

## BAB II

### DASAR TEORI

#### II.1. LATAR SEJARAH CHAOS

Chaos (galau) atau keacakan (*randomness*) merupakan sesuatu yang mendasar dan tidak akan hilang sekalipun informasi tentang sistem bertambah. Chaos ini timbul karena tidak adanya hubungan yang jelas antara sebab dan akibat sehingga sistem tampak acak (random)

Sebuah paradigma tentang chaos adalah bahwa chaos itu dapat diprakirakan, deterministik, dan dihasilkan oleh aturan-aturan tertentu yang tidak mengandung sesuatu yang bersifat kemungkinan. Di samping itu, penemuan chaos menghasilkan suatu paradigma baru dalam permodelan sains. Di satu sisi hal ini menunjukkan batas fundamental baru dalam melakukan prakiraan, sedangkan di sisi lain prakiraan dalam chaos (*deterministik*) menunjukkan bahwa banyak gejala acak yang lebih dapat dipikirkan daripada yang diduga sebelumnya (Sandi, S., 1991). Jika prakiraan menjadi tidak mungkin, maka sistem chaotik dapat menyerupai suatu sistem stokastik, walaupun sumber ketidakreguleran berbeda. Chaos memungkinkan ditemukannya keteraturan dalam sistem-sistem yang tampaknya kacau balau (acak) yang mengimbas terhadap banyak cabang ilmu pengetahuan.

Gerakan chaotik tidak merupakan suatu fenomena yang aneh. Menurut GL Baker dan JP Gollub (1994) terdapat beberapa kondisi yang diperlukan untuk menyebabkan terjadinya gerakan chaotik, yaitu

- (a). sistem mempunyai paling sedikit tiga variabel tak tergantung dinamik,
- (b). persamaan gerak berisi suatu hubungan taklinier, yang merangkai beberapa variabel.

Persamaan sistem seringkali dapat dituliskan dalam bentuk : (Baker, G.L., dkk., 1994)

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

dengan  $n$  harus paling sedikit 3.

GL Baker dan JP Gollub (1994) juga mengemukakan bahwa terdapat tiga ruang gerak yang memperlihatkan kemunculan chaos, yaitu

- (a) lintasan divergen (menyebar),
- (b) batasan gerak untuk daerah yang berhingga dari ruang fase variabel-variabel dinamik, dan
- (c) lintasan yang unik.

Efek hubungan taklinier menyumbangkan suatu penyelesaian periodik yang tidak stabil untuk pilihan parameter yang pasti. Kondisi ketidaklinieran mempunyai kebolehjadian untuk menyusun suatu sistem chaotik. Meskipun pada kenyataannya sistem chaotik diperkirakan dan didekati oleh persamaan klasik, namun penyelesaian sistem ini baru saja dapat disusun. Keadaan ini mungkin timbul dari kenyataan bahwa dengan pengecualian beberapa persamaan orde-1, persamaan differensial taklinier sulit dipecahkan secara analitik. Walaupun dimungkinkan untuk menggunakan pendekatan linier, namun penyelesaian persamaan diferensial taklinier secara umum tetap membutuhkan metode numerik untuk penyelesaiannya. Sekalipun demikian, pada tahun-tahun terakhir ini banyak kemajuan yang telah dicapai, yakni dengan menggunakan penggabungan simulasi numerik dan pendekatan analitis (Baker, G. L., dkk., 1994 ; Ott, E., 1991).

## II.2. TIGA INDIKATOR PENENTUAN DINAMIKA CHAOS

### II.2.1. Bagian Poincare

Bagian Poincare merupakan suatu perlengkapan yang diciptakan oleh Henri Poincare dari suatu penyederhanaan diagram ruang fase suatu sistem yang rumit. Menurut GL Baker dan JP Gollub (1994), hal ini dibentuk oleh pandangan diagram ruang fase stroboskopik di mana gerakan dapat diamati secara periodik.

