat{Z} \qquad \text{(L.1.2-1)}$$

Dalam bentuk skalar, rapat magnetisasi :

$$M = NSI \qquad \text{(L.1.2-2)}$$

Untuk I yang merupakan fungsi waktu, persamaan (L.1.2-2), menjadi :

$$M_{(t)} = NSI_o e^{i\omega t} \qquad \text{(L.1.2.-3)}$$

Maka dengan menggunakan persamaan (L.1.2-3), vektor potensial semu atau vektor potensial magnetik dapat dinyatakan sebagai :

$$\vec{A}_{D(r,t)} = \vec{G}_{(r,t)} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{M \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_o M \sin\theta}{4\pi r^2}$$
$$= \frac{\mu_o nlSI_o e^{i\omega t}\sin\theta}{4\pi r^2} \qquad \text{(L.1.2-4)}$$

Sedangkan potensial skalar magnetiknya dinyatakan :

$$\vec{H}_{(t)} = \frac{\vec{B}_i}{\mu_o} = nI\hat{Z}$$
$$H_{(t)} = nI_o e^{i\omega t} = -\nabla \Phi m$$

maka :

$$-\nabla\Phi_m = nI_o e^{i\omega t}$$
$$\Phi_m = -\int nI_o e^{i\omega t} dr$$
$$\Phi_m = -nI_o e^{i\omega t} r \qquad \text{(L.1.2-5)}$$

**Lampiran 2**

**PENJABARAN PERSAMAAN TEORI GANGGUAN GAYUT-WAKTU sampai dengan ORDE-3**

## L.2.1 Teori Gangguan Gayut Waktu Orde-1

Hamiltonian tak terganggu $\hat{H}_0$ dengan fungsi pribadi $\psi_m$ dan nilai pribadi $K_m$ akan mempunyai bentuk

$$\hat{H}_0 \ \psi_m = K_m \ \psi_m \qquad \text{(L.2.1-1)}$$

Bila Hamiltonian tersebut mengalami gangguan, persamaannya akan berubah:

$$\hat{H} \ \psi = \hat{H}_0 \ \psi + \lambda \ \hat{H}' \ \psi \qquad \text{(L.2.1-2)}$$

dengan $\lambda$ = parameter penggerak gangguan.

Dengan mengambil H = K akan diperoleh

$$(\hat{H}_0 + \lambda \ \hat{H}') \ \psi = K \ \psi \qquad \text{(L.2.1-3)}$$

Bila $\psi$ dan K pada persamaan (L.2.1-3) diekspansikan dalam pangkat $\lambda$

$$\psi = \lambda^0\psi_0 + \lambda^1\psi_1 + \lambda^2\psi_2 + \lambda^3\psi_3 + \ldots$$

$$= \psi_0 + \lambda \ \psi_1 + \lambda^2\psi_2 + \lambda^3\psi_3 + \ldots \qquad \text{(L.2.1-4a)}$$

$$K = K_0 + \lambda \ K_1 + \lambda^2 K_2 + \lambda^3 \ K_3 + \ldots \qquad \text{(L.2.1-4b)}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (L.2.1.4a-b) dalam (L.2.1.3) akan diperoleh

$$(\hat{H}_0 + \lambda \hat{H}') \ (\psi_0 + \lambda\psi_1 + \lambda^2\psi_2 + \lambda^3\psi_3 + \ldots)$$

$$= (K_0 + \lambda K_1 + \lambda^2 K_2 + \lambda^3 K_3 + \ldots)(\psi_0 + \lambda\psi_1 + \lambda^2\psi_2 + \lambda^3\psi_3 + \ldots) \qquad \text{(L.2.1-5)}$$

Bila persamaan (L.2.5) dikelompokkan dalam $\lambda$ dengan pangkat yang sama akan diperoleh:

$$\hat{H}_0\ \psi_0 = K_0\psi_0 \qquad \text{(L.2.1-6)}$$

$$\hat{H}_0\ \psi_1 + \hat{H}'\ \psi_0 = K_0\psi_1 + K_1\psi_0 \qquad \text{(L.2.1-7)}$$

$$\hat{H}_0\ \psi_2 + \hat{H}'\ \psi_1 = K_0\psi_2 + K_1\psi_1 + K_2\psi_0 \qquad \text{(L.2.1-8)}$$

$$\hat{H}_0\ \psi_3 + \hat{H}'\ \psi_2 = K_0\psi_3 + K_1\psi_2 + K_2\psi_1 + K_3\psi_0 \qquad \text{(L.2.1-9)}$$

Persamaan (L.2.6) analog dengan persamaan (L.2.1), maka dapat diambil:

$$\psi_0 = \psi_m$$

$$K_0 = K_m \qquad \text{(L.2.1-10)}$$

yang merupakan Hamiltonian tanpa gangguan.

