

BAB III

DASAR TEORI

3.1. Teori Dasar Magnetik

3.1.1. Gaya Magnet

Telford, W.M., dkk., (1976), gaya magnet adalah gaya tarik menarik atau tolak menolak antara dua kutub magnet yang berlainan atau sama pada jarak r satu sama lain. Formulasinya sesuai dengan hukum Coulomb untuk kutub-kutub magnet yang dirumuskan:

$$F = \left(\frac{m_1 m_2}{\mu r^2} \right) \hat{r} \quad (3.1)$$

dimana:

- F : gaya yang bekerja pada kedua kutub
- m_1, m_2 : kutub-kutub magnet
- μ : permeabilitas medium
- r : jarak antara dua kutub
- \hat{r} : vektor satuan.

Bila antara dua kutub m_1 dan m_2 timbul kuat medan sebesar 1 emu, pada jarak 1 cm satu dengan yang lain (di ruang hampa atau di udara), gaya magnetik pada kedua kutub adalah 1 dyne. Permeabilitas medium sekitar kutub-kutub magnet tak berdimensi, dan bernilai satu untuk medium ruang hampa.

3.1.2. Kuat Medan Magnet

Telford, W.M., dkk., (1976), kuat medan magnet H adalah kuat medan pada suatu titik dalam ruang yang disebabkan oleh kutub magnet m yang berjarak r dari titik tersebut. Kuat medan magnet yang dialami titik tersebut dirumuskan :

$$H = \left(\frac{m}{\mu r^2} \right) \hat{r} \quad (3.2)$$

dimana :

H : kuat medan magnet, dimensi untuk H dalam emu adalah oersteds yang identik dengan dyne/satuan kutub

m : kutub magnetik di udara.

3.1.3. Momen Magnetik

Telford, W.M., dkk., (1976), besar momen magnetik M dari kutub-kutub magnetik yang selalu berpasangan yang terpisah sejauh l adalah :

$$M = m l \hat{r} \quad (3.3)$$

dimana :

M : momen magnetik, berarah vektor \hat{r} dari kutub negatif ke kutub positif

l : jarak antar kutub.

3.1.4. Intensitas Magnetik

Telford, W.M., dkk., (1976), suatu tubuh magnetik diletakkan dalam medan magnet akan termagnetisasi oleh induksi medan. Intensitas magnetisasi sesuai

dengan kuat dan arah medan yang menginduksi. Intensitas magnetik adalah momen magnetik per-satuan volume yang dirumuskan :

$$I = M / V \quad (3.4)$$

dimana :

I : intensitas magnetik

V : satuan volume benda.

3.1.5. Suseptibilitas Magnetik

Telford, W.M., dkk., (1976), suseptibilitas magnet (*k*) adalah derajat suatu materi untuk termagnetisasi oleh suatu medan magnet, dirumuskan :

$$k = H / I \quad \text{atau} \quad I = kH \quad (3.5)$$

dimana :

k : suseptibilitas magnetik materi.

Suseptibilitas suatu materi dipengaruhi oleh jumlah material magnetik yang dikandungnya. Nilai suseptibilitas semakin besar jika jumlah mineral magnetik yang dikandung oleh suatu material makin tinggi dan sebaliknya, jadi nilai suseptibilitas tidak konstan.

3.1.6. Magnetisasi Induksi

Telford, W.M., dkk., (1976), sebuah benda yang teletak dalam medan magnet intrinsik **H** , akan termagnetisasi dan menghasilkan medan magnet induksi

sebesar H' yang kemudian menambah medan magnet H . Medan magnet total benda sekarang didefinisikan sebagai induksi magnetik B , yang merupakan jumlah dari medan magnet intrinsik ditambah dengan medan magnet induksi.

$$B = H + H' = H + 4 \pi I$$

Dengan mengganti I dengan persamaan (3.5) diperoleh :

$$B = (1 + 4 \pi k) H \quad (3.5)$$

Sekarang dengan mendefinisikan perbandingan induksi B , dengan kuat medan H , sebagai permeabilitas magnetik μ , maka persamaan (3.6) menjadi :

$$B = (1 + 4 \pi k) H = \mu H \quad (3.7)$$

dimana :

B : induksi magnetik

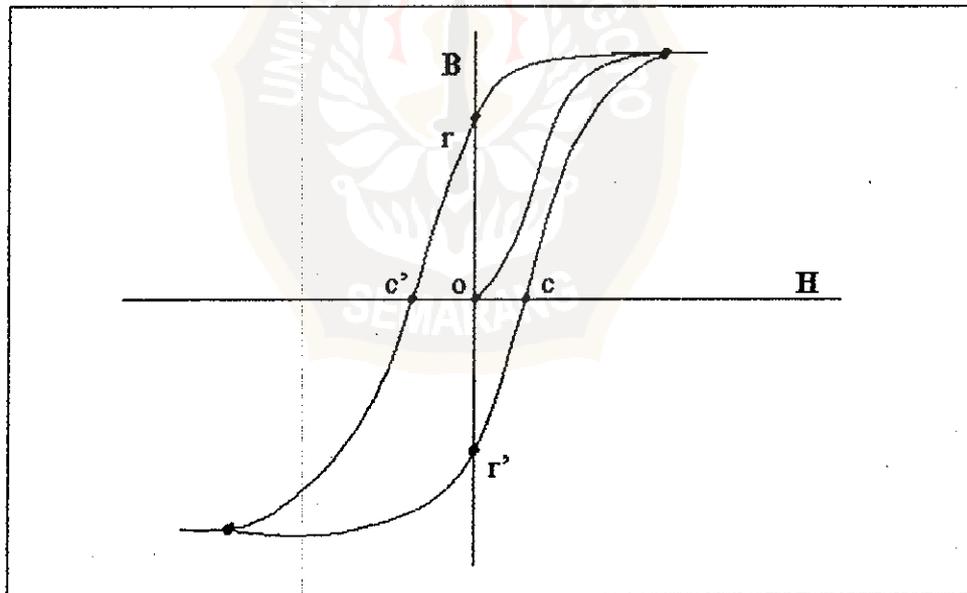
μ : $(1 + 4 \pi k)$ yang menyatakan hubungan antara suseptibilitas dengan permeabilitas magnetik.

Dalam sistim cgs, B dinyatakan dalam gauss dan permeabilitas μ , dinyatakan dalam gauss/oersted. Dengan demikian karena μ adalah besaran tanpa dimensi, akibatnya dimensi gauss sama dengan dimensi oersted. Berarti tidak ada perbedaan antara B dan H . Tetapi kenyataannya B dan H tidak sama, karena H adalah kuat medan magnet intrinsik, dan B adalah kuat medan magnet induksi ditambah dengan kuat medan magnet intrinsik itu sendiri.

3.1.7. Hubungan B dan H

Telford, W.M., dkk., (1976), jika suatu benda dimagnetisasi, didapatkan bentuk kurva *hysteresis loop* (lihat gambar 3.1), dimana B bertambah dengan bertambahnya nilai H sampai mendatar dan mencapai kondisi jenuh.

Pada saat pengurangan medan magnet, kurva B turun, tetapi tidak melewati jejak yang sama dengan waktu penambahan H, melainkan menyimpang dan suatu ketika bernilai positif saat $H = 0$, ini dikenal sebagai magnetisasi residu benda. Kemudian H dibalikkan dengan arah berlawanan dengan semula, induksi B menjadi nol sewaktu H bernilai negatif, ini dikenal sebagai *coercive force*. Bagian kurva yang lain (setengahnya) terlihat H masih negatif sampai jenuh pada ujung kiri bawah dan kemudian membalik ke nilai jenuh positif yang semula.



Gambar 3.1. Hysteresis Loop, Telford, W.M., dkk., (1976)

Keterangan : $or = or'$ = residual magnetisasi

$oc = oc'$ = coercive force

Sumbu-B (vertikal) yang terpotong oleh kurva menunjukkan jumlah sisa polarisasi induksi magnetik benda ketika medan magnet di tiadakan. Sedangkan sumbu-H (horisontal) menunjukkan pembalikan medan magnet yang dibutuhkan untuk menghilangkan induksi magnetik. Daerah di bawah kurva menunjukkan kehilangan per-siklus per-satuan volume material magnetik hasil hysteresis.

3.1.8. Satuan Magnetik

Telford, W.M., dkk, (1976), dalam mks yang dipakai secara umum tidak ada satuan magnetik yang betul-betul persis sama, misalnya :

$$H = \left(\frac{m}{\mu \mu_0 r^2} \right) \mathbf{r} \quad (3.8)$$

dan

$$B = \mu \mu_0 H \quad (3.9)$$

dimana H dalam *ampere-turn/m*, m dalam *weber*, B dalam *weber/m²* dan μ_0 dalam *henry/m*. Konversi H dalam B menghasilkan :

$$1 \text{ ampere-turn/m} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ oersted}$$

$$\text{dan } 1 \text{ weber/m}^2 = 10^4 \text{ gauss.}$$

Pada penerapannya dalam studi magnet bumi, sistim mks agak canggung digunakan karena orde besarnya tidak persis sama. Satuan baru intensitas magnetik atau kuat medan, adalah gamma (γ) yang didefinisikan sebagai :

$$1 \gamma = 10^{-5} \text{ oersted} = 10^{-5} \text{ gauss} = 10^{-9} \text{ weber/m}^2 = 10^{-9} \text{ tesla} = 1 \text{ nT}$$

Secara lengkap besaran magnet dan satuannya dapat dilihat pada lampiran – 1.