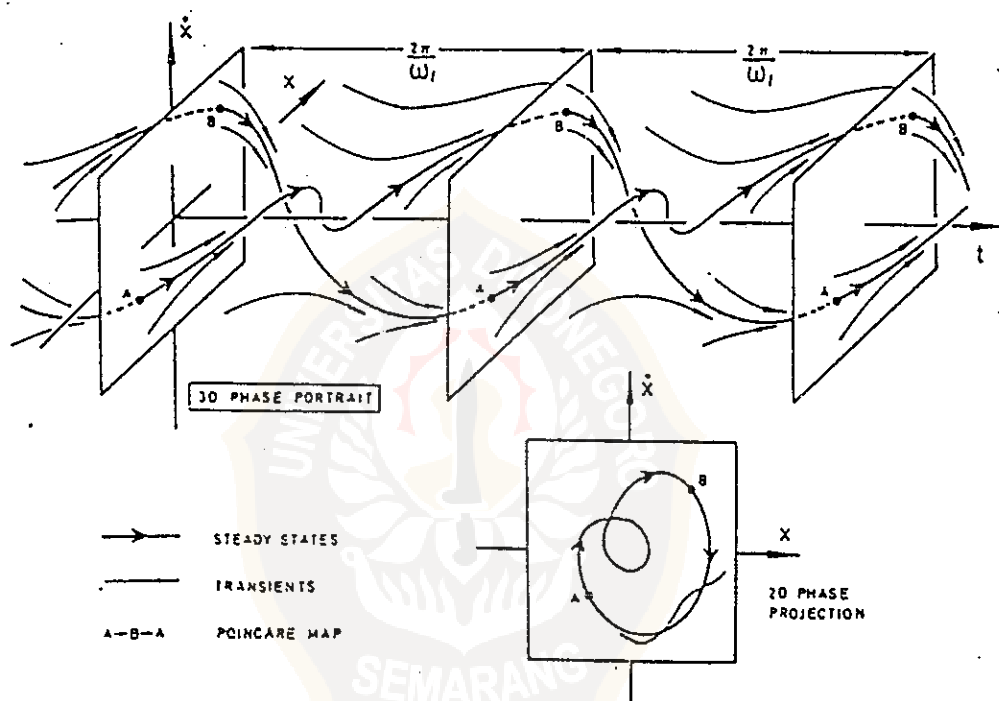
Pemetaan Poincare penting dilakukan untuk mempelajari tingkah laku dinamik pemetaan. Menurut JMT Thompson dan HB Stewart (1987) pemetaan

Poincare didefinisikan sebagai pengeplotan titik-titik  $(x, \dot{x})$  dalam proyeksi daerah  $t$  yang merupakan hasil perkalian dari perioda  $T$ . Atau dengan kata lain, hubungan proyeksi fase pada  $t = mT$  membentuk suatu rangkaian titik-titik yang

dikenal sebagai pemetaan Poincare, dengan  $T = \frac{2\pi}{\omega_f}$  merupakan perioda waktu paksaan (*the periodic time of the forcing*) dan  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Tehnik standar pemetaan dapat dilakukan baik secara dua dimensi maupun tiga dimensi. Untuk pemetaan tiga dimensi, proyeksi pemetaan dilakukan dari  $(x, \dot{x})$  terhadap  $t$ , sedangkan untuk dua dimensi hanya dilakukan proyeksi

fase  $(x, \dot{x})$  saja (Thompson, J.M.T., dkk., 1987). Contoh teknik standar pemetaan dapat dilihat pada gambar 2.1 berikut.



Gambar 2.1 Penggambaran fase tiga dimensi dari suatu osilator mekanik paksaan dan fase proyeksi dua dimensi dari pemetaan Poincare. (Thompson, J.M.T., dkk., 1987)

Untuk suatu sistem taklinier, transformasi pemetaan Poincare terhadap titik-titik

$(x, \dot{x})$  didefinisikan sebagai,

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.2)$$

(Thompson, J.M.T., dkk., 1987)

Sebagaimana dijelaskan di atas bahwa bagian Poincare dibentuk oleh pandangan diagram ruang fase stroboskopik, hal ini menunjukkan rambatan sistem dinamik yang digambarkan akan menunjukkan lintasan gerakan secara stroboskopik pula. Sebagai akibatnya, hanya transformasi pada saat tertentu saja yang diamati, yang berhubungan dengan lintasan yang melalui fungsi tertentu. Jelas di sini, pemetaan Poincare hanya dikerjakan terhadap potongan waktu tertentu atau variabel dasar ruang fase yang memiliki nilai tertentu (Tri, W., dkk., 1997).