Bila $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ diekspansikan dalam $\psi_n$, akan diperoleh

$$\psi_1 = \sum_n a_n^{(1)}\ \psi_n \qquad \text{(L.2.1-11)}$$

$$\psi_2 = \sum_n a_n^{(2)}\ \psi_n \qquad \text{(L.2.1-12)}$$

$$\psi_3 = \sum_n a_n^{(3)}\ \psi_n \qquad \text{(L.2.1-13)}$$

Persamaan (L.2.11) disubstitusikan dalam (L.2.7), menjadi:

$$\sum a_n^{(1)} K_n\ \psi_n + \hat{H}'\ \psi_m = K_m \sum_n a_n^{(1)}\ \psi_n + K_1\ \psi_m \qquad \text{(L.2.1-14)}$$

Bila persamaan (L.2.14) dikalikan dari kiri dengan $\psi_k^*$ dan diintegralkan sedemikian rupa hingga $\langle\psi_n | \psi_k\rangle = \delta_{km}$, persamaan (L.2.14) menjadi:

$$K_k\ a_k^{(1)} + H'_{km} = K_m\ a_k^{(1)} + K_1\ \delta_{km} \qquad \text{(L.2.1-15)}$$

Untuk $k \neq m$, $\delta_{km} = 0$

$$a_k^{(1)} = \frac{H'_{km}}{K_m - K_k} \qquad \text{(L.2.1-16)}$$

Untuk $k = m$, $\delta_{km} = 1$, persamaan (L.2.15) menjadi:

$$K_1 = H'_{mm} = \langle m | \hat{H}' | m \rangle \qquad \text{(L.2.1-17)}$$

Untuk Hamiltonian gayut waktu

$$K_1 = \int \langle m | \hat{H}' | m \rangle \, dt \qquad \text{(L.2.1-18)}$$

**L.2.2. Teori Gangguan Gayut Waktu Orde-2**

Dengan mensubstitusikan persamaan (L.2.1.12) dalam persamaan (L.2.1.8), akan diperoleh

$$\hat{H}_0 \; \psi_2 + \hat{H}' \; \psi_1 = K_0\psi_2 + K_1\psi_1 + K_2\psi_2$$

$$\sum a_n^{(2)} K_n \psi_n + \hat{H}' \sum a_n^{(1)} \psi_n = \sum a_n^{(2)} K_m \psi_n + K_1 \psi_j + K_2 \psi_m \qquad \text{(L.2.2-1)}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (L.2.1.11) dalam (L.2.2.1) dan dikalikan dengan $\psi_k^*$ dan diintegralkan diperoleh

$$a_k^{(2)} K_k + \sum_n a_n^{(1)} \hat{H}'_{kn} = a_k^{(2)} K_m + K_1 a_k^{(1)} + K_2 \delta_{mk} \qquad \text{(L.2.2-2)}$$

Untuk $k = m$

$$\begin{aligned} K_2 &= \sum_n a_n^{(1)} \hat{H}'_{mn} - K_1 a_m^{(1)} \\ &= \sum_{n \neq m} a_n^{(1)} \hat{H}'_{mn} + a_m^{(1)} \hat{H}'_{mm} - K_1 a_m^{(1)} \end{aligned} \qquad \text{(L.2.2-3)}$$

Dengan menggunakan persamaan (L.2.1.16), persamaan (L.2.2.3) akan menjadi

$$K_2 = \sum_{n \neq m} \frac{\left|\hat{H}'_{mn}\right|^2}{K_m - K_n} = \sum_{n \neq m} \frac{\langle m|\hat{H}'|n\rangle \langle n|H'|m\rangle}{K_m - K_n} \qquad \text{(L.2.2-4)}$$

Untuk k ≠ m, dengan menggunakan persamaan (L.2.1.16) dan (L.2.1.17), persamaan (L.2.2.2) menjadi:

$$\underset{k \neq m}{a_k^{(2)}} = \sum_{n \neq m} \frac{H'_{kn} H'_{nm}}{(K_m - K_n)(K_m - K_k)} - \frac{H'_{mm} H'_{km}}{(K_m - K_k)^2} \qquad \text{(L.2.2-5)}$$

Untuk Hamiltonian gayut waktu persamaan (L.2.2.4) berubah menjadi

$$K_2 = \int \sum_{n \neq m} \frac{\left|\hat{H}'_{mn}\right|}{K_m - K_n} dt \qquad \text{(L.2.2-6)}$$

### L.2.3. Teori Gangguan Gayut Waktu Orde-3

Dengan mensubstitusikan persamaan (L.2.1.13) dalam persamaan (L.1.2.1.9), akan diperoleh

$$\sum K_n a_n^{(3)} \psi_n + \sum a_n^{(2)} \hat{H}' \psi_n = \sum a_n^{(3)} K_m \psi_n + a_k^{(2)} K_1 + a_k^{(1)} K_2 + K_2 \sum a_n^{(3)} \psi_n \qquad \text{(L.2.3-1)}$$

Bila persamaan (L.2.3.1) dikalikan dengan $\psi_k^*$ dari kiri dan diintegralkan, maka akan diperoleh:

$$a_k^{(3)} K_k + \sum a_n^{(2)} H'_{kn} = a_k^{(3)} K_m + K_1 a_k^{(2)} + K_2 a_k^{(1)} + K_2 \delta_{mk} \qquad \text{(L.2.3-2)}$$

