BAB III

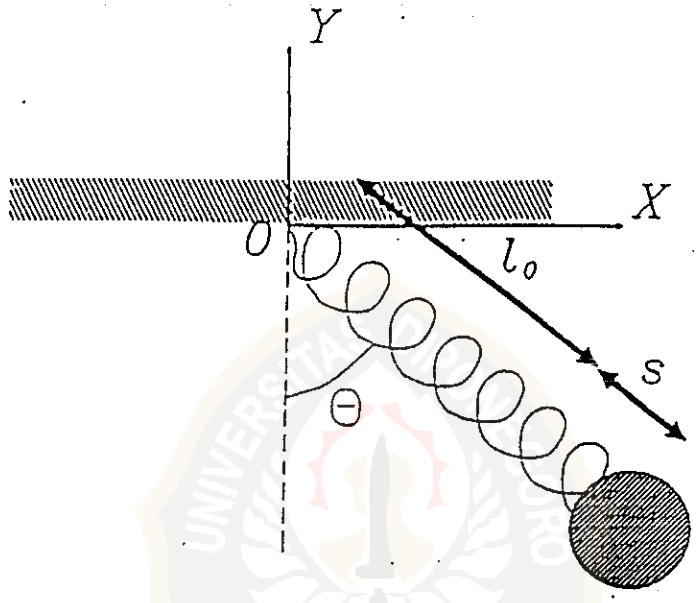
ANALISIS ANALITIK GERAK PENDULUM ELASTIK

Sistem pendulum elastis merupakan salah satu model sistem mekanika sederhana yang dapat menjelaskan keberadaan dinamika taklinier (Lai, H. M., 1983). Meskipun cukup sederhana, sistem ini mempunyai karakteristik kompleks. Sederhana dari segi mekanis tetapi kompleks dari segi konsep dinamika yang dapat dikaji pada sistem tersebut (Olsson, M. G., 1976 ; Lai, H. M., 1983).

Pada bab ini akan dibahas suatu analisis analitik dari gerak sistem pendulum elastik dengan tinjauan dua dimensi. Tujuan analisis ini adalah untuk memperlihatkan keutuhan (*integrabilitas*) sistem tersebut pada beberapa limit keadaan yang berhubungan dengan nilai $\left|\frac{E}{m}\right|$. Sebagaimana diketahui untuk nilai $\left|\frac{E}{m}\right|$ sedang (*intermediate*), gerak sistem pendulum elastik mempunyai kedua lintasan baik ' *reguler* ' (teratur) maupun ' *irreguler* ' (tak teratur) dalam ruang fase (Nunez-Yepez, H. N., dkk., 1990). Di samping itu analisis analitik dengan menggunakan teorema KAM (Kolmogorov - Arnold - Moser), juga akan dibahas pada gerak sistem pendulum elastik tersebut.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

III.1. LAGRANGIAN PERSAMAAN GERAK PENDULUM ELASTIS DAN KUANTITAS KEKEKALAN ENERGI UNTUK TINJAUAN DUA DIMENSI



Gambar 3.1 Pendulum Elastis dua dimensi
(Cuerno, R., dkk.,1992)

Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada persamaan (2.15) dan mengacu sistem pada gambar 3.1, maka diperoleh Lagrangian sistem pendulum elastis (dalam koordinat kartesian) sebagai berikut

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgy - \frac{1}{2}k\left[\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} - l_0\right]^2 \qquad (3.1)$$

(Cuerno, R., dkk.,1992)

dengan, l_0: panjang mula-mula sebelum pendulum terbebani, k : konstanta elastik pegas, m : massa beban yang mengapung pada pegas, dan g : percepatan gravitasi pada permukaan bumi.

Sebagaimana diketahui, persamaan Euler-Lagrange suatu sistem dapat diperoleh dari persamaan Lagrange untuk gerak sistem tersebut. Yang mengacu pada bentuk,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_j}\right) - \frac{\delta L}{\delta q_j} = 0 \qquad (3.2)$$

(Goldstein, H., 1959)

dengan L lagrangian sistem, q_i koordinat terbangkit (*degenerated*).