Di samping itu pada pemetaan Poincare, terdapat informasi tentang susunan lintasan-lintasan yang mendekati suatu gerakan periodik yang dibutuhkan untuk menyifati gerakan yang berulang. Penggambaran pemetaan Poincare, yakni titik-titik potong suatu lintasan ( trayektori ) dengan bidang tetap dalam ruang fase, memberikan suatu cara efektif untuk mengungkapkan sifat

gerakan. Menurut Sandi Setiawan (1991), problem praktis permasalahan tersebut adalah mencocokkan ketepatan interpolasi yang digunakan untuk menentukan tempat titik potong dengan yang diperoleh dari algoritma Integrasi.

### II.2.2. Eksponen Lyapunov

Eksponen Lyapunov merupakan suatu pemetaan yang digunakan untuk mengukur kepekaan yang bergantung pada kondisi awal karakteristik tingkah laku chaotik. Eksponen Lyapunov, yang disimbolkan dengan  $\lambda$ , digunakan untuk pemetaan satu dimensi. GL Baker dan JP Gollub (1994) menyatakan bahwa jika suatu sistem dikembangkan dari dua kondisi awal yang mempunyai sedikit selisih, yaitu  $x$  dan  $x + \varepsilon$ , setelah iterasi ke -  $n$  divergensi kondisi ini dapat didekati oleh,

$$\varepsilon(n) \approx \varepsilon e^{\lambda n} \quad (2.3)$$

(Baker, G.L., dkk., 1994)

dengan  $\lambda$  = eksponen Lyapunov, memberikan rata-rata perhitungan divergensi. Jika  $\lambda$  negatif, lintasan-lintasan yang sedikit terpisah akan bertemu pada satu titik dan evolusi menjadi tidak chaotik. Jika  $\lambda$  positif, lintasan yang

terpisah tersebut menjadi agak jauh bersimpangan, evolusi menjadi peka terhadap kondisi awal dan chaotik akan terjadi.

Suatu pemetaan spesifik satu dimensi diberikan oleh  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

Perbedaan antara dua keadaan awal yang agak jauh setelah kenaikan ke- $n$  ditulis sebagai, (Baker, G.L., dkk., 1994)

$$f^n(x+\varepsilon) - f^n(x) \approx \varepsilon e^{n\lambda} \quad (2.4)$$

atau

$$\log_e \left[ \frac{f^n(x+\varepsilon) - f^n(x)}{\varepsilon} \right] \approx n\lambda \quad (2.5)$$

Untuk  $\varepsilon$  kecil, ekspresi menjadi

$$\lambda = \frac{1}{n} \log_e \left| \frac{df^n}{dx} \right| \quad (2.6)$$

(Baker, G.L., dkk., 1994)



Dengan mempergunakan aturan berantai untuk menurunkan iterasi ke- $n$  dan mengambil pendekatan sampai  $n$  tak hingga, diperoleh eksponen Lyapunov sebagai berikut,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log_e |f'(x_i)| \quad (2.7)$$

(Baker, G.L., dkk., 1994)

### II.2.3. Analisis Spektrum Daya

Menurut Sandi Setiawan (1991), analisis spektrum daya merupakan suatu analisis yang bermanfaat untuk mengetahui gerak *quasiperiodik* yang berasal dari gerak periodik, dan untuk mengenal keperiodikan berorde tinggi yang ada dalam pita-pita chaos dengan spektrum struktur halus (*fine structure*).

Analisis spektrum daya diawali dengan memperkirakan evolusi waktu dari suatu sistem dinamik yang diwakili oleh variasi-variasi waktu atau deret waktu dari variabel-variabel dinamikanya. Evolusi tersebut membentuk suatu pola yang beraturan berupa suatu sinyal. Pengukuran dari pola yang beraturan tersebut, dapat dibentuk dengan menggunakan transformasi Fourier sebagai suatu

pendekatan terhadap deret Fourier (Baker, G.L., dkk., 1994 ; Cuerno, R., dkk., 1992).

Menurut R Cuerno, dkk. (1992), transformasi untuk pengukuran tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut,

$$\bar{x}_k \equiv \sum_{j=1}^n x_j \exp \frac{-2\pi ikj}{n} \quad (2.8)$$

dengan  $x_j \equiv x(\Delta t)$ ,

$$\bar{x}_k \equiv \bar{x}(k\Delta f),$$

$$\Delta f \equiv \frac{1}{t_{\max}} = \frac{1}{(n\Delta t)}, \text{ dan}$$

$\Delta t$  merupakan selang waktu.