Untuk k ≠ m

$$a_k^{(3)} (K_k - K_m) = K_1 a_k^{(2)} + K_2 a_k^{(1)} - a_n^{(2)} H_{kn}$$

$$a_k^{(3)} = \frac{-\hat{H}'_{kn} \hat{H}'_{mn}}{(K_m - K_k)^2} - \frac{\hat{H}'_{kn} \hat{H}'_{nm} \hat{H}'_{mp}}{(K_m - K_n)(K_m - K_k)^2} + \frac{\hat{H}'_{mm} \hat{H}'_{km} \hat{H}'_{mp}}{(K_m - K_k)^3} \qquad \text{(L.2.3-3)}$$

Untuk m =3, persamaan (L.2.3.2) menjadi

$$a_n^{(2)}\ \hat{H}'_{mn} = a_m^{(2)}\ K_1 + a_m^{(1)}\ K_2 + K_3$$
$$K_3 = a_n^{(2)}\ \hat{H}'_{mn} - a_m^{(2)} - a_m^{(1)}\ K_3 \qquad \text{(L.2.3-4)}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (L.2.1.16) dan (L.2.2.5) dalam (L.2.3.4), diperoleh

$$K_2 = \frac{\hat{H}'_{mk}\ H'_{kn}\ H'_{nm}}{(K_m - K_k)(K_m - K_n)}$$
$$= \frac{\langle m|H'|k\rangle\langle k|H'|n\rangle\langle n|H'|m\rangle}{(K_m - K_k)(K_m - K_n)} \qquad \text{(L.2.3-5)}$$

Untuk Hamiltonian gayut waktu, persamaan (L.2.3.5) menjadi:

$$K_3 = \int \frac{\langle m|H'|k\rangle\langle k|H'|n\rangle\langle n|H'|m\rangle}{(K_m - K_k)(K_m - K_n)}\,dt \qquad \text{(L.2.3-6)}$$

**Lampiran 3**

**PENJABARAN NILAI HARAP TEORI GANGGUAN GAYUT-WAKTU sampai dengan ORDE-3**

Dengan menggunakan bentuk persamaan medan listrik dan medan magnet

$$\hat{E}_k = -\frac{\partial \hat{V}}{\partial x_k} - a\left(\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial t} + i\hbar\left(\frac{\partial \hat{P}_k}{\partial t} - \hat{S}_k\right)\right) + \left(\nabla \times \hat{G}\right)_k \qquad \text{(L.3-1a)}$$

$$\hat{B}_k = -\frac{\partial \hat{W}}{\partial x_k} + g\left(\frac{\partial \hat{G}_k}{\partial t} - i\hbar\left(\frac{\partial \hat{R}_k}{\partial t} - \hat{T}_k\right)\right) + \left(\nabla \times \hat{A}\right)_k \qquad \text{(L.3-1b)}$$

dan dengan mengambil

$$a\left\langle\left[\hat{H}'(\hat{x},t),\ \hat{A}(\hat{x},t)\right]\right\rangle = i\hbar\, a\left(\frac{\partial \hat{P}_k}{\partial t} - \hat{S}_x\right) \qquad \text{(L.3-1c)}$$

sebagai nilai harap gangguan elektrik dan

$$g\left\langle\left[\hat{H}'(\hat{x},t),\ \hat{G}(\hat{x},t)\right]\right\rangle = -i\hbar\, g\left(\frac{\partial \hat{R}_k}{\partial t} - \hat{T}_k\right) \qquad \text{(L.3-2)}$$

sebagai nilai harap gangguan magnetik dan dengan menerapkan persamaan (L.1-2) dan (L.1-3) pada persamaan (L.3-1c) dan (L.3-2), dapat dihitung nilai harap gangguan elektrik dan magnetik sampai dengan orde ke-3.

### L.3.1. Penjabaran Gangguan Elektrik

Dengan menggunakan persamaan (L.3-1)

$$\langle [H', A] \rangle = i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t} P_k - S_k \right) = i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t} A \right\rangle \right) \qquad \text{(L.3.1-1)}$$

dapat dihitung nilai harap gangguan elektrik untuk:

<u>Orde-1</u>

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle_1 &= \frac{\partial}{\partial t} P_k = \int \psi_n^* \, A \, \psi_1 \, dr \qquad , \qquad bila \;\; n = 1 \\
&= \int \psi_n^* \, A(r, t) \, \psi_n \, dr \\
&= \int N_n \, e^{-i(K_n t - P_n r)} \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 \pi \frac{a^2}{r} e^{i\omega t} \, N_n \, e^{i(K_n t - P_n r)} dr \qquad \text{(L.3.1-2)} \\
&= \frac{N_n^2}{2} \mu_0 \, n \, I_0 \, \pi \, a^2 \, e^{i\omega t} \int \frac{dr}{r} \\
&= \frac{N_n^2}{2} \mu_0 \, n \, I_0 \, \pi \, a^2 \, e^{i\omega t} \ln r \\
&= \frac{1}{2} N_n^2 \, A(r, t) \, r \ln r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial t} A \right\rangle = S_k &= \int \left( \int \psi_n^* \frac{\partial}{\partial t} A(r, t) \, \psi_n \, dr \right) dt \\
&= \int \left( \int N_n \, e^{-i(K_n t - P_n r)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 \pi \frac{a^2}{r} e^{i\omega t} N_n \, e^{i(K_n t - P_n r)} dr \right) dt \\
&= \int \left( \frac{N_n^2}{2} \mu_0 \, n \, I_0 \, \pi \, a^2 \, e^{i\omega t} (K_n + \omega) \int \frac{dr}{r} \right) dt \qquad \text{(L.3.1-3)} \\
&= \frac{N_n^2}{2} \mu_0 \, n \, I_0 \, \pi \, a^2 \, i \, (K_n + \omega) \ln r \int e^{i\omega t} \, dt \\
&= \frac{N_n^2}{2\omega} \mu_0 \, I_0 \, \pi \, n \, a^2 \, (K_n + \omega) \ln r \, e^{i\omega t} \\
&= \frac{N_n^2}{2} \mu_0 \, I_0 \, \pi \, n \, a^2 \, \ln r \, e^{i\omega t} (\hbar + 1) \\
&= \frac{N_n^2}{2} A(r, t) \, r \ln r \, (\hbar + 1)
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan (L.3.1-2) dan (L.3.1-3) pada persamaan (L.3.1-1)

$$\langle [H', A] \rangle = i\hbar \left( \frac{N_n^{\,2}}{2} A(r,\ t)\ r \ln\ r - \frac{N_n^{\,2}}{2} A(r,\ t)\ r \ln\ r\ (\hbar + 1) \right)$$

$$= i\hbar \left( \frac{-N_n^{\,2}}{2} \hbar\ A(r,\ t)\ r \ln\ r \right) \qquad \text{(L.3.1-4)}$$

$$= -\frac{i\hbar^{\,2}}{2} N_n^{\,2}\ A(r,\ t)\ r \ln\ r$$

<u>Orde-2</u>

$$\langle [H', A] \rangle_2 = \frac{\langle n | [H', A] | 1 \rangle \langle 1 | [H', A] | n \rangle}{K_n - K_1} \qquad \text{(L.3.1-5)}$$

dengan

$$\langle n | [H', A] | 1 \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle n | A | 1 \rangle - \left\langle n \left| \frac{\partial}{\partial t} A \right| 1 \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} P_{k_1} - S_{k_1} \qquad \text{(L.3.1-6)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{k_1} = \frac{\partial}{\partial t} \langle n | A | 1 \rangle$$

$$= \int N_n\ e^{-i(K_n t - P_n r)} \frac{1}{2} \mu_0\ n\ I_0\ e^{i\omega t} \pi \left( \frac{a^2}{r} \right) N_1\ e^{i(K_1 t - P_1 r)} dr \qquad \text{(L.3.1-7)}$$

$$= \frac{N_n N_1}{2} \mu_0\ n\ I_0\ \pi\ a^2\ e^{i(-K_n + K_1 + \omega)t} \int \frac{e^{-i(-P_n + P_1)r}}{r} dr$$

dengan merujuk pada tabel integral (Gradshteyn dan Ryzhik,1965)

$$\int \frac{e^{-i(P_n+P_l)r}}{r}\,dr = \ln r + \frac{(-i(P_l-P_n)r)}{1\cdot 1!} + \frac{(-i(P_l-P_n)r)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(-i(P_l-P_n)r)^3}{3\cdot 3!} + \cdots$$

$$= \ln r + \sum\left(\frac{(-i(P_l-P_n)r)^n}{1\cdot 1!}\right) \qquad \text{(L.3.1-8)}$$

dengan mensubstitusikan (L.3.1-6) ke (L.3.1-5) diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{k_l} = \frac{N_n N_l}{2}\mu_0 n I_0 \pi a^2 e^{i(K_l-K_n+\omega)t}\left(\ln r + \Sigma\left(\frac{(-i(P_l-P_n)r)^n}{n\cdot n!}\right)\right) \qquad \text{(L.3.1-9)}$$