Dengan menggunakan metode separasi variabel (Boas, M. L., 1983), diperoleh persamaan Euler-Lagrange untuk gerak sebagai berikut,

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

$$\ddot{x} = -\omega_p{}^2 x + \frac{g\lambda x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.3}$$

$$\ddot{y} = -g - \omega_p{}^2 y + \frac{g\lambda y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.4}$$

(Cuerno, R., 1992)

dengan λ , $\omega_b(\omega_{bandul})$ *serta* $\omega_p(\omega_{pegas})$ positif. Prinsip utama dari persamaan ini adalah rangkaian taklinier (nonlinear coupling) antara gerakan vertikal dan horisontal (Cuerno, R., dkk., 1992).

Sedangkan kuantitas kekekalan energi sistem pendulum elastis untuk tinjauan dua dimensi adalah,

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + gy + \frac{1}{2}\omega_p\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} - l_0\right]^2 \tag{3.5}$$

(Cuerno, R., dkk., 1992)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

III.2. LIMIT KEADAAN ENERGI TINGGI DAN RENDAH

Secara umum dari Lagrangian (persamaan (3.1)) atau persamaan energi sistem (persamaan (3.5)) terlihat bahwa sistem pendulum elastik yang sedang dipelajari ini menampakkan diri sebagai sistem yang sepenuhnya terkopel atau dengan kata lain sistem tersebut merupakan sistem yang tak terintegrasi (*non integrable*). Pada gerak sistem tersebut terdapat beberapa limit parameter energi, yang melalui parameter-parameter ini, keadaan sistem dapat berubah menjadi terintegrasi (*integrable*).

III.2.1. Limit Parameter Energi $\left|\frac{E}{m}\right|$ Besar

Kemungkinan pertama yang dapat dilakukan untuk mewujudkan sistem tersebut terintegral adalah dengan mengambil limit nilai $\left|\frac{E}{m}\right|$ besar. Dalam hubungannya untuk mendapatkan nilai $\left|\frac{E}{m}\right|$ positif yang besar ini, akan ditinjau ungkapan (rumusan) Lagrangian dalam koordinat polar (dapat dilihat kembali pada gambar 3.1 di depan). Perubahan ini dimaksudkan untuk mempermudah pengamatan sistem secara fisis (Cuerno, R., dkk., 1992 ; Tri, W., dkk., 1997).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

Dengan mengingat

$$x = r \sin\theta \ ,$$

$$y = r \cos\theta \text{, dan } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

, maka energi kinetik sistem ;

$$K = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) \tag{3.6}$$

dan energi potensial sistem;

$$V = mgr\cos\theta + \frac{1}{2} k \left(r - l_0 \right)^2 \tag{3.7}$$

Sehingga diperoleh Lagrangian sistem pendulum elastik ;

$$L = K - V$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - mgr \cos\theta - \frac{1}{2} k \left(r - l_0 \right)^2 \tag{3.8}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

Sedangkan persamaan energi sistem berubah menjadi,

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(r - l_0\right)^2 \qquad (3.9a)$$

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + gr\cos\theta + \frac{1}{2}\omega_p^2\left(r - l_0\right)^2 \qquad (3.9b)$$

dengan $\omega_p^2 = \frac{k}{m}$.

Jika energi sistem besar (rasio $\left|\frac{E}{m}\right|$ besar), terdapat dua kemungkinan :

(a). Nilai r besar dan energi kinetik (K) kecil

Dalam kasus yang lebih umum, untuk penyederhanaan suku $mgr\cos\theta$ dapat diabaikan karena untuk kasus yang lebih umum energi potensial gravitasi pada pegas relatif lebih kecil dibanding energi kinetik pegas dan energi potensial pegas, sehingga Lagrangian (persamaan (3.3)) menjadi terpisah (sistem menjadi terintegrasi).