3.2. Teori Potensial Magnetik

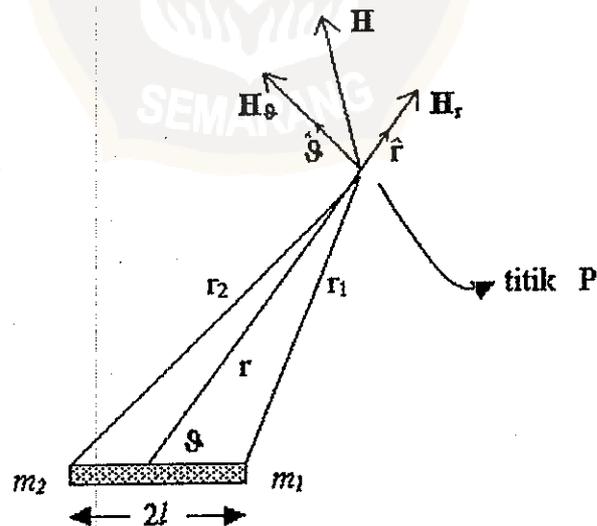
Telford, W.M., dkk, (1976), vektor medan magnet dapat diturunkan dari fungsi potensial skalar yang dirumuskan :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = - \nabla A(\mathbf{r}) \quad (3.10)$$

Potensial magnetik didefinisikan sebagai kerja yang dilakukan untuk memindahkan satu satuan kutub magnet terhadap medan magnet, hubungannya :

$$A(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \frac{m}{\mu r} \quad (3.11)$$

Secara praktis magnetik berkutub tunggal hanya kutub semu, kendatipun demikian secara matematis kutub tunggal itu ada. Dengan menganggap medium sekitarnya $\mu = 1$, maka potensial A berdasar gambar 3.2 dapat ditentukan.



Gambar 3.2. Medan Dipole Magnetik, (Telford, W.M., dkk, 1976)

Besar potensial magnetik A pada suatu titik P yang disebabkan oleh dua dipol listrik m_1 dan m_2 pada jarak tertentu (l), dirumuskan:

$$A = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}$$

$$A = m \left\{ \frac{1}{\sqrt{(r^2 + l^2 - 2rl \cos \vartheta)}} - \frac{1}{\sqrt{(r^2 + l^2 + 2rl \cos \vartheta)}} \right\}$$

(3.12)

dimana :

l : jarak antar dipol

r : jarak pusat dipol dengan titik yang ditinjau

ϑ : sudut horisontal dipol dengan jarak titik r .

Jika $r \gg l$, maka :

$$A \approx \frac{2ml \cos \vartheta}{r^2} = \frac{M \cos \vartheta}{r^2} \quad (3.13)$$

dari persamaan (3.13) didapat vektor medan magnetik, dengan komponen radial sepanjang r dan komponen angular terhadap normal r sebagai berikut :

$$H_r = -\frac{\partial A}{\partial r}$$

$$H_r = -m \left\{ \frac{r + l \cos \vartheta}{(r^2 + l^2 + 2rl \cos \vartheta)^{3/2}} - \frac{r - l \cos \vartheta}{(r^2 + l^2 - 2rl \cos \vartheta)^{3/2}} \right\} \quad (3.14)$$

$$H_\vartheta = - \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r}$$

$$H_\vartheta = m \left\{ \frac{l \sin \vartheta}{(r^2 + l^2 + 2rl \cos \vartheta)^{3/2}} - \frac{l \sin \vartheta}{(r^2 + l^2 - 2rl \cos \vartheta)^{3/2}} \right\} \quad (3.15)$$

dan bila $r \gg l$, maka persamaan diatas menjadi :

$$H_r \approx \frac{2M \cos \vartheta}{r^3} \quad (3.16)$$

$$H_\vartheta \approx \frac{M \sin \vartheta}{r^3} \quad (3.17)$$

Kasus khusus, untuk $\vartheta = 0$, maka persamaan (3.16) dan (3.17) menjadi :

$$H_r \approx \frac{2M}{(r^2 - l^2)^2} \quad (3.18)$$

$$H_\vartheta \approx 0$$

dan untuk $\vartheta = \pi/2$, maka :

$$H_r \approx 0$$

$$H_{\vartheta} \approx \frac{2M r}{(r^2 - l^2)^{3/2}} \quad (3.19)$$

dan bila $r \gg l$, bentuk diatas dapat disederhanakan menjadi :

$$H_r \approx \frac{2M}{r^3} \quad (\vartheta = 0) \quad (3.20)$$

$$H_{\vartheta} \approx \frac{M}{r^3} \quad (\vartheta = \pi/2) \quad (3.21)$$

Resultan total persamaan (3.17) dan (3.18) adalah :

$$H = \frac{M}{r^3} \sqrt{(4 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)} \quad (3.22)$$

sedangkan arah H_r adalah :

$$\tan \alpha = \frac{H_{\vartheta}}{H_r} = \frac{1}{2} \tan \vartheta \quad (3.23)$$

dalam notasi vektor hubungan antara persamaan (3.17) dan (3.18) adalah sebagai berikut :

$$\mathbf{H} = \left(\frac{2M \cos \vartheta}{r^3} \right) \hat{\mathbf{r}}_1 + \left(\frac{M \sin \vartheta}{r^3} \right) \hat{\mathbf{g}}_1 \quad (3.24)$$

dimana vektor satuan $\hat{\mathbf{r}}_1$ dan $\hat{\mathbf{g}}_1$ bertambah berlawanan arah jarum jam.

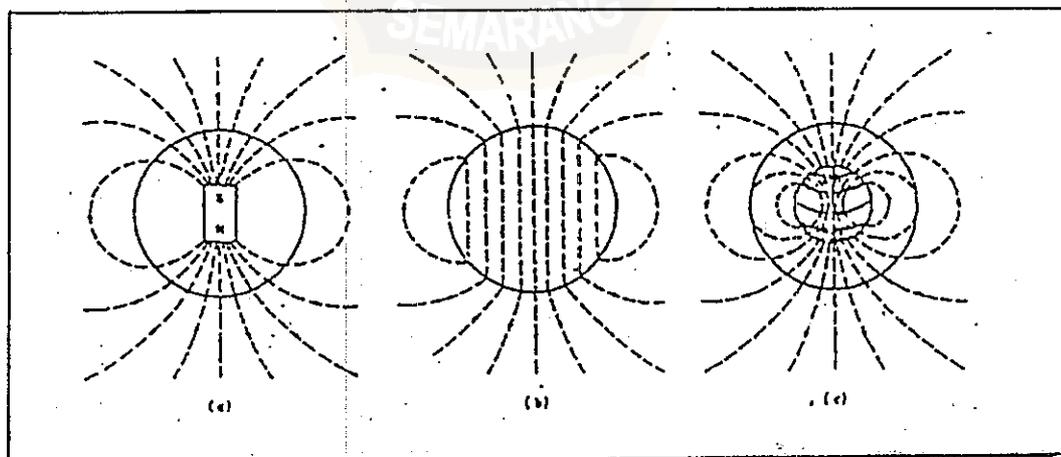
3.3. Teori Kemagnetan Bumi

3.3.1. Medan Magnet Bumi

Grand, F.S., dan West, (1965), menyatakan bahwa medan magnet bumi adalah medan magnet yang ditimbulkan oleh bumi yang bersumber dari dalam bumi itu sendiri. Beberapa teori tentang timbulnya medan magnet bumi antara lain :

1. Medan magnet bumi berasal dari sebuah magnet batang yang berada di dalam bumi.
2. Bumi adalah bahan homogen yang bersifat magnetik tereduksi oleh medan luar sehingga menimbulkan medan magnet bumi.
3. Medan magnet bumi berasal dari adanya arus listrik yang berputar di dalam inti bumi.

Dari ketiga teori diatas teori yang ketiga yang sering digunakan untuk menjelaskan medan magnet bumi. Gambaran ketiga teori tersebut dapat dilihat pada gambar 3.3 berikut :

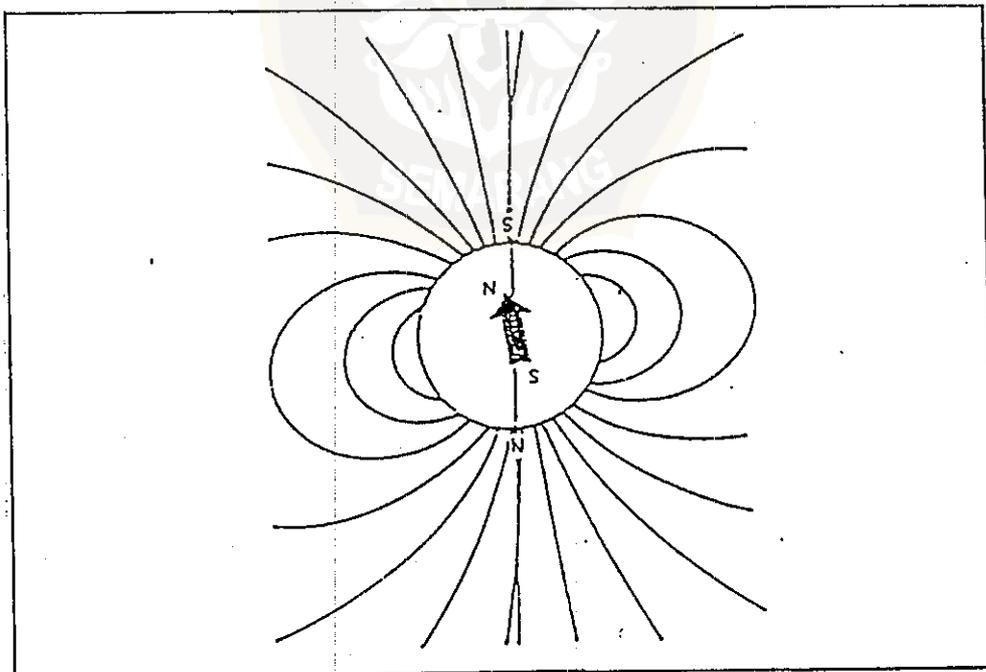


Gambar 3.3. Teori Kemungkinan Timbulnya Medan Magnet Bumi
(Grand, F.S., dan West, 1965)

Medan magnet bumi dibangkitkan oleh adanya arus listrik yang berputar di dalam inti bumi. Pusat medan tidak diketahui dengan pasti tetapi disebabkan oleh aliran fluida (inti cair) di dalam bumi.