Di sini spektrum daya didefinisikan sebagai,

$$E_k \equiv |\bar{x}_k|^2 \quad (2.9)$$

(Cuerno, R., dkk., 1992)

Spektrum daya merupakan gambaran kelimpahan relatif frekuensi-frekuensi yang berbeda dalam suatu deret waktu yang diberikan. Spektrum daya juga membentuk suatu pita yang lebar yang berisi substansial daya pada frekuensi rendah. Walaupun sebuah spektrum daya yang lebar tidak menjamin kepekaannya pada kondisi awal, tetapi spektrum daya juga merupakan suatu indikator keberadaan chaos.

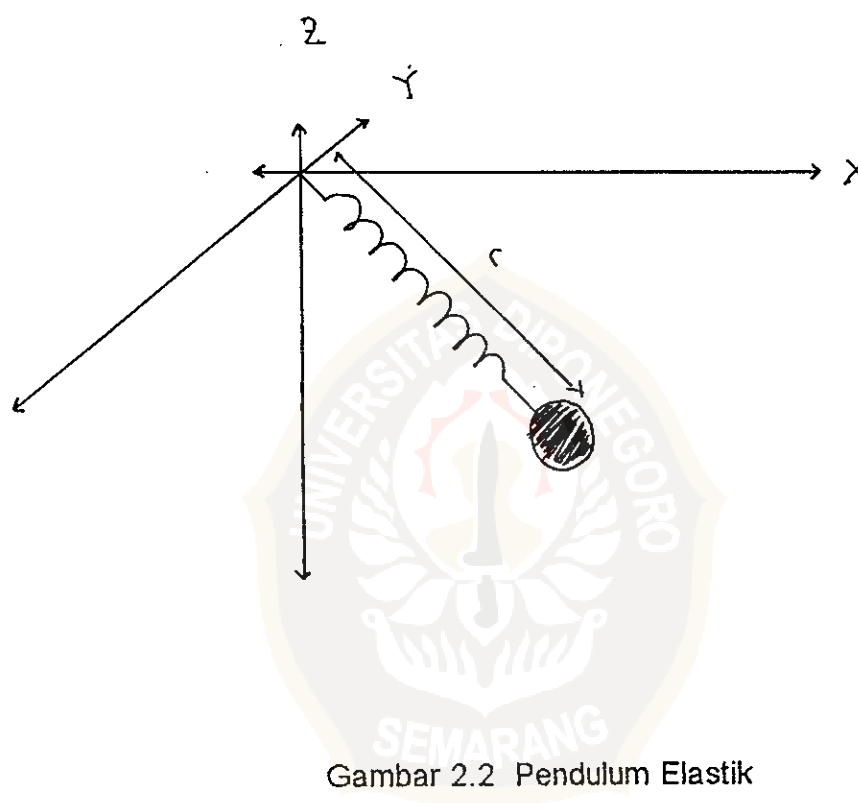
### II.3. PENDULUM ELASTIK

Pendulum elastik, merupakan suatu sistem mekanika sederhana yang menggabungkan tingkah laku dinamika kompleks. Konstruksi pendulum elastik ini terdiri dari sebuah pegas yang dibebani suatu massa  $m$  kemudian digerakkan seperti halnya pendulum biasa ke kanan dan ke kiri, serta berosilasi sebagaimana osilasi sebuah pegas ke atas dan ke bawah. Dari konstruksi ini, terlihat bahwa ada hubungan tidak linier antara gerakan pegas ke atas dan ke bawah dengan gerakan pendulum ke samping. Tingkah laku ini dikenal dengan *resonansi auto parametrik* (Olsson, M.G., 1976).

Resonansi bandul elastik serta tingkah lakunya menyajikan suatu fenomena perangkat resonansi ketidakstabilan parametrik dan taklinier. Secara teoritikal, hal ini merupakan permasalahan mekanik dua dimensi. Minorsky dan Olsson menunjukkan bahwa sisi bandul dan sisi pegas merupakan suatu ketidakmungkinan parametrik suatu efek resonansi tipe linier (Lai, H.M., 1983).

### II.3.1. Penyelesaian Persamaan Gerak Pendulum Elastik

Pada bagian ini, sistem secara umum merupakan suatu osilator harmonik yang ditinjau sebagai sistem tiga dimensi.



$$\begin{aligned}
 L &= L\left(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{z}_n\right) \\
 &= T - V
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

dengan  $L$  didefinisikan sebagai lagrangian sistem,  $T$  energi kinetik sistem dan  $V$  energi potensial sistem (Pauling, L., dkk., 1935).