(b). Nilai $\left(r \approx l_0\right)$ atau dengan kata lain tidak terjadi peregangan pada pendulum setelah terbebani. Akibatnya energi kinetik mendominasi dan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

sistem tersebut seperti sebuah sistem partikel yang bergerak bebas (sebuah sistem yang terintegrasi)

III.2.2. Limit Parameter Energi $\left|\frac{E}{m}\right|$ Kecil

Keadaan sistem pendulum elastik pada limit $\left|\frac{E}{m}\right|$ kecil dapat diperoleh, jika diambil nilai percepatan gravitasi $g \to \infty$ (Cohen, Y., dkk., 1988). Dalam limit ini keadaan diasumsikan $tg\theta \approx x/y \approx 0$, berarti gerak pendulum hampir vertikal (simpangan x (horisontal) semakin kecil). Persamaan gerak sistem tersebut (persamaan Euler Lagrange persamaan (3.3) dan persamaan (3.4)) berubah sebagai berikut :

$$\ddot{x} = -\omega_p^{\,2}\, x \tag{3.10a}$$

atau

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\, x \tag{3.10b}$$

dan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

$$\ddot{y} = -g + l_0 \omega_p^{\ 2} - \omega_p^{\ 2} y \qquad (3.11a)$$

atau

$$\ddot{y} = -g + l_0 \frac{k}{m} - \frac{k}{m} y \qquad (3.11b)$$

Dengan melihat persamaan (3.10) dan persamaan (3.11) di atas, terlihat bahwa sistem pendulum elastik menjadi ekivalen untuk dua osilator linier yang tak terkopel (*uncoupled linier oscilators*) pada koordinat x dan y (Cuerno, R., dkk., 1992 ; Symon, K. R., 1971). Kondisi ini kembali memperlihatkan kondisi sistem yang terintegrasi.

III.3. PENERAPAN TEOREMA KAM (KOLMOGOROV - ARNOLD - MOSER)

Teorema KAM (Arnold, V. I., 1978 ; Thompson, J. M. T., dkk., 1986 ; Cuerno, R., 1992) pada dasarnya menjelaskan bahwa jika ditambahkan suatu gangguan pada sebuah sistem terintegrasi, maka Hamiltonian sistem tersebut berubah menjadi, (Cuerno, R., 1992)

$$H = H_0 + \in H_1 \qquad (3.12)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

dengan, H_0 = Hamiltonian terintegral atau Hamiltonian tak terganggu,

H_1 = gangguan konservatif, dan

$\in$ = parameter gangguan.

Dalam tinjauan dinamika sistem pendulum elastis, gambaran gerak sistem dua derajat kebebasan ini dapat direpresentasikan dalam beberapa torus. Pada kasus sistem yang terganggu, beberapa torus hanya akan mengalami cacat (tetapi tidak ' rusak '), dalam hal ini ditentukan oleh besarnya nilai parameter $\in$. Atau dengan kata lain, banyaknya torus yang tidak cacat dalam sistem semakin berkurang sebagaimana bertambahnya nilai parameter $\in$.

Torus yang tidak berubah (cacat) ini mempunyai laju frekuensi $\dot{\varphi}_1 / \dot{\varphi}_2$ yang tidak rasional (*irasional*) (Berry, M. V., 1978), yaitu, tidak dapat didekati oleh bilangan - bilangan rasional yang lebih baik daripada sebuah batas yang pada dasarnya dinyatakan oleh ukuran gangguan. Jika kondisi ini tidak dipenuhi, torus-torus tersebut akan lenyap (hilang) dan digantikan oleh lapisan-lapisan chaos (*chaotic layer*), di mana lapisan-lapisan chaos tersebut akan membentuk suatu lintasan-lintasan yang menjelajahi daerah tiga dimensi dalam ruang fase (Berry, M. V., 1978 ; Lichtenberg, A. J., dkk., 1983 ; Thompson, J. M. T., dkk., 1986). Hal yang terjadi adalah tingkah laku sistem pendulum elastik tersebut menjadi lebih kompleks, sebagaimana torus yang tetap berkurang (tidak berubah) dan ukuran lapisan chaos berkembang jika parameter $\in$ bertambah.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