$$\begin{aligned}
S_{k_l} &= \left\langle n\left|\frac{\partial}{\partial t}A\right|l\right\rangle \\
&= \int\left(\int N_n e^{-i(K_n t-P_n r)}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\mu_0 n I_0 \pi\left(\frac{a^2}{r}\right)e^{i\omega t}N_l e^{i(K_l t-P_l r)}dr\right)dt \\
&= \int\left(\int N_n e^{-i(K_n t-P_n r)}\frac{1}{2}\mu_0 n I_0 \pi\left(\frac{a^2}{r}\right)i(K_l+\omega)e^{i\omega t}N_l e^{i(K_l t-P_l r)}dr\right)dt \\
&= \int\left(\frac{iN_n N_l}{2}\mu_0 n I_0 \pi a^2 (K_l+\omega)\left(\ln r + \Sigma\left(\frac{(-i(P_l-P_n)r)^n}{n\cdot n!}\right)\right)e^{i(-K_n+K_l+\omega)t}\right)dt \\
&= \frac{N_n N_l \mu_0 n I_0 \pi a^2 (K_n+\omega)}{2(-K_n+K_l+\omega)}\left(\ln r + \Sigma\left(\frac{(-i(P_l-P_n)r)^n}{n\cdot n!}\right)\right)e^{i(-K_n+K_l+\omega)t}
\end{aligned} \qquad \text{(L.3.1-10)}$$

Persamaan (L.3.1-9) dan (L.3.1-10) disubstitusikan dalam (L.3.1-6) akan diperoleh

$$\langle n|[H', A]|1\rangle = \frac{N_n N_1}{2}\mu_0 n I_0 \pi a^2 e^{i(K_1-K_n+\omega)t}\left(\ln r + \Sigma\left(\frac{(-i(P_1-P_n)r)^n}{n\cdot n!}\right)\right)\left(1-\frac{K_1+\omega}{K_1-K_n+\omega}\right) \tag{L.3.1-11}$$

dan persamaan lainnya:

$$\langle 1|[H', A]|n\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle 1|A|n\rangle - \left\langle 1\left|\frac{\partial}{\partial t}A\right|n\right\rangle \tag{L.3.1-12}$$

dengan

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle 1|A|n\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}P_{k_1}\\ &= \int N_1\, e^{-i(K_1t-P_1r)}\,\frac{1}{2}\mu_0\, n\, I_0\pi\left(\frac{a^2}{r}\right)e^{i\omega t}\, N_n\, e^{i(K_1t-P_1r)}\,dr\\ &= \frac{N_1N_n}{2}\mu_0\, n\, I_0\,\pi\, a^2\, e^{i(K_1-K_1+\omega)t}\int\frac{e^{-i(P_1-P_1)r}}{r}\,dr\end{aligned} \tag{L.3.1-13}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (L.3.1-8) dalam persamaan (L.3.1-13) diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle 1|A|n\rangle = \frac{N_1N_n}{2}\mu_0 n I_0 \pi a^2 e^{i(K_n-K_1+\omega)t}\left(\ln r + \Sigma\left(\frac{(-i(P_n-P_1)r)^n}{n\cdot n!}\right)\right) \tag{L.3.1-14}$$

dan

$$\begin{aligned}\left\langle 1\left|\frac{\partial}{\partial t}A\right|n\right\rangle &= S_{k_2}\\ &= \int\left(\int N_1\, e^{-i(K_1t-P_1r)}\,\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu_0}{2}nI_0\pi\left(\frac{a^2}{r}\right)e^{i\omega t}N_n\, e^{i(K_nt-P_nr)}dr\right)dt\\ &= \int\left(\int\frac{N_1N_n}{2}\mu_0 n I_0 \pi a^2 i(K_1+\omega)e^{i(K_n-K_1+\omega)t}\int\frac{e^{-i(P_n-P_1)r}}{r}dr\right)dt\end{aligned} \tag{L.3.1-15}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (L.3.1-8) dalam (L.3.1-5) diperoleh

$$s_{k_2} = \frac{N_1 N_n \mu_0 n I_0 \pi a^2 (K_n + \omega) e^{i(K_n - K_1 + \omega)t}}{2(K_n - K_1 + \omega)} \left( \ln r + \Sigma \left( \frac{(-i(P_n - P_1)r)^n}{n \cdot n!} \right) \right) \quad \text{(L.3.1-16)}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (L.3.1-4) dan (L.3.1-16) ke dalam persamaan (L.3.1-12) diperoleh

$$\langle 1 | [H', A] | n \rangle = \frac{N_n N_1}{2} \mu_0 n I_0 \pi a^2 e^{i(K_n - K_1 + \omega)t} \left( \ln r + \Sigma \left( \frac{(-i(P_n - P_1)r)^n}{n \cdot n!} \right) \right) \left( 1 - \frac{K_n + \omega}{K_n - K_1 + \omega} \right)$$

(L.3.1-17)

Dengan mensubstitusikan (L.3.1-11) dan (L.3.1-17) dalam (L.3.1-5) diperoleh gangguan orde-2

$$\frac{\langle n | [H', A] | 1 \rangle \langle 1 | [H', A] | n \rangle}{K_n - K_1} =$$

$$\frac{i\hbar \left( \frac{N_n N_1}{2} \mu_0 n I_0 \pi a^2 e^{i\omega t} \right)^2 \left( \ln r + \Sigma \left( \frac{(-i(P_1 - P_n)r)^n}{n \cdot n!} \right) \right) \left( \ln r + \Sigma \left( \frac{(-i(P_n - P_1)r)^n}{n \cdot n!} \right) \right) (K_n K_1)}{(K_n - K_1)\left( -K_n^2 - K_1^2 + 2K_n K_1 + \omega^2 \right)}$$