Medan magnet atau flux adalah garis-garis gaya magnet di permukaan yang mengarah dari kutub Selatan menuju kutub Utara bumi seperti pada gambar 3.4. Flux magnetik berarah vertikal di daerah kutub Selatan dan kutub Utara, dan berarah horisontal pada daerah equator bumi.

Medan geomagnet teratur dapat diwakili secara formal sebagai medan dipol yang terletak di pusat bumi dengan arah momen magnetiknya menuju arah Selatan geografi bumi. Bumi merupakan dua kutub magnetik yang besar dan terletak di Utara dan Selatan dengan kedudukan yaitu 72°N , 102°W dan 68°S , 146°E . Pusat dwi kutub ini ± 750 mil dari pusat geografi bumi dan sumbunya bergeser sebesar 18° terhadap diameter kutub-kutub bumi.



Gambar 3.4. Garis Gaya Magnet Bumi, (Grand, F.S., dan West, 1965)

Telford, W.M., dkk., (1976), menyatakan bahwa sumber medan magnet bumi yang tercatat pada alat pada penyelidikan geomagnet merupakan komponen yang berasal dari :

1. Medan magnet utama, yang tidak konstan terhadap waktu, dan variasinya relatif kecil.
2. Medan magnet luar, lebih kecil dari medan magnet utama dan berubah dari waktu ke waktu lebih cepat dibanding medan utama secara radom oleh penyebab dari luar bumi.
3. Variasi medan magnet utama (anomali), variasinya relatif tetap dan jauh lebih kecil dibanding dengan medan magnet utama. Anomali ini disebabkan oleh gangguan lokal yang ada pada kerak bumi, dan kelainan tersebut justru yang menjadi obyek utama dalam penyelidikan geomagnet.

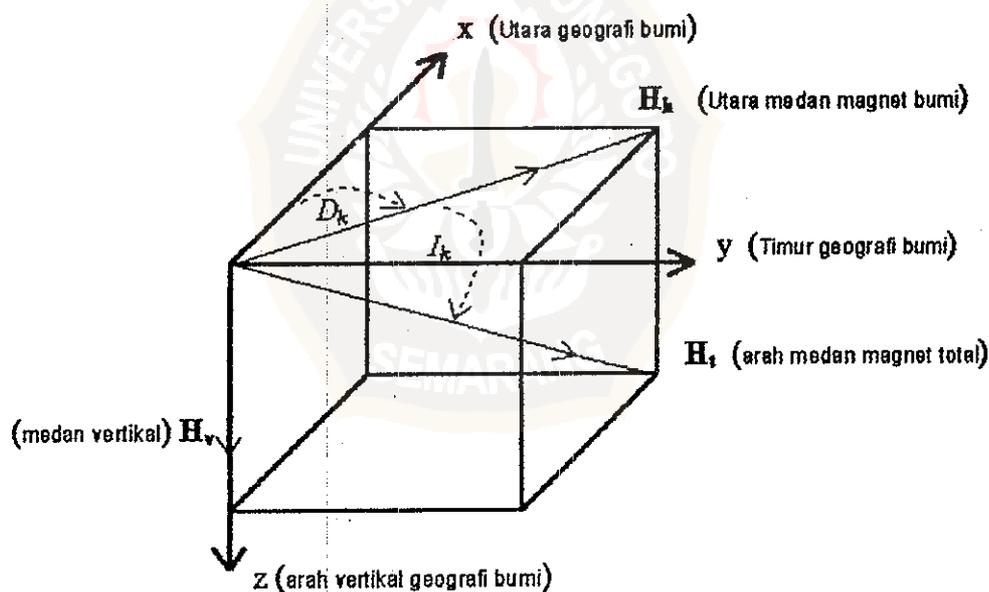
3.3.1.1. Medan Magnet Utama

Salah satu sifat bumi adalah mempunyai medan magnet yang disebut medan magnet utama bumi (*main geomagnetic field*) yang bervariasi terhadap waktu dan posisi dalam bentuk yang kompleks di permukaan bumi, sehingga untuk menyeragamkan nilai-nilai medan magnet utama tersebut dibuat standart nilai yang dinamakan *International Geomagnetic Reference Field (IGRF)* yang diperbaharui setiap lima tahun sekali, (Parkinson, W.D., 1983).

Secara teoritis, medan magnet utama disebabkan oleh sumber dari dalam bumi, magnetisasi permanen oleh aliran arus listrik, atau arus listrik keluar dan masuk bumi. Beberapa alasan menganggap inti bumi tersusun oleh besi dan nikel, yang keduanya dikenal sebagai konduktor yang baik.

Suatu teori yaitu teori dinamo menyatakan sumber magnet bumi adalah dinamo berkonduktivitas tinggi dan bergerak dengan mekanisme kompleks, seperti arus listrik, yang bisa jadi disebabkan oleh unsur atau senyawa kimia dan variasi termal beserta alirannya. Uji laboratorium memperlihatkan bahwa pembangkit dinamo dapat menerangkan dengan jelas adanya variasi sekular yang dikenal sebagai kejadian kemagnetan bumi.

Elemen-elemen medan magnet bumi adalah meliputi medan magnet total (H_t), medan magnet horisontal (H_h), dan medan magnet vertikal (H_v). Hubungan antara komponen medan magnet total, vertikal dan horisontal dengan sudut inklinasi dan sudut deklinasi dilukiskan menurut gambar 3.5 berikut :



Gambar 3.5. Komponen Medan Magnet Bumi (Telford, W.M., dkk., 1982)

Dari gambar 3.5 diatas dapat diterangkan bahwa :

$$H_t^2 = H_h^2 + H_v^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.25)$$

dengan :

$$H_x = H_t \sin I_k$$

$$H_h = H_t \cos I_k$$

$$x = H_h \cos D_k$$

$$y = H_h \sin D_k$$

$$\tan D_k = y / x$$

$$\tan I_k = z / H_h$$

dimana :

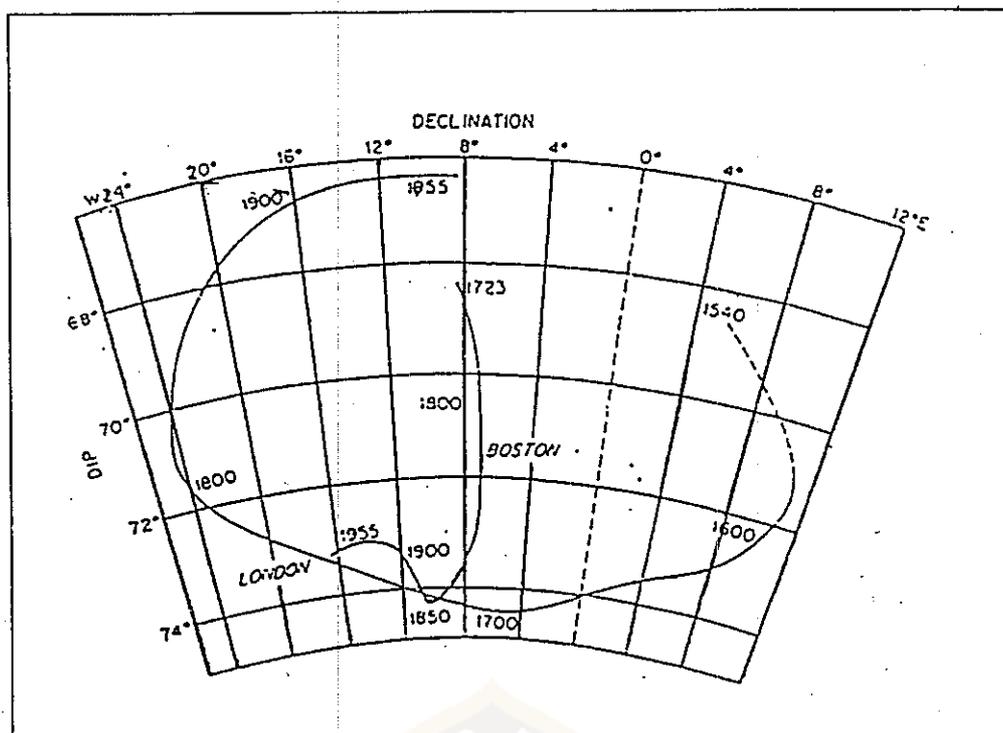
I_k : sudut inklinasi, sudut antara H_t dengan H_h

D_k : sudut deklinasi, sudut antara H_h dengan arah Utara geografi bumi.