Teorema KAM ini dapat diterapkan pada kondisi :

- sistem ' *asal* ' merupakan sistem yang konservatif (kekal)
- tak terdegenerasi (terbangkit), sebuah hubungan fungsional seperti $\omega_1 = f(\omega_2)$ tidak ada
- tak terdegenerasi secara iso energi (turunan (*derivatif*) laju frekuensi terhadap masing-masing variabel aksi tidak sama dengan nol) (Berry, M. V., 1978 ; Arnold, V. I., 1978)

Sebagai pendekatan pertama, dapat diperhatikan Hamiltonian tak terganggu sebagai penjumlahan Hamiltonian pegas dan Hamiltonian pendulum. Tetapi sistem ini terdegenerasi, karena rasio frekuensi $\left(\frac{\omega_b}{\omega_p}\right)$ konstan untuk semua torus. Untuk menghindari masalah ini, pada awalnya akan diambil Hamiltonian lengkap, (Cuerno, R., dkk.,1992)

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_x^{\,2} + P_y^{\,2}\right) + mgy + \frac{1}{2}k\left[\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} - l_0\right]^2 \qquad (3.13)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

yang diuraikan (didekomposisikan) dalam dua bagian sebagai berikut :

(Cuerno, R., dkk.,1992)

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(P_x^{\,2} + P_y^{\,2} \right) + \frac{\lambda mg}{l_0^{\,3}}\left(y'^4 + \frac{1}{4}x^4 \right) \tag{3.14}$$

dengan y' didefinisikan sebagai $y' \equiv y + l_0$.

H_0 merupakan hamiltonian terintegral, karena variabel-variabelnya terpisah. Selanjutnya dapat diambil

$$V_p \equiv H - H_0 \tag{3.15}$$

disini V_p akan memainkan peranan dari $\in H_1$ dalam persamaan (3.12).

Dengan menggunakan dekomposisi (penguraian) persamaan (3.15), variabel-variabel aksi untuk persamaan Hamiltonian (persamaan (3.14)) membuat definisi (batasan) frekuensi-frekuensi yang membuktikan kondisi KAM. Lebih lanjut dengan menggunakan perhitungan yang lebih eksplisit, menunjukkan bahwa H_0 merupakan jumlah dua osilator tak harmonis, dengan perioda yang bergantung pada amplitudo, dan hal ini berarti dapat memenuhi fungsional bebas

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

dari dua frekuensi tertentu, yaitu, pemenuhan sepenuhnya persyaratan teorema KAM.

H_0 dapat dilihat sebagai bentuk hasil yang ditimbulkan dari H jika kondisi sistem tersebut diasumsikan $|y| \langle\langle |x| \langle\langle l_0$, hal ini merupakan suatu pemenuhan kondisi secara fisik selain teknik dekomposisi di atas (yang valid secara matematis). Sedangkan ungkapan yang berkaitan untuk V_p adalah,

$$V_p = mgy' - mgl_0 + \frac{\lambda mg}{l_0^{\,3}}\left(-y'^2\, x^2\right) + \textit{suku orde-orde yang lebih tinggi} \tag{3.16}$$

(Cuerno, R., dkk.,1992)