Berdasarkan uraian ini, untuk menyelesaikan persamaan Lagrange pendulum elastik, terlebih dahulu ditinjau energi kinetik dan energi potensial sistem pendulum elastik (dalam koordinat kartesian). Kuantitas energi kinetik sistem pada koordinat kartesian didefinisikan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}m_1 \left( \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 \right) + \dots + \frac{1}{2}m_n \left( \dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left( \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

(Pauling, L., dkk., 1935)

Berdasarkan uraian di atas, untuk sistem pendulum elastik ini energi kinetik dapat didefinisikan

$$T = \frac{1}{2}m \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right)
 \tag{2.12}$$

Pada osilator harmonik tiga dimensi, hubungan untuk tenaga potensial pegas (osilator) didefinisikan sebagai  $\frac{1}{2}kr^2$ , dengan  $k$  merupakan konstanta gaya atau konstanta hukum Hooke (Pauling, L., dkk., 1935). Dengan menggunakan koordinat kartesian, tenaga potensial pegas dapat diungkapkan dalam bentuk,

$$V = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \quad (2.13)$$

Di samping tenaga potensial pegas, pada pendulum elastis juga bekerja tenaga potensial gravitasi, yang didefinisikan sebagai hasil kali antara gaya berat ( $mg$ ) dari benda itu dengan tinggi ( $y$ ) dari pusat beratnya di atas bidang patokan, sebagai  $mgy$ . Untuk sistem ini, tinggi benda dari pusat beratnya di atas bidang patokan adalah  $z$  (koordinat kartesian, gambar 2.2) sehingga energi potensial gravitasi menjadi

$$V = mgz \quad (2.14)$$

Sehingga Lagrangian sistem tersebut menjadi,

$$L = \frac{m}{2} \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz - \frac{k}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \quad (2.15)$$

dengan  $m$  massa beban yang mengantung pada pegas, serta  $g$  percepatan gravitasi pada permukaan bumi.

### II.3.2. Kuantitas Kekekalan

Jika sistem - dalam hal ini pendulum elastik - kekal (*konservatif*), osilasi horisontal akan muncul pada kemunculan gerak vertikal. Hubungan ini merupakan suatu transfer energi dari osilasi pegas pada gerakan tipe - pendulum (Olsson, M. G., 1976).

Kuantitas kekekalan (yang tidak berubah dalam evolusi temporal) pada sistem ini adalah energi total sistem (energi sistem,  $E$ ) tiap satuan massa ( $m$ ). Untuk tinjauan tiga dimensi terhadap sistem pendulum elastis ini, kuantitas kekekalan menjadi

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) + gz + \frac{k}{2m} (x^2 + y^2 + z^2) \quad (2.16)$$

Menurut teorema Liouville, jumlah kuantitas kekekalan sangat penting. Teorema ini menyebutkan bahwa suatu sistem mekanik dengan  $N$  derajat

kebebasan menjadi utuh jika padanya terdapat  $N$  yang tidak bergantung terhadap kuantitas kekekalan gerak, sebagaimana kurung Poisson-nya sama dengan nol (Goldstein, H., 1959). Selain itu, teorema Liouville juga menjelaskan secara tidak langsung bahwa ruang fase dibentuk oleh *hypertory* (tori tiga dimensi) dan semua sisa lintasan *hypersurface*-nya (dalam permukaan tiga dimensi).

Dalam pendulum elastik, kekekalan sistem akan membutuhkan suatu kuantitas kekekalan, yang tidak bergantung pada energi. Namun demikian, hubungan ini memperlihatkan bahwa tidak ada kuantitas kekekalan yang baru. Hal ini dimengerti sebagai suatu hubungan tidak langsung bahwa persamaan gerak di atas tidak dapat diselesaikan oleh pengkuadratan biasa, sifat ini menunjukkan suatu kondisi tingkah laku yang kompleks (Cuerno, R., dkk., 1992).

#### II.4. TEOREMA KAM DALAM SISTEM HAMILTONIAN KLASIK

Mempelajari sistem Hamiltonian tak terintegrasi dalam mekanika klasik merupakan studi tentang chaos (Ott, E., 1991). Studi lebih lanjut tentang hal ini dikenal sebagai teorema KAM. Teorema ini diusulkan pertama kali oleh Kolmogorov tahun 1954 dan dilengkapi oleh Arnold dan Moser pada sekitar tahun 1960-an (Sandi, S., 1991). Karena matematika yang dibutuhkan untuk membahas permasalahan dalam teorema KAM ini cukup rumit, pembahasan dibatasi pada *implikasinya* (keadaan yang terlihat atau tersimpul) saja.