(L.3.1-18)

<u>Orde-3</u>

Analog dengan orde-2, untuk orde-3

$$\frac{\langle n|[H',A]|1\rangle\langle 1|[H',A]|1'\rangle\langle 1'|[H',A]|n\rangle}{(K_n - K_1)(K_1 - K_{1'})} = i\hbar \frac{(N_n N_1 N_{1'})^2}{2}\left(\mu_0 n I_0 \pi a^2 e^{i\omega t}\right)^3 \cdot$$

$$\frac{\left(\ln r + \Sigma\left(\frac{(-i(P_1 - P_n)r)^n}{n \cdot n!}\right)\right)\left(\ln r + \Sigma\left(\frac{(-i(P_{1'} - P_1)r)^n}{n \cdot n!}\right)\right)\left(\ln r + \Sigma\left(\frac{(-i(P_n - P_{1'})r)^n}{n \cdot n!}\right)\right)(-K_n K_1 K_{1'})}{8(K_1 - K_n + \omega)(K_{1'} - K_1 + \omega)(K_n - K_{1'} + \omega)}$$

## L.3.2. Penjabaran Gangguan Magnetik

Dengan menggunakan persamaan (L.3-2)

$$\langle [H', G]\rangle = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}R_k - S_k\right) = i\hbar\, a\left(\frac{\partial}{\partial t}\langle G\rangle - \left\langle\frac{\partial}{\partial t}G\right\rangle\right) \qquad \text{(L.3.2-1)}$$

dapat dihitung nilai harap gangguan magnetik untuk:

<u>Orde-1</u>

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\langle G\rangle_1 = \frac{\partial}{\partial t}R_k &= \int \psi_n^* A\, \psi_1\, dr \qquad \text{bila } n = 1 \\
&= \int N_n\, e^{-i(K_1 t - P_1 r)}\, \frac{\mu_0\, n\, 1\, S\, I_0\, e^{i\omega t} \sin\theta}{4\pi r^2}\, N_n\, e^{i(K_1 t - P_1 r)} dr \\
&= \frac{N_n^2 \mu_0\, n\, 1\, S\, I_0 \sin\theta\, e^{i\omega t}}{4\pi}\int \frac{dr}{r^2} \qquad \text{(L.3.2-2)} \\
&= \frac{-N_n^2 \mu_0\, n\, 1\, S\, I_0 \sin\theta\, e^{i\omega t}}{4\pi r} \\
&= -N_n^2\, G(r, t)\, r
\end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} G \right\rangle = I_k = \int \left( \int \psi_n^* \frac{\partial}{\partial t} G \, \psi_n \, dr \right) dt$$

$$= \int \left( \int N_n \, e^{-i(K_n t - P_n r)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0 n l S I_0 \, e^{i\omega t} \sin\theta}{4\pi r^2} N_n \, e^{i(K_n t - P_n r)} dr \right) dt$$

$$= \int \left( \frac{N_n^2 \mu_0 n l S I_0 \sin\theta \, e^{i\omega t}}{4\pi} i(K_n + \omega) \int \frac{dr}{r} \right) dt \qquad \text{(L.3.2-3)}$$

$$= \int \frac{-N_n^2 \mu_0 n l S I_0 \sin\theta \, e^{i\omega t} \, i(K_n + \omega)}{4\pi r} dt$$

$$= \frac{-N_n^2 \mu_0 n l S I_0 \, e^{i\omega t} \sin\theta \, (\hbar + 1)}{4\pi r}$$

$$= -N_n^2 \, G(r, t)(\hbar + 1) r$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (L.3.2-2) dan (L.3.2-3) dalam (L.3.2-1) akan diperoleh gangguan orde-1

$$\langle [H', A] \rangle = i\hbar \left( N_n^2 \, G(r, t) \, r - N_n^2 \, G(r, t) \, r \, (\hbar + 1) \right) \qquad \text{(L.3.2-4)}$$
$$= i\hbar^2 N_n^2 \, G(r, t) \, r$$

<u>Orde-2</u>

$$\langle [H', G] \rangle = \frac{\langle n | [H', G] | 1 \rangle \langle 1 | [H', G] | n \rangle}{K_n - K_1} \qquad \text{(L.3.2-5)}$$

dengan

$$\langle n | [H', G] | 1 \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle n | G | 1 \rangle - \left\langle n \left| \frac{\partial}{\partial t} G \right| 1 \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} R_{k_1} - T_{k_1} \qquad \text{(L.3.2-6)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{k_1} = \frac{\partial}{\partial t}\langle n|G|1\rangle$$

$$= \int N_n \, e^{-i(K_1 t - P_1 x)} \frac{\mu_0 \, n \, 1 \, S \, I_0 \, e^{i\omega t} \sin\theta}{4\pi r^2} N_1 \, e^{i(K_1 t - P_1 r)} dr \qquad \text{(L.3.2-7)}$$

$$= \frac{N_n N_1 \, \mu_0 \, n \, 1 \, S \, I_0 \sin\theta \, e^{i(K_1 - K_n + \omega)t}}{4\pi} \int \frac{e^{-i(P_1 - P_n)r}}{r} dr$$