Garis-garis deklinasi, inklinasi, intensitas horisontal yang sama, jika diplot akan menghasilkan peta isomagnetik atau *isomagnetic charts* yang menunjukkan variasi medan magnet di permukaan bumi. Medan magnet ternyata tidak dipengaruhi oleh keadaan geografi di permukaan bumi. Ini menandakan bahwa sumber magnet terletak jauh di dalam bumi atau sangat jauh di luar bumi.

Berbagai peta dunia telah disusun yang menggambarkan tempat-tempat yang memiliki deklinasi yang sama (*peta isogonik*), inklinasi yang sama (*peta isoklinik*), dan medan magnet total (H_t), horisontal (H_h), atau vertikal (H_v) yang sama (*peta isodinamik*), lihat lampiran – 2.

Nilai H_t pada daerah kutub Utara dan Selatan magnetik berturut-turut 0,6 dan 0,7 oersted, dengan nilai minimum sekitar 0,25 oersted terjadi di daerah Antofagasta Pasifik sebelah Utara Chili. Garis inklinasi sama dengan nol (dimana $H_v = 0$) terletak tak pernah lebih dari 15° dari equator, simpangan terbesar ke Selatan dan sebelah Timur Pasifik, di Afrika dan Asia, sedikit ke Utara equator. Garis-garis kontur deklinasi yang sama memberikan keterangan secara lengkap dan rumit, variasi inklinasi dan deklinasi terhadap waktu (lihat gambar 3.6).



Gambar 3.6. Variasi Inklinasi dan Deklinasi Magnetik Terhadap Waktu (Telford, W.M., dkk., 1982).

Seperti yang terlihat pada gambar 3.6 diatas, inklinasi telah berubah sekitar 10° (75° ke 65°) dan deklinasi sekitar 35° (10° BT sampai 25° BB dan kembali ke 10° BB) selama periode tertentu. Meskipun variasinya lambat dalam satu siklus, namun kutub magnet berubah dengan cepat (skala waktu geologi) sekitar koordinat kutub geografi.

Dugaan pengembaraan medan diungkapkan secara lengkap oleh rekaman unsur-unsur magnetik. Dalam banyak kasus variasi sekular ditampilkan secara regional di seluruh dunia. Walaupun sumber tidak pasti, namun selalu terletak pada inti bumi, yang dimungkinkan berhubungan dengan perubahan arus konveksi dalam inti bumi, dan adanya koppel serta rotasi inti dengan cepat dalam matel, (Telford, W.M., dkk., 1982).

3.3.1.2. Medan Magnet Luar

Telford, W.M., dkk., (1982), medan magnet luar lebih kecil dari medan magnet utama yang hanya $\pm 1\%$ dan berubah dari waktu ke waktu lebih cepat secara radom oleh penyebab dari luar bumi dan berhubungan dengan arus listrik yang mengalir dalam lapisan terionisasi atsmosfera luar (*ionosfera*). Pengaruh dari luar tersebut meliputi:

1. Siklus badai matahari selama 11 tahun
2. Variasi harian periode 24 jam dan range 30y, bervariasi sesuai ketinggian dan musim yang dikontrol oleh aktivitas matahari dan arus listrik pada ionosfera
3. Variasi bulanan periode 25 hari dan ordenya sekitar 2y. Variasi bulanan merupakan gabungan dari aktivitas-aktivitas yang ada di atsmosfera seperti pasang surut oleh pengaruh bulan
4. Badai magnetik yang dapat terjadi sewaktu-waktu dengan amplitudo lebih dari 1000y yang disebabkan oleh aktivitas bintik matahari. Partikel surya bermuatan yang dipancarkan oleh matahari yang sampai ke bumi mempengaruhi keadaan muatan atsmosfera bumi. Gangguan ini bersifat transien sehingga amplitudonya terlalu besar. Badai magnetik kadang-kadang terjadi dalam siklus 27 hari tergantung peristiwa yang terjadi di matahari.

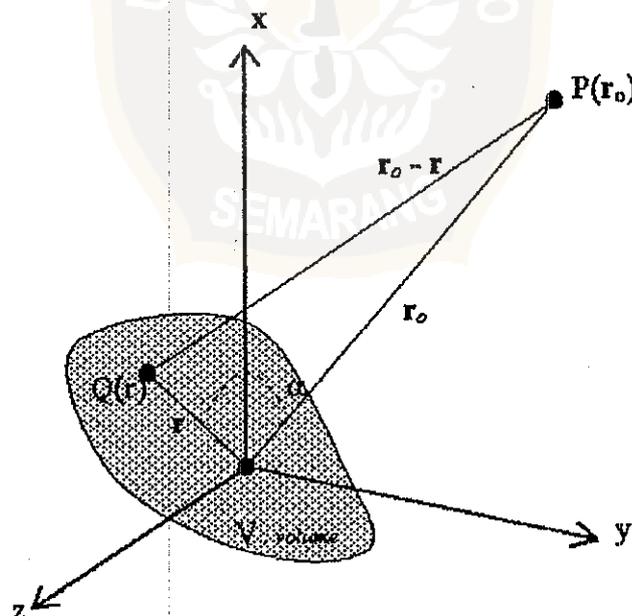
3.3.1.3. Anomali Magnetik

Anomali magnetik ditimbulkan oleh perbedaan komposisi mineral-mineral yang bersifat magnetik yang berada di dekat permukaan bumi. Sifat anomali magnetik adalah relatif konstan terhadap waktu dan tempat dan jauh lebih kecil

dari medan utama. Pada umumnya anomali magnetik ini bersifat lokal, karena sumbernya terletak tidak terlalu dalam. Anomali magnetik ini mengganggu medan magnet bumi yang besar kecilnya gangguan itu tergantung oleh komposisi mineral batuan setempat. Anomali magnetik secara garis besar disebabkan oleh magnetisasi remanen dan magnetisasi induksi. Magnetisasi remanen sesuai dengan sifat logam tubuh itu sendiri, sedangkan magnetisasi induksi disebabkan oleh medan magnet utama, (Grand, F.S, dan West, 1965).

Dianggap benda mempunyai distribusi dipole kontinu yang menghasilkan vektor dipol per-satuan volume sebagai $M(r)$. Dari persamaan (3.13) potensial skalar pada suatu titik pada jarak tertentu dari dipole, memberikan hubungan :

$$A = \frac{M \cos \vartheta}{r^2} = -M \cdot \nabla (1/r) \quad (3.26)$$



Gambar 3.7. Anomali Magnetik Umum, (Telford, W.M., dkk., 1976)

dengan demikian potensial keseluruhan menjadi :

$$A(\mathbf{r}_o) = \int_v \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}|} \right) dV \quad (3.27)$$

dimana sistem koordinatnya adalah seperti gambar 3.7 diatas. Jika \mathbf{M} konstan dan berarah tetap dengan $\alpha_i = li + mj + nk$, maka diperoleh :

$$\mathbf{M} \cdot \nabla = M \frac{\partial}{\partial x} = M \left(l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.28)$$

dan

$$A(\mathbf{r}_o) = - M \frac{\partial}{\partial x} \int_v \left(\frac{dV}{|\mathbf{r}_o + \mathbf{r}|} \right) \quad (3.29)$$

Resultan anomali medan magnet benda didapat dari substitusi persamaan (3.28) ke persamaan (3.10), sehingga diperoleh :

$$\Delta H(\mathbf{r}_o) = \nabla \int_v \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}|} \right) dV \quad (3.30)$$

Bila H_t medan magnet total bumi di tempat tersebut, maka nilai medan magnet total merupakan jumlah dari medan magnet rata-rata suatu tempat dengan medan magnet anomali, dirumuskan :

$$H_t = H_o + \Delta H (r_o) \quad (3.31)$$

dimana :

H_t : medan magnet total dalam pengukuran

H_o : medan magnet rata-rata di suatu tempat

$\Delta H (r_o)$: medan magnet anomali

H_o dan $\Delta H (r_o)$ tidak searah, kecuali jika nilai $\Delta H (r_o)$ jauh lebih kecil dari H_o atau benda tidak mempunyai magnetisasi residual pada tempat tersebut, dalam kondisi seperti ini H_t dan H_o dianggap searah. Dalam kondisi umum, dimana nilai $\Delta H (r_o)$ dan H_o berbeda (sekitar 25% atau lebih) dan $M(r)$ berbeda arah dengan H_o , maka komponen $\Delta H (r_o)$ pada arah medan H_o menjadi :

$$\begin{aligned} \Delta H_{\beta} (r_o) &= -\beta_1 \cdot \nabla A (r_o) = -\frac{\partial A (r_o)}{\partial \beta} \\ &= M \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \int_v \left(\frac{dV}{|r_o - r|} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

dimana β_1 menunjukkan arah H_o . Jika momen magnetik benda tak mempunyai perbedaan orientasi karena efek residual, maka magnetisasi hanya akan dipengaruhi oleh induksi H_o pada arah β_1 . Dengan menggunakan persamaan (3.4) dan persamaan (3.5) maka persamaan (3.32) menjadi :

$$\Delta H_{\beta}(r_o) = M \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \int_v \left(\frac{dV}{|r_o - r|} \right) = k H_o \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \int_v \left(\frac{dV}{|r_o - r|} \right) \quad (3.33)$$

Seperti pada gravitasi, potensial logaritma untuk menggambarkan dua dimensi dapat didefinisikan, sehingga persamaan (3.32) menjadi :

$$\Delta H_{\beta}(r_o) = 2 M \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \int_s (\log |r_o - r|) dS \quad (3.34)$$

atau

$$\Delta H_{\beta}(r_o) = 2 k H_o \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \int_s (\log |r_o - r|) dS \quad (3.35)$$

dimana : S adalah penampang benda, (Telford, W.M., dkk, 1976).