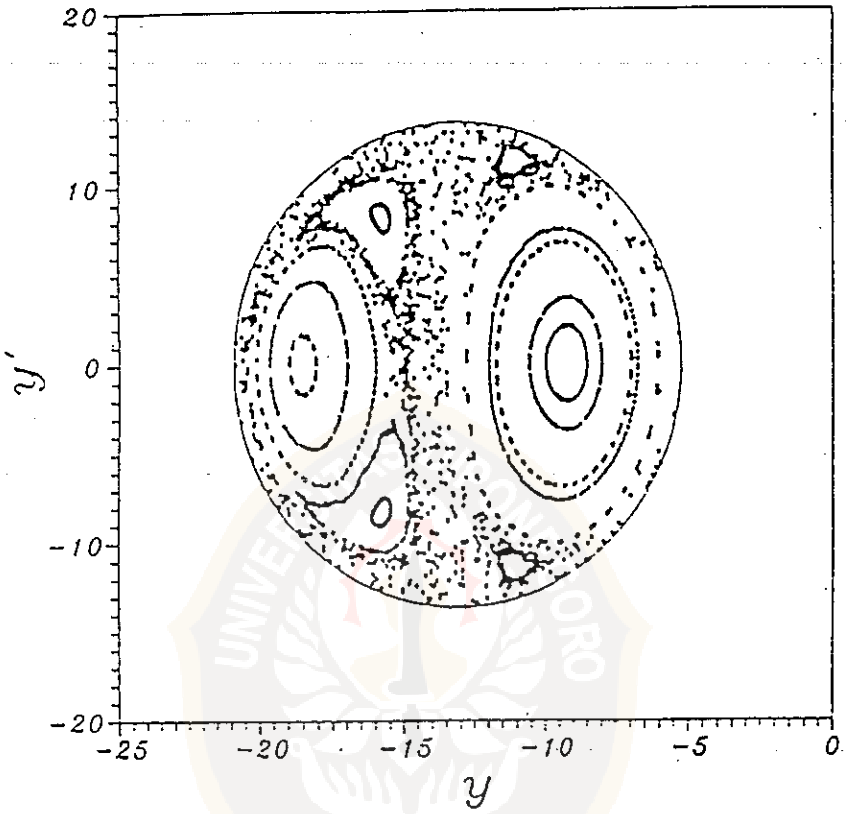
Pada kondisi tertentu nilai parameter $\in$ dalam persamaan (3.12) dapat identik dengan parameter λ. Hal ini mungkin menunjukkan bahwa seolah-olah H_0 bergantung pada $\in$ dan prinsip teorema KAM tidak dapat diterapkan. Tetapi karena H_0 terintegral untuk semua parameter λ (ruang fasenya secara kualitatif bersesuaian dengan H_0 yang bebas pada semua parameter gangguan) dan sepenuhnya memenuhi semua persyaratan teorema KAM, maka ruang fase dari Hamiltonian lengkap (persamaan (3.13)) hanya dapat

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

diprediksikan oleh teorema KAM untuk suatu Hamiltonian terganggu (H) dan ini berlaku untuk semua nilai λ.

Pada gambar 3.2 berikut memperlihatkan keberadaan torus yang patah-patah dan torus yang tidak patah-patah yang diuraikan dengan teorema KAM. Energi sistem bertambah dari gambar 3.2(a) hingga 3.2(c) dan dapat dilihat bahwa efek pertambahan energi ini adalah bertambahnya daerah-daerah yang dilingkupi oleh lintasan-lintasan chaos, yaitu, torus yang patah-patah.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