Dengan menggunakan tabel integral (Gradshteyn dan Ryzhik,1965)

$$\int \frac{e^{-i(P_1 - P_n)r}}{r} dr = \frac{-e^{-i(P_1 - P_n)r}}{r} + \left(-i(P_1 - P_n)r\right)\int \frac{e^{-i(P_1 - P_n)r}}{r} dr \qquad \text{(L.3.2-8)}$$

dan mensubstitusikan persamaan (L.3.1-8) dalam (L.3.2-8), akan diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{k_1} = \frac{N_n N_1 \mu_0 n 1 S I_0 a^2 \sin\theta e^{i(K_1 - K_n + \omega)t}}{4\pi} \left\{ \frac{-e^{-i(P_1 - P_n)r}}{r} - i(P_1 - P_n)\left( \ln r + \Sigma \left( \frac{(-i(P_1 - P_n)r)^n}{n \cdot n!} \right) \right) \right\}$$

(L.3.2-9)

$$I_{k_1} = \left\langle n \left| \frac{\partial}{\partial t} G \right| 1 \right\rangle = \int \left( \int \psi_n^* \frac{\partial}{\partial t} G(r, t) \psi_n dr \right) dt$$

$$= \int \left( \int N_n \, e^{-i(K_n t - P_n r)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0 n 1 S I_0 \sin\theta e^{i\omega t}}{4\pi r^2} N_1 \, e^{i(K_1 t - P_1 r)} dr \right) dt \qquad \text{(L.3.2-10)}$$

$$= \frac{N_n N_1 \mu_0 n 1 S I_0}{4\pi} \int \left( \int e^{-i(K_n t - P_n r)} \, i(K_1 + \omega) \, e^{i(K_1 t + \omega t - P_1 r)} dr \right) dt$$

$$= \frac{N_n N_1 \mu_0 n 1 S I_0 \, i(K_1 + \omega)}{4\pi} \int \left( e^{i(K_1 - K_n + \omega)t} \int \frac{e^{-i(P_1 - P_n)r}}{r^2} dr \right) dt$$

dengan menggunakan persamaan (L.3.2-8) dan (L.3.1-8) pada persamaan (L.3.2-10) akan diperoleh

$$I_{k_1} = \frac{N_n N_1 \mu_0 n l S I_0 \sin\theta (K_1 + \omega) e^{i(K_1 - K_n + \omega)t}}{4\pi(K_1 - K_n + \omega)} \left\{ \frac{-e^{-i(P_1 - P_n)r}}{r} - i(P_1 - P_n)\left( \ln r + \Sigma \left( \frac{(-i(P_n - P_1)r)^n}{n \cdot n!} \right) \right) \right\}$$

(L.3.2-11)

Dengan mensubstitusikan persamaan (L.3.2-9) dan (L.3.2-11) dalam (L.3.2-6) akan diperoleh

$$\langle n | [H', G] | 1 \rangle = \frac{N_n N_1 \mu_0 n l S I_0 \sin\theta e^{i(K_1 - K_n + \omega)t}}{4\pi} \left\{ \frac{-e^{-i(P_1 - P_n)r}}{r} - i(P_1 - P_n)\left( \ln r + \Sigma \left( \frac{(-i(P_1 - P_n)r)^n}{n \cdot n!} \right) \right) \cdot \left( 1 - \frac{K_1 + \omega}{K_1 - K_n + \omega} \right) \right\}$$

(L.3.2-12)

Sementara itu persamaan

$$\langle 1 | [H', G] | n \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle 1 | G | n \rangle - \left\langle 1 \left| \frac{\partial}{\partial t} G \right| n \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} R_{k_t} - T_{k_t} \qquad \text{(L.3.2-13)}$$

dapat dijabarkan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{k_t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle 1 | G | n \rangle = \int \psi_1^* \, G(r, t) \, \psi_n \, dr \\ &= \int N_1 \, e^{-i(K_1 t - P_1 r)} \frac{\mu_0 \, n \, l S \, I_0 \, e^{i\omega t} \sin\theta}{4\pi r^2} N_n \, e^{i(K_n t - P_n r)} \, dr \end{aligned} \qquad \text{(L.3.2-14)}$$

Dengan menggunakan persamaan (L.3.1-8) dan (L.3.2-8), persamaan (L.3.2-14) akan menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{k_2} = \frac{N_n N_1 \mu_0 n l S I_0 \sin\theta e^{i(K_n - K_1 + \omega)t}}{4\pi} \left\{ \frac{-e^{i(P_n - P_1)r}}{r} - i(P_n - P_1)\left( \ln r + \Sigma \left( \frac{(-i(P_n - P_1)r)^n}{n \cdot n!} \right) \right) \right\}$$