Terlepas dari efek benda magnetik yang kadang-kadang terjadi, variasi medan magnet mempunyai banyak penafsiran dalam eksplorasi. Tanpa variasi H , atau H_v ($\approx 7 \gamma/\text{mile}$) diperlukan koreksi data medan, kecuali survai pada daerah yang luas, misalnya *airborne survey*. Perubahan penting terjadi pada medan utama sebagai variasi mineral magnetik yang dikandung batuan dekat permukaan. Anomali kadang-kadang menambah cukup besar pada medan utama.

Berdasarkan sifat medan magnet bumi dan sifat kemagnetan bahan pembentuk batuan, bentuk medan magnet anomali yang ditimbulkan oleh penyebabnya tergantung pada :

1. Inklinasi medan magnet di sekitar benda penyebab (daerah survai)
2. Bentuk geometri benda penyebab anomali

3. Kecenderungan arah dipol-dipol magnet di dalam benda penyebab
4. Orientasi arah dipol-dipol magnet benda penyebab terhadap arah medan bumi, (Grand, F.S., dan West, 1965).

3.3.2. Hubungan Poisson

Hubungan Poisson, menunjukkan hubungan antara potensial gaya berat U , dengan potensial magnetik A , dari suatu tubuh. Jika densitas σ , dan momen dipolnya konstan (Garland, 1951, opcite Telford, W.M., dkk., 1976), menyatakan hubungan tersebut dalam bentuk :

$$A = -\frac{I}{\gamma\sigma} \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{I}{\gamma\sigma} \nabla U \cdot \alpha_1 = -\frac{I}{\gamma\sigma} g_\alpha \quad (3.36)$$

dimana :

- γ : konstanta gravitasi
- σ : densitas benda
- I : intensitas magnetik
- α : arah vektor gravitasi yang berarah α_1
- g_α : komponen gravitasi

Suku-suku potensial ditulis :

$$H_\beta(\mathbf{r}) = \text{komponen } \mathbf{H}(\mathbf{r}) \text{ dalam arah } \beta_1$$

$$= -\frac{\partial A}{\partial \beta} = \frac{I}{\gamma\sigma} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \beta} \quad (3.37)$$

Untuk kondisi krus pada sumbu koordinat tiga dimensi x,y,z polarisasi arah vertikal (searah dengan sumbu- z), dapat dituliskan :

$$H_v = \frac{g}{\gamma \sigma} \frac{\partial g_z}{\partial z} \quad (3.38)$$

polarisasi ke arah horisontal adalah :

$$H_{hx} = \frac{g}{\gamma \sigma} \frac{\partial g_x}{\partial x} \quad (3.39)$$

$$H_{hy} = \frac{g}{\gamma \sigma} \frac{\partial g_y}{\partial y} \quad (3.40)$$

dimana :

H_v : komponen vertikal medan magnet searah sumbu- z

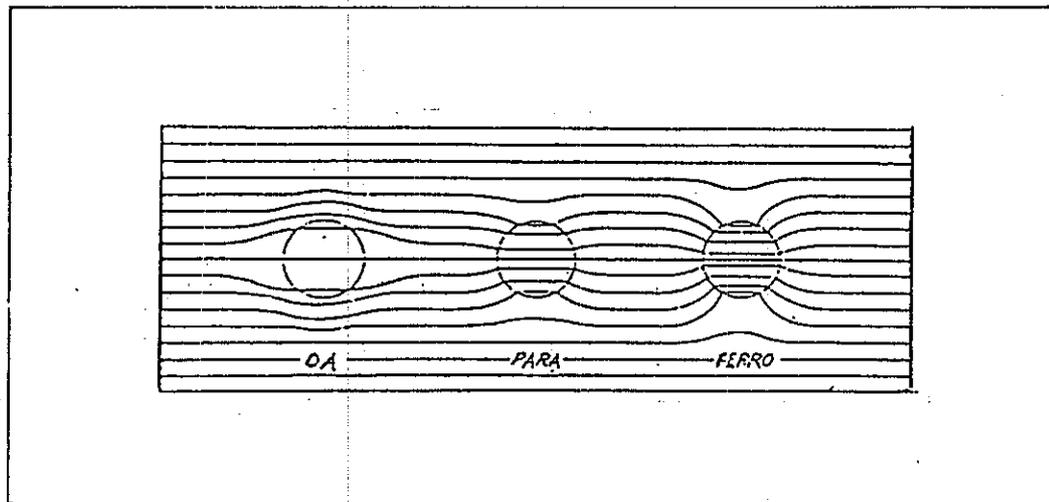
H_{hx} : komponen horisontal medan magnet searah sumbu- x

H_{hy} : komponen horisontal medan magnet searah sumbu- y

Hubungan ini sangat penting, sebab medan gaya berat secara umum dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah magnetik, (Telford, W.M., dkk., 1976).

3.3.4. Sifat Magnetik Batuan Mineral

Gie, T.I., (1991), menyatakan bahwa sifat magnetik batuan berdasar jumlah mineral magnetik yang dikandungnya dibagi menjadi tiga macam yaitu : diamagnetik, paramagnetik, dan ferromagnetik. Pengaruh ketiga bahan tersebut terhadap medan magnet diilustrasikan seperti pada gambar 3.8 berikut :



Gambar 3.8. Pengaruh Material Magnetik Terhadap Medan Magnet (Gie, T.L, 1991)

1. Diamagnetik

Diamagnetik mempunyai sesseptibilitas negatif, berarti intensitas induksi magnetik yang disebabkan oleh medan H berlawanan dengan arah dengan medan H' . Dalam batuan diamagnetik atom-atom pembentuk batuan mempunyai kulit elektron yang telah jenuh yaitu tiap elektron berpasangan dan mempunyai spin yang berlawanan dalam setiap pasangan. Sehingga jika ada medan magnet luar H , elektron tersebut menghasilkan medan lemah H' yang berlawanan arah dan melawan medan magnet luar.

Semua material secara umum adalah diamagnetik karena gerak orbit elektron dalam substansinya berlawanan sebagaimana medan H dengan H' . Diamagnetik terlihat hanya jika momen magnet atom bersihnya sama dengan nol, dengan demikian dapat dikatakan material magnetik tadi memiliki suseptibilitas magnetik k negatif dan kecil, dan tidak tergantung pada nilai H' . Contoh bahan diamagnetik adalah : grafit, gips, marble, kuarsa, dan garam.

2. Paramagnetik

Bagian dalam bahan paramagnetik terdapat kulit elektron terluar yang belum jenuh yaitu elektron yang spinnya tidak berpasangan dan mengarah pada arah spin yang sama. Jika ada medan magnetik luar H , spin tersebut akan membuat putaran menghasilkan medan magnet H yang mengarah searah dengan medan magnet luar sehingga memperkuatnya. Tetapi momen magnetik yang terbentuk terorientasi acak oleh *agitasi thermal*.

Semua material non-diamagnetik adalah paramagnetik, disini suseptibilitas magnetik bernilai negatif. Substansi paramagnetik masing-masing atom atau molekul mempunyai suatu momen magnet bersih pada medan luar sama dengan nol, oleh karena itu material tersebut dapat dikatakan mempunyai suseptibilitas k positif dan lebih besar dari satu dan tergantung pada temperatur. Contoh bahan paramagnetik adalah : piroksen, olivin, biotit, dan amfibolit.

3. Ferromagnetik

Pada bahan ferromagnetik terdapat banyak kulit elektron yang hanya diisi oleh satu elektron, sehingga mudah terinduksi oleh medan luar. Selain itu adanya kelompok-kelompok bahan berspin yang berbentuk dipol-dipol magnet yang mempunyai arah searah, akan saling memperkuat. Sifat ferromagnetik memiliki nilai suseptibilitas magnetik sangat tinggi dan besarnya dipengaruhi temperatur, sehingga jarang ditemukan di alam. Ferromagnetik terdiri dari dua jenis yaitu :

a. Ferrimagnetik

Mempunyai nilai suseptibilitas sangat tinggi dan ketergantungannya terhadap temperatur sangat kompleks. Contoh : magnetite,

titanomagnetite, ilmenite, oksida besi, dan titanium. Secara praktis semua mineral magnetik adalah ferrimagnetik.

b. Antiferromagnetik

Adalah material yang mempunyai suseptibilitas seperti material paramagnetik tetapi nilainya bertambah dengan naiknya temperatur.

Contoh bahan antiferromagnetik adalah : hematit.

3.3.5. Magnetisasi Residual

Telford, W.M., dkk., (1976), meskipun magnetisasi batuan tergantung kuat medan magnet utama dan kandungan mineral magnetik, namun kenyataannya magnetisasi residual sering menyebabkan batuan termagnetisasi secara total (kuat dan arah medan). Peristiwa magnetisasi residual ini disebut dengan Magnetisasi Remanen Normal (NRM) yang disebabkan oleh :

1. Magnetisasi Remanen Chemical (CRM)

Terjadi saat perubahan butir magnetik atau perubahan dari suatu bentuk ke bentuk lain sebagai hasil proses kimiawi pada temperatur hampir konstan di bawah titik Curie dan sering terjadi pada batuan sedimen dan metamorf.