Pembahasan tentang teorema ini dimulai dengan mengingat beberapa konsep tentang mekanika analitik (Goldstein, H., 1959 ; Soedjo, P., dkk., 1985 ; Sandi, S., 1991 ; Thompson, J.M.T., dkk., 1987). Sistem konservatif dengan  $N$  derajat kebebasan mempunyai fungsi Hamiltonian,

$$H = H(p_1, p_2, \dots, p_N; q_1, q_2, \dots, q_N) \quad (2.17)$$

dengan persamaan kanonik Hamiltonian,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.18)$$

Menurut JMT Thompson dan HB Stewart (1987) gerakan pada torus (bentuk jamak dari tori) dapat diperkirakan oleh persamaan differensial sederhana sebagai,

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

dengan konstanta  $\omega_1$  dan  $\omega_2$  sebagai frekuensi gerak. Jika frekuensi-frekuensi tersebut tidak bergantung secara rasional, maka gerakan akan menjadi quasiperiodik, dan lintasan akan mengisi keseluruhan torus. Jika  $\omega_1$  dan  $\omega_2$  memenuhi suatu kondisi resonansi,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n} \quad (2.20)$$

dengan  $m$  dan  $n$  bilangan bulat, maka orbit akan menjadi tertutup dan gerakan dikenal sebagai gerakan periodik. Koordinat-koordinat  $q$  dan  $p$  ditransformasikan menjadi  $J$  dan  $\theta$ ; yang merupakan variabel-variabel aksi sudut dalam sistem integrasi.

Jika Hamiltonian integral  $H_0(J)$  - oleh R Cuerno dkk. (1992) disebut sebagai Hamiltonian gangguan - dijumlahkan dengan suatu fungsi taklinier  $\in H_1(J, \theta)$  - dikenal dengan gangguan - diperoleh,

$$H = H_0(J) + \epsilon H_1(J, \theta) \quad (2.21)$$

(Thompson, J. M. T., dkk., 1987)

Persamaan ini dikenal sebagai teorema KAM. Teorema ini menjelaskan secara esensial dalam kasus dua derajat kebebasan dan merupakan suatu penjumlahan gangguan pada sebuah sistem integrasi.

Moser (1973), Lichtenberg dan Lieberman (1983) menyatakan bahwa sebagian besar tori pada sistem ini hanya akan diubah, sementara sebagian kecil lainnya yang mendekati resonansi akan ditempatkan oleh lapisan-lapisan kecil chaotik. Maksud "kecil" di sini, harus ditekankan karena beberapa pembuktian teorema ini mengasumsikan bahwa gangguan harus lebih kecil dari  $10^{-48}$  pada satuan yang tepat (Thompson, J. M. T., dkk., 1987). Namun demikian, studi numerik memperlihatkan bahwa gangguan (pertubasi) pada beberapa tori dapat bertahan lama. Ketika gangguan kecil, daerah chaotik berisi lapisan-lapisan kecil dan lintasan yang ditimbulkan menyimpang tidak menentu. Sepanjang lapisan-lapisan ini tetap kecil, kestabilan berkas tidak begitu berbahaya, karena lapisan-lapisan tersebut merupakan daerah yang terisolasi dan suatu lintasan tidak akan dapat melewati dari satu lapisan ke lapisan yang lain.

Pengukuran diperkirakan oleh nilai  $\epsilon$  dan menurun sebagai pertumbuhan  $\epsilon$ . Jika gangguan  $\epsilon$  diijinkan meningkat, ketebalan lapisan-lapisan chaotik juga akan meningkat oleh penggabungan lapisan-lapisan chaotik yang berdekatan. Penggabungan ini bertepatan dengan pengrusakan suatu torus KAM

di antara dua lapisan chaotik. Hal yang penting adalah bahwa tori yang membagi ruang fase ke dalam daerah-daerah  $J$  tertinggi dan terendah merupakan tori yang rusak (dadal), penyimpangan ini dapat merusak integritas (integrabilitas atau keutuhan) pola. Hal yang terjadi adalah, tingkah laku sistem menjadi lebih kompleks sebagai jumlah kekekalan tori yang menurun serta ukuran lapisan chaotik berkembang ketika  $\epsilon$  meningkat (Cuerno, R., dkk., 1992 ; Thompson, J. M. T., dkk., 1987).