(L.3.2-15)

$$\left\langle 1\left|\frac{\partial}{\partial t}G(r,\ t)\right|n\right\rangle = T_{k_2} = \int\left(\int \psi_1^{*}\ \frac{\partial}{\partial t}G(r,\ t)\ \psi_n\ dr\right)dt$$

$$= \int\left(\int N_1\ e^{-i(E_1 t - P_1 r)}\ \frac{\partial}{\partial t}\ \frac{\mu_0 n|S|_0\, e^{i\omega t}}{4\pi r^2}\sin\theta\, N_n\ e^{i(K_n t - P_n r)}\, dr\right)dt$$

$$= \int\left(\int \frac{N_1 N_n \mu_0 n|S|_0\ \sin\theta\ e^{i(K_n - K_1 + \omega)t}}{4\pi}\, i(K_1 + \omega)\int \frac{e^{-i(P_n - P_1)r}}{r}\, dr\right)dt$$

(L.3.2-16)

Dengan menggunakan persamaan (L.3.1-8) dan (L.3.2-8), persamaan (L.3.2-16) akan menjadi

$$T_{k_2} = \frac{N_n N_1\ \mu_0 n|S|_0 (K_n + \omega)\sin\theta e^{i(K_n - K_1 + \omega)t}}{4\pi(K_n - K_1 + \omega)}\left\{\frac{-e^{-i(P_n - P_1)r}}{r} - i(P_n - P_1)\left(\ln r + \Sigma\left(\frac{(-i(P_n - P_1)r)^n}{n \cdot n!}\right)\right)\right\}$$

(L.3.2-17)

Bila persamaan (L.3.2-15) dan (L.3.2-17) disubstitusikan dalam (L.3.2-13), akan diperoleh

$$\left\langle 1\left|\left[H',\ G\right]\right|n\right\rangle = \frac{N_n N_1 \mu_0 n|S|_0\, e^{i(K_n - K_1 + \omega)t}}{4\pi}\sin\theta\left\{\frac{-e^{-i(P_n - P_1)r}}{r} - i(P_n - P_1)\left(\ln r + \Sigma\left(\frac{(-i(P_n - P_1)r)^n}{n \cdot n!}\right)\right)\right.$$
$$\left.\cdot\left(1 - \frac{K_n + \omega}{K_n - K_1 + \omega}\right)\right\}$$

(L.3.2-18)

Gangguan orde-2 diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (L.3.2-12) dan (L.3.2-18), sehingga diperoleh persamaan:

$$\frac{\langle n|[H',G]|1\rangle\langle 1|[H',G]|n\rangle}{K_n - K_1}$$

$$= \frac{i\hbar K_n K_1 \left(\frac{N_n N_1 \mu_0 n S I_0 e^{i\omega t} \sin\theta}{4\pi}\right)^2 \left\{\frac{-e^{-i(P_1-P_n)r}}{r} - i(P_1 - P_n)\left(\ln r + \Sigma\left(\frac{(-i(P_1 - P_n)r)^n}{n \cdot n!}\right)\right)\right\}}{(K_n - K_1)\left(-K_n^2 - K_1^2 + 2K_n K_1 + \omega^2\right)} \cdot$$

$$\cdot \left\{\frac{-e^{-i(P_n-P_1)r}}{r} - i(P_n - P_1)\left(\ln r + \Sigma\left(\frac{(-i(P_n - P_1)r)^n}{n \cdot n!}\right)\right)\right\}$$

(L.3.2-19)

Orde-3

Analog dengan orde-2, untuk orde-3

$$\frac{\langle n|[H',G]|1\rangle\langle 1|[H',G]|1'\rangle\langle 1'|[H',G]|n\rangle}{(K_n - K_1)(K_1 - K_{1'})} =$$

$$\frac{i\hbar\left(N_n N_1 N_{1'}\right)^2 \left(\frac{\mu_0 n S I_0 \sin\theta_a e^{i\omega t}}{4\pi}\right)^3 (-K_n K_1 K_{1'}) \left\{\frac{-e^{-i(P_1-P_n)r}}{r} - i(P_1 - P_n)\left(\ln r + \Sigma\left(\frac{(-i(P_1 - P_n)r)^n}{n \cdot n!}\right)\right)\right\}}{(K_n - K_1)(K_1 - K_{1'})} \cdot$$

$$\frac{\left\{\frac{-e^{-i(P_{1'}-P_1)r}}{r} - i(P_{1'} - P_1)\left(\ln r + \Sigma\left(\frac{(-i(P_{1'} - P_1)r)^n}{n \cdot n!}\right)\right)\right\}\left\{\frac{-e^{-i(P_n-P_{1'})r}}{r} - i(P_n - P_{1'})\left(\ln r + \Sigma\left(\frac{(-i(P_n - P_{1'})r)^n}{n \cdot n!}\right)\right)\right\}}{(K_{1'} - K_1 + \omega)(K_n - K_{1'} + \omega)(K_1 - K_n + \omega)}$$

(L.3.2-20)