2. Magnetisasi Detrital (DRM)

Terjadi secara perlahan selama peristiwa pengendapan butir-butir partikel yang berada di bawah pengaruh medan magnet.

3. Magnetisasi Remanen Isotermal (IRM)

Magnetisasi sisa setelah hilangnya medan luar (kurva *hysteresis loop*). Medan magnet utama bumi tidak cukup kuat untuk menghasilkan IRM, kecuali oleh sambaran kilat pada daerah yang sempit.

4. Magnetisasi Termoremanen (TRM)

Tercipta selama pendinginan material magnetik dari titik Curie dan dibawah pengaruh medan magnet luar. Umumnya dapat menghasilkan medan magnet yang berlawanan dengan medan magnet luar. Mekanisme ini adalah proses magnetisasi utama pada batuan beku.

5. Magnetik Remanen Viskos (VRM)

Proses magnetik yang selalu terbuka terhadap medan luar dan penambahan magnetiknya merupakan fungsi waktu secara logaritma.

3.3.6. Magnetisasi Permanen atau Remanen

Gie, T.I., (1991), magnetisasi permanen tergantung pada *metallurgical properties* dan temperatur, mekanisme dan sejarah batuan.

Magnetisasi remanen sangat penting dalam pemetaan dan interpretasi juga pada medan *paleomagnetik*, penyelidikan arkeologi dan *arkeomagnetik*. Magnetisasi remanen bersifat setatis dan bebas dari medan luar. Magnetisasi remanen yang tinggi merupakan efek pemanasan baik secara alaminya maupun oleh manusia seperti masing-masing pada batuan beku dan bata merah.

Orientasi magnetisasi remanen bisa searah atau berlawanan arah dengan medan magnet bumi tergantung pada saat pembentukannya.

3.3.7. Suseptibilitas Magnetik Batuan dan Mineral

Telford, W.M., dkk., (1976), menyatakan bahwa suseptibilitas magnetik adalah variabel yang sangat penting dalam penyelidikan geomagnet. Pengukuran suseptibilitas tidak umum dilakukan dilapangan secara langsung, walaupun telah

ada instrumen-instrumen untuk keperluan ini, tetapi hanya dapat digunakan pada singkapan atau sampel batuan. Pengukuran tersebut tidak memberikan suseptibilitas suatu formasi secara tepat, meskipun tidak jauh nilai pengukuran yang diperoleh. Nilai suseptibilitas batuan dan mineral dapat dilihat pada lampiran – 3.

3.4. Teori Umum Optimasi

Optimasi merupakan proses efisiensi dalam mencari kondisi yang memaksimumkan atau meminimumkan nilai suatu fungsi, dengan dasar bahwa mencari nilai maksimum suatu fungsi sama dengan mencari nilai minimum dari negatif fungsi tersebut, (Rao, S.S., 1978).

3.4.1. Formulasi Masalah Optimasi

Program matematik yang digunakan di dalam masalah optimasi adalah menentukan \bar{x} yang meminimumkan atau memaksimumkan suatu fungsi $f(x)$, terhadap konstrainnya, dimana :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n \quad (3.41)$$

Macam konstrain yang dimiliki oleh persamaan $f(x)$ yang merupakan fungsi obyektif adalah : konstrain ketaksamaan (g_i) dan konstrain kesamaan (e_j) yang dalam bentuk matematis dirumuskan :

$$g_i(\bar{x}) \leq 0, \text{ dimana } i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.42)$$

dan

$$e_j(\bar{x}) = 0, \text{ dimana } j = m + 1, m + 2, \dots, p \quad (3.43)$$

dimana :

$f(x)$: fungsi obyektif

g_i : konstrain ketaksamaan

e_j : konstrain kesamaan

Bila konstrain tidak ada ($p = 0$), maka masalah diatas dikenal sebagai masalah optimasi tanpa konstrain. Vektor $\bar{x} \in R^n$ yang memenuhi persamaan (3.41) dan persamaan (3.42) disebut *fisibel*, sedang yang tidak memenuhi persamaan tersebut disebut *infisibel*. Solusi fisibel yang mengoptimumkan fungsi obyektif disebut solusi optimal, (Rao, S.S., 1978).

3.4.2. Program Non Linear

Apabila terdapat hubungan suatu variabel tak bebas z dengan suatu kumpulan parameter x berjumlah n yang tidak diketahui sebagai berikut :

$$V = \phi(z, x) \quad (3.44)$$

Jika ingin diketahui nilai parameter-parameter tersebut yang cocok dengan jumlah m data yakni sejumlah m nilai z yang berbeda, syarat perlu dalam hal ini umumnya adalah $m \geq n$. Akan tetapi apabila data yang digunakan mengandung

banyak kesalahan atau dengan kata lain hubungan antara V , Z dan x belum menentu sebagai mana yang dirumuskan, maka syarat perlu yang digunakan adalah $m \geq n^2$, (Dixon, L.C.W., 1972).

Dalam menyelesaikan permasalahan tersebut di atas, umumnya dibentuk suatu fungsi obyektif $f(x)$. Secara umum fungsi obyektif ditulis sebagai berikut :

$$f(x) = \sum_{j=1}^m g_j^2(x) \quad (3.45)$$

Pada titik optimum syarat perlu $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, dimana $i = 1, 2, 3, \dots, n$

akan tetapi $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2 g_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$, dengan menggunakan deret Taylor yang

diperluas diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f(x + \varepsilon)}{\partial x_i} = g_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} + \varepsilon_k \frac{\partial g_j}{\partial x_k} \frac{\partial g_j}{\partial x_i} + \varepsilon_k g_j \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_i \partial x_k} \quad (3.46)$$

Jika $(x + \varepsilon)$ adalah optimum dan rumusan antara variabel dan parameternya benar, maka suku ke tiga persamaan (3.46) merupakan fungsi $\theta(\varepsilon^2)$. Jika matriks P

dengan elemen $P_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ dan $\frac{\partial f(x + \varepsilon)}{\partial x_i} = 0$, maka persamaan (3.46)

merupakan perkiraan dari variabel ε yang dalam bentuk matriks dinotasikan :

$$\varepsilon = -(P^T P)^{-1} P^T g \quad (3.47)$$

Perkiraan bentuk persamaan (3.47) dikenal dengan perkiraan Gauss-Newton. Jika $m \geq n$ maka bentuk matriks $P^T P$ adalah bujur sangkar dan inversnya ada hanya bila $m \geq n$. Perkiraan pada persamaan (3.47) dalam penyelesaiannya cukup hanya dengan menggunakan turunan pertama, (Dixon, L.C.W., 1972).

Dalam permasalahan estimasi parameter-parameter non-linear dengan kuadrat terkecil, Marquart, D.W., (1963), mengembangkan rumusan permasalahan untuk mencari solusi yang lebih baik, sebagai berikut :

Jika model yang akan dicocokkan dengan data adalah :

$$\varepsilon(y) = f(x_1, x_2, \dots, x_m; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(x, \alpha) \quad (3.48)$$

dimana :

x_1, x_2, \dots, x_m adalah variabel bebas

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ adalah nilai populasi dari sejumlah n parameter

$\varepsilon(y)$ adalah nilai yang diharapkan dari variabel tak bebas y

dan apabila titik-titik data dinyatakan dalam bentuk :

$$(Y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi}), \text{ dimana } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.49)$$

maka permasalahan yang dihadapi adalah menghitung estimasi dari parameter-parameter yang akan meminimumkan :

$$\phi = \sum_{i=1}^n [Y_i - \hat{Y}_i]^2 = \|Y - \hat{Y}\|^2 \quad (3.50)$$

dimana :

Y adalah nilai y pada titik data ke- i

\hat{Y} adalah nilai y yang diperkirakan oleh persamaan (3.48) pada titik data ke- i .

Berdasarkan metode Gauss-Newton persamaan (3.48) dapat diuraikan dalam bentuk deret Taylor dengan mengabaikan suku berorde tinggi sehingga diperoleh :

$$\langle Y(x_i, b + \varepsilon_T) \rangle = f(x_i, b) + \sum_{j=1}^k \left[\frac{\partial f_i}{\partial b_j} \right] (\varepsilon_T)_j \quad (3.51)$$

$$\langle Y \rangle = f_0 + P \varepsilon_T \quad (3.52)$$

dimana :

b adalah merupakan estimasi kuadrat terkecil dari α

ε_T adalah vektor koreksi terhadap α hasil uraian deret Taylor

Notasi $\langle \rangle$ menunjukkan perkiraan yang dibuat berdasarkan model yang telah dilinearkan.