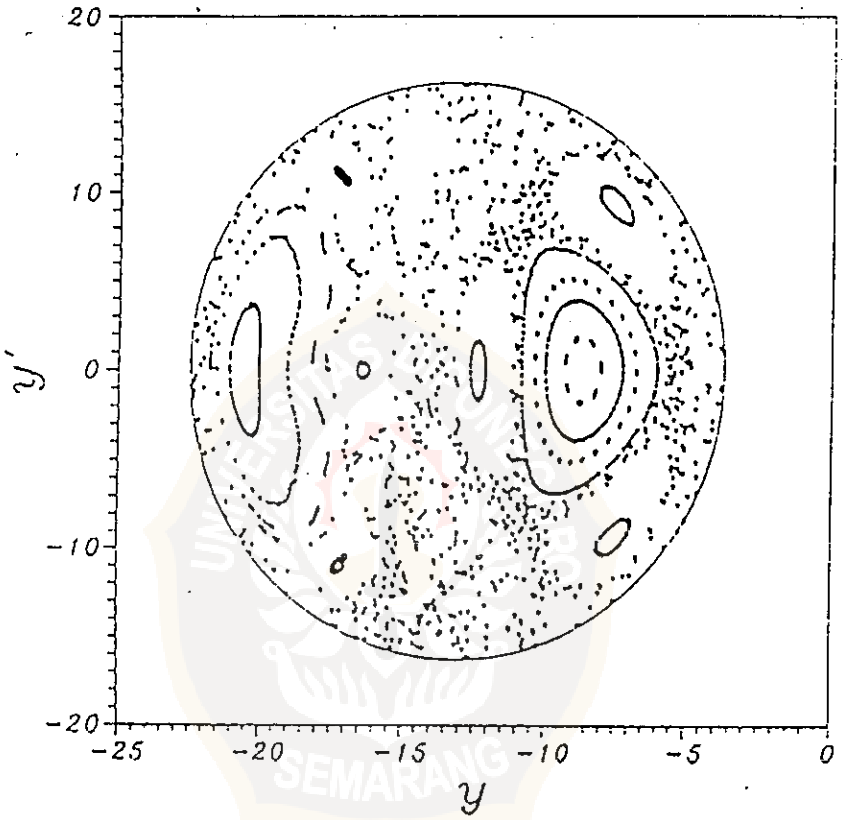


3.2(a)

Gambar 3.2 Bagian Poincare untuk nilai-nilai energi yang berbeda $E/m = -20\ J/kg$ untuk (a), $E/m = 20\ J/kg$ untuk (b) dan $E/m = 40\ J/kg$ untuk (c). Ketiga kasus tersebut semuanya dalam $\omega_s^2 = 3s^{-1}$, $\lambda = 3$.

(Cuerno, R., dkk., 1992)

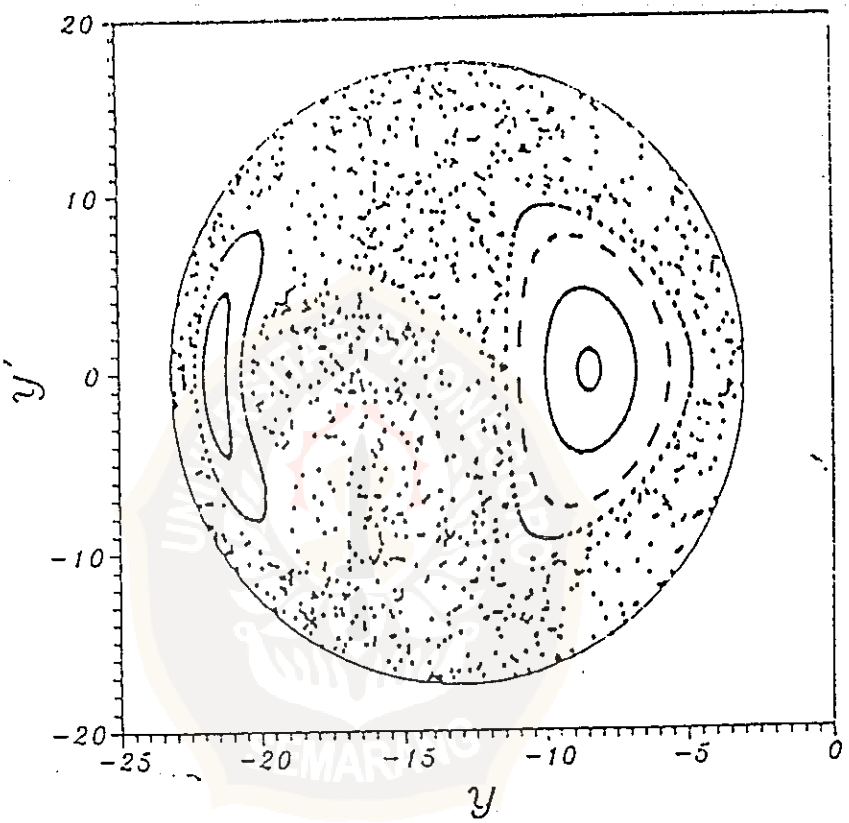
This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)



3.2(b)

Gambar 3.2 (lanjutan)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)



3.2(c)

Gambar 3.2 (lanjutan)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)