Maka bentuk persamaan (3.50) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\langle \phi \rangle = \sum_{i=1}^n [Y_i - \langle Y_i \rangle]^2 \quad (3.53)$$

Vektor koreksi ε_T dapat diperoleh dengan menggunakan syarat perlu $\frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial \varepsilon_j} = 0$, yaitu dengan menyelesaikan :

$$A \varepsilon_T = g \quad (3.54)$$

dimana :

$$A^{k \times k} = P^T P$$

$$p^{n \times k} = \frac{\partial f_i}{\partial b_j}, \text{ dimana } i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ dan } j = 1, 2, 3, \dots, k$$

$$g = \sum_{i=1}^n (Y_i - f_i) P = P^T (Y - f_o)$$

Sifat-sifat relevan dari solusi vektor koreksi ε_T adalah invarian dibawah transformasi linear dari ruang- b . Sifat dari metode gradien adalah tidak *scale invariant*, sehingga perlu menskala ruang- b . Untuk memenuhi hal tersebut maka ruang- b di skala dalam satuan standart deviasi dari turunan $\frac{\partial f_i}{\partial b_j}$, untuk titik-titik $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Karena pada umumnya turunan tergantung pada b maka skala ini digunakan untuk meningkatkan aspek numerik dari prosedur-prosedur perhitungan.

Dalam hal ini didefinisikan matriks terskala A^* , dan vektor terskala g^* :

$$A^* \varepsilon_T^* = g^* \quad (3.55)$$

$$\varepsilon_j = \frac{\varepsilon_j}{\sqrt{a_{jj}}} \quad (3.56)$$

Sehingga dalam iterasi ke- r akan dibentuk :

$$(A^{*(r)} + \lambda^* I) \varepsilon^{*(r)} = g^{*(r)} \quad (3.57)$$

Persamaan (3.57) ketika λ menuju ketakhingga maka $\varepsilon_0 \rightarrow \frac{g}{\lambda}$, dimana ε_0 dan g sebanding dalam limit, sehingga sudut keduanya menuju nol. Sebaliknya bila $\lambda = 0$, maka vektor ε_0 dan g membentuk sudut γ dengan $0 \leq \gamma \leq \pi/2$. Persamaan (3.57) digunakan untuk mendapatkan vektor koreksi ε^* sehingga parameter baru menjadi :

$$b^{r+1} = b^r + \varepsilon^r \quad (3.58)$$

yang akan menghasilkan jumlah kuadrat ϕ^{r+1} baru. Nilai λ sedemikianrupa sehingga memenuhi kriteria $\phi^{r+1} < \phi^r$.

Dengan demikian dipilih nilai λ yang kecil jika kondisinya sedemikian sehingga metode Gauss-Newton dapat mencapai konvergensi yang baik, yaitu apabila sudah berada di daerah konvergensi. Sedangkan pemilihan nilai λ yang besar dilakukan jika masih berada di luar konvergensi, (Marquart, D.W., 1963).

Powell, M.J.D., (1964), menggunakan metode optimasi dimana dalam prosedurnya tidak menggunakan turunan fungsi dalam mencari vektor koreksi untuk setiap parameter-parameter fungsi yang diberikan. Metode ini merupakan metode interatif dan dimulai dengan n arah $\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \dots, \alpha(n)$ yang bebas linear, yang seluruhnya digunakan untuk memperkirakan turunan fungsi $f^{(k)}(x_i, \alpha_j)$. Notasi yang digunakan untuk memperkirakan turunan k -fungsi sepanjang i -arah adalah $\gamma^{(k)}(i)$ sebagai berikut :

$$\gamma^k(i) \approx \sum_{j=1}^n g_j^k(x) \alpha_j(i), \quad (3.59)$$

Untuk iterasi pertama $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, $\alpha(3)$, ..., $\alpha(n)$ dipilih sesuai dengan sumbu koordinat. Dalam proses perhitungan perkiraan turunan parsial $\gamma^{(k)}(j)$ dipilih h yang kecil yang merupakan penambahan nilai parameter ke- i . Dengan menggunakan deret Taylor dan mengabaikan suku-suku berordo tinggi, fungsi $f^{(k)}(x_i, \alpha_j + h)$ dan $f^{(k)}(x_i, \alpha_j - h)$ dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$f^{(k)}(x_i, \alpha_j + h) = f^{(k)}(x, \alpha) + \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \right] h \quad (3.60)$$

$$f^{(k)}(x_i, \alpha_j - h) = f^{(k)}(x, \alpha) - \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \right] h \quad (3.61)$$

Dari kedua deret di atas dengan mengambil selisihnya, maka perkiraan turunan parsial dapat dinyatakan :

$$\gamma^{(k)}(i) = \frac{f^{(k)}(x_i, \alpha_j + h) - f^{(k)}(x_i, \alpha_j - h)}{h} \quad (3.62)$$

dimana :

$\gamma^{(k)}(i)$ adalah turunan parsial fungsi terhadap parameter-parameternya

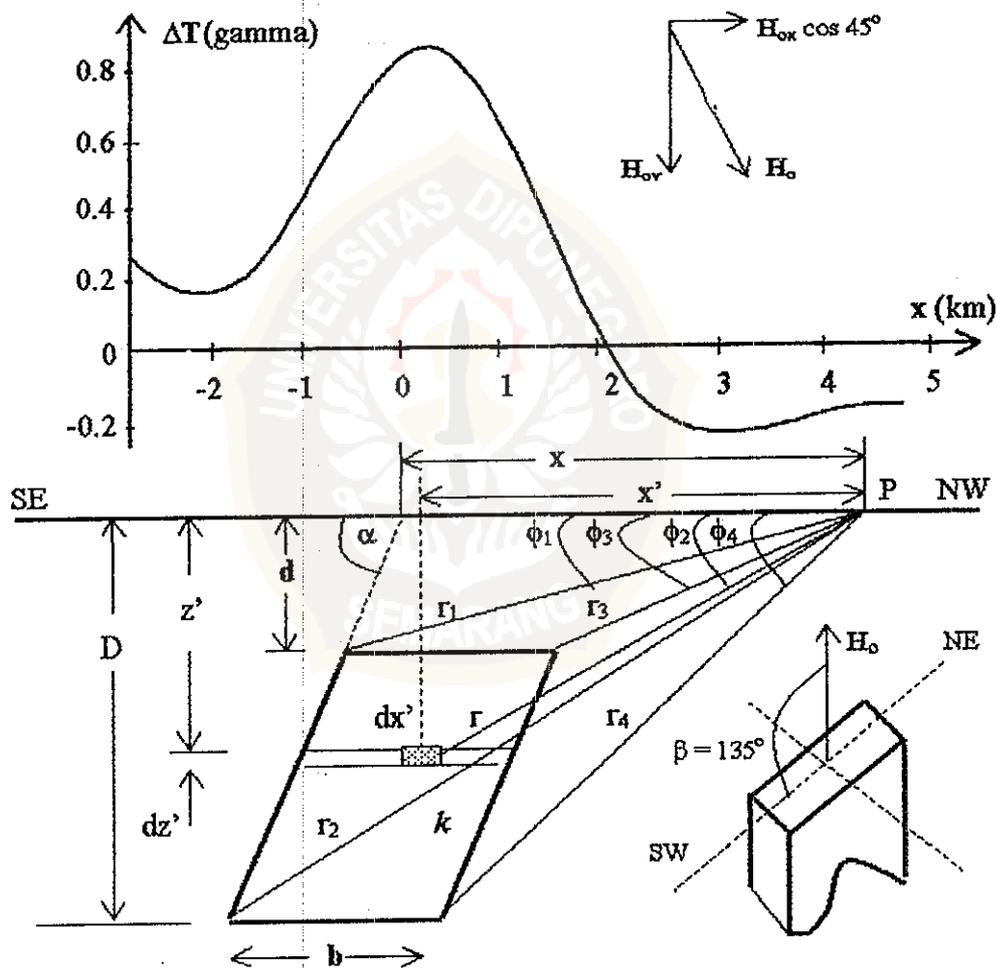
h adalah vektor pengskalaan

α_j adalah nilai parameter ke- n fungsi

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $k = 1, 2, 3, \dots, m$.

3.5. Anomali Teoritis Struktur Dike

Penafsiran anomali magnetik yang dilakukan adalah penafsiran kuantitatif untuk memperkirakan tentang parameter-parameter bentuk patahan dua dimensi yang meliputi : kedalaman dike (d), lebar dike (b), kemiringan dike (α), dan suseptibilitas magnetik batuan (k). Anomali teoritis medan magnet total model dike diturunkan dari anomali model prisma, gambar 3.9.



Gambar 3.9. Anomali Medan Magnet Total Prisma Dua Dimensi (Telford, W.M., dkk., 1976)

dimana :

$$\begin{aligned} r_1^2 &= d^2 + (x + d \cot \alpha)^2 & r_2^2 &= D^2 + (x + D \cot \alpha)^2 \\ r_3^2 &= d^2 + (x + d \cot \alpha - b)^2 & r_4^2 &= D^2 + (x + D \cot \alpha - b)^2 \\ \phi_1 &= \tan^{-1} d / (x + d \cot \alpha) & \phi_2 &= \tan^{-1} d / (x + d \cot \alpha - b) \end{aligned}$$

Telford, W.M., dkk., (1976), dengan menerapkan hubungan Poisson, potensial logarima dua dimensi, dan gradien gravitasi, dalam sistim koordinat $x'z'$ pada model prisma, maka komponen vertikal (ΔH_v), horiscutal (ΔH_h), dan komponen total (ΔH_t) anomali medan magnet model struktur dike dua dimensi dapat diturunkan.

Seperti yang telah dijelaskan pada Bab III, hubungan Poisson adalah hubungan antara potensial gravitasi U dengan potensial magnetik A . Untuk kasus dua dimensi dengan mengambil sumbu x (sumbu yang tegak lurus strike) sebagai absis dan sumbu z sebagai ordinat, Telford, W.M., dkk., (1976), merumuskan potensial logaritmik gravitasi dalam bentuk :

$$U = 2 \gamma \sigma \int_x \int_z \log \left(\frac{1}{r} \right) dx dz \quad (3.63)$$

dimana :

$$U_{xz} = \frac{\partial U}{\partial x \partial z} = 4 \gamma \sigma \iint \frac{xz}{r^4} dx dz \quad (3.64)$$

$$U_{zz} = \frac{\partial U}{\partial z^2} = 2 \gamma \sigma \iint \left(\frac{2z^2 - r^2}{r^4} \right) dx dz \quad (3.65)$$

Sedangkan hubungan Poisson dinyatakan :

$$A = -\frac{1}{\gamma \sigma} \left(I_x \frac{\partial U}{\partial x} + I_z \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (3.66)$$

dimana :

$$I_x = k H_o \sin \beta \quad \text{dan} \quad I_z = k H_{oz} = k H_o \cos \beta$$

Anomali vertikal ($\Delta H_v = \Delta H_z$) adalah komponen arah vertikal dari anomali medan magnet total yang memiliki sudut yang disebut sudut inklinasi (I_k).

Komponen vertikal anomali medan magnet secara matematis dirumuskan :

$$\Delta H_z = -\frac{\partial A}{\partial z} \quad (3.67)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.66) dan mengganti harga $I_x = k H_o \sin \beta$ dan $I_z = k H_{oz}$ ke persamaan (3.67), diperoleh :

$$\begin{aligned} \Delta H_z &= \frac{k}{\gamma \sigma} \left(H_o \sin \beta \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + H_{oz} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{k}{\gamma \sigma} \left(H_o \sin \beta U_{xz} + H_{oz} U_{zz} \right) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Untuk model prisma seperti pada gambar (3.9) diatas, dengan $r^2 = x'^2 + z'^2$, dengan batas integrasi searah sumbu x adalah $x + z' \cot \alpha$ sampai $x - b + z' \cot \alpha$

dan searah sumbu z adalah dari d samapi D, maka harga U_{xz} dari persamaan (3.64) menjadi :

$$\begin{aligned}
 U_{xz} &= 4 \gamma \sigma \iint \frac{x' z'}{r^4} dx' dz' \\
 &= 4 \gamma \sigma \int z' \left(\int \frac{x'}{(x'^2 + z'^2)^2} dx' \right) dz' \\
 &= 4 \gamma \sigma \int z' \left(\left. \frac{-1}{2(x'^2 + z'^2)} \right|_{x+z' \cot \alpha}^{x+z' \cot \alpha - b} \right) dz' \\
 U_{xz} &= 2 \gamma \sigma \int \left\{ \left(\frac{z'}{z'^2 \cos^2 \alpha + 2 z' x \cot \alpha + x^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{z'}{z'^2 \cos^2 \alpha + 2 z'(x-b) \cot \alpha + (x-b)^2} \right) \right\} dz' \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

dengan batas integrasi antara d sampai D, persamaan (3.69) menjadi :

$$U_{xz} = 2 \gamma \sigma \left\{ \sin^2 \alpha \cdot \log \left(\frac{r_2 r_3}{r_1 r_4} \right) - \sin \alpha \cos \alpha (\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 + \phi_4) \right\} \quad (3.70)$$

Sedangkan harga U_{zz} dari persamaan (3.65) dengan mengganti harga

$r^2 = x'^2 + z'^2$, akan menjadi :

$$\begin{aligned}
 U_{zz} &= 2\gamma\sigma \iint \left(\frac{2z'^2 - r^2}{r^4} \right) dx' dz' \\
 &= 2\gamma\sigma \iint \left(\frac{2z'^2}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right) dx' dz' \\
 &= 2\gamma\sigma \iint \left(\frac{2z'^2}{(x'^2 + z'^2)^2} - \frac{1}{(x'^2 + z'^2)} \right) dx' dz' \\
 U_{zz} &= 2\gamma\sigma \iint \left(\frac{-2z'^2}{2x'(x'^2 + z'^2)^2} - \frac{-1}{2x'(x'^2 + z'^2)} \right) dx' dz' \tag{3.71}
 \end{aligned}$$

dengan batas integrasi searah sumbu x adalah $x + z' \cot \alpha$ sampai $x - b + z' \cot \alpha$ dan searah sumbu z dari d sampai D , persamaan (3.71) dengan cara yang sama dapat diselesaikan menjadi :

$$U_{zz} = 2\gamma\sigma \left\{ \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \log \left(\frac{r_2 r_3}{r_1 r_4} \right) + \sin^2 \alpha (\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 + \phi_4) \right\} \tag{3.72}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.70) dan (3.72) ke persamaan (3.68) diatas, diperoleh harga anomali vertikal medan magnet ΔH_z yang dirumuskan :

$$\Delta H_z = 2k \sin \alpha \left\{ (H_o \sin \beta \sin \alpha + H_{\alpha} \cos \alpha) \log \left(\frac{r_2 r_3}{r_1 r_4} \right) + \right.$$

$$-\left(H_o \sin \beta \cos \alpha - H_{oz} \sin \alpha\right) (\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 + \phi_4) \} \quad (3.73)$$

Anomali horisontal (ΔH_h) merupakan komponen anomali medan magnet di suatu titik pengukuran yang berarah horisontal yang memiliki sudut deklinasi (Dk) terhadap arah utara geografi bumi. Komponen horisontal anomali medan magnet secara matematis dirumuskan :

$$\Delta H_h = - \frac{\partial A}{\partial x} \quad (3.74)$$

Dengan menggunakan hubungan Poisson pada persamaan (3.66) diatas, dan dengan mengganti $I_x = k H_o \sin \beta$ dan $I_z = k H_{oz}$, maka harga komponen horisontal medan magnet dirumuskan :

$$\begin{aligned} \Delta H_h &= \frac{k}{\gamma \sigma} \left(H_o \sin \beta \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + H_{oz} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \right) \\ &= \frac{k}{\gamma \sigma} \left(H_o \sin \beta U_{xx} + H_{oz} U_{zx} \right) \end{aligned} \quad (3.75)$$

Untuk kasus model dua dimensi Telford, W.M., dkk., (1976), dari potensial logaritmik menyatakan bahwa $U_{xz} = U_{zx}$ dan $U_{xx} = -U_{zz}$, sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (3.70) dan (3.72) ke persamaan (3.75) diperoleh harga anomali horisontal medan magnet ΔH_h dengan rumus :

$$\Delta H_h = 2k \sin \alpha \left\{ (H_o \sin \beta \cos \alpha + H_{oz} \sin \alpha) \log \left(\frac{r_2 r_3}{r_1 r_4} \right) + \right. \\ \left. - (H_o \sin \beta \sin \alpha - H_{oz} \cos \alpha) (\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 + \phi_4) \right\} \quad (3.76)$$

Anomali total medan magnet bumi (ΔH) adalah merupakan penjumlahan antara anomali horisontal dengan anomali vertikal. Dengan melihat gambar 3.5, persamaan (3.25) dapat diubah dalam bentuk :

$$\Delta H = \Delta H_h \cos I_k + \Delta H_z \sin I_k \quad (3.77)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.73) dan (3.76) ke persamaan (3.77) akan diperoleh harga anomali medan magnet total model prisma dua dimensi.

Anomali medan magnet total teoritis untuk model dike dua dimensi diturunkan dari anomali total model prisma dengan anggapan D mendekati tak berhingga ($D \rightarrow \infty$). Sehingga harga r_2 dan r_4 (lihat gambar 3.9) sama dan mendekati harga takberhingga.

Dengan anggapan tersebut, maka anomali medan magnet vertikal dan horisontal model dike dua dimensi dari persamaan (3.73) dan (3.76) menjadi :

$$\Delta H_z = 2k \sin \alpha \left\{ (H_o \sin \beta \sin \alpha + H_{oz} \cos \alpha) \log \left(\frac{r_3}{r_1} \right) + \right. \\ \left. - (H_o \sin \beta \cos \alpha - H_{oz} \sin \alpha) (\phi_1 - \phi_3) \right\} \quad (3.78)$$

$$\Delta H_n = 2k \sin \alpha \left\{ (H_o \sin \beta \cos \alpha + H_{oz} \sin \alpha) \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \right. \\ \left. - (H_o \sin \beta \sin \alpha - H_{oz} \cos \alpha) (\phi_1 - \phi_2) \right\} \quad (3.79)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.78) dan (3.79) ke persamaan (3.77), maka dapat diturunkan harga anomali medan magnet total model dike dua dimensi yang selanjutnya disebut *anomali teoritis struktur dike* sebagai berikut :

$$\Delta H = a \{ b [(\cot I_k \cos I_k \sin \beta \cos \alpha + \cos I_k \sin \alpha) + (\cos I_k \sin \beta \sin \alpha + \sin I_k \cos \alpha)] - c [(\cot I_k \cos I_k \sin \beta \sin \alpha - \cos I_k \cos \alpha) + (\cos I_k \sin \beta \cos \alpha - \sin I_k \sin \alpha)] \} \quad (3.80)$$

dimana :

$$a : 2k H_o \sin \alpha \sin I$$

$$b : \log (r_2 / r_1)$$

$$c : (\phi_2 - \phi_1)$$

I_k : sudut inklinasi daerah pengukuran

H_o : medan magnet rata-rata daerah pengukuran dari IGRF

β : sudut antara sraiike dengan arah medan magnet horisontal.