LAMPIRAN 1

LISTING PROGRAM

DINAMIKA CHAOS PADA PENDULUM ELASTIK

```
{$N+}
PROGRAM DINAMIKA_CHAOS;

USES
 Crt,Gdriver,Gkernel,Gshell,Gwindow;

CONST
 max1 = 100;
 max2 = 30;
 eps = 1e-6;
 m = 4;
 N = 50;

TYPE
 indeks_1 = 1..max1;
 indeks_2 = 1..max2;
 nilai_awal = array[indeks_2] of double;
 nilai = array[indeks_1,indeks_2] of double;
 koef = array[1..4,indeks_2] of double;

VAR
 x1,x2,dx,Ws2,Ld,g,Em : double;
 y1,y2              : nilai_awal;
 L,Iplay            : plotarray;
 i,j              : integer;
 ch                 : char;


PROCEDURE INPUT_DATA;

  Begin
```

```
  Textbackground (blue); clrscr; textcolor (green);
  gotoxy(5,5);
  writeln(' DATA PARAMETER DINAMIKA CHAOS :  ');
  writeln;
  gotoxy(10,8);
  write(' Rasio Energi-Massa (E/m) =  ');read(Em);
  gotoxy(10,wherey);
  write(' Frekuensi (Ws-2)        =  ');read(Ws2);
  gotoxy(10,wherey);
  write(' Konstanta (Ld)          =  ');read(Ld);
  gotoxy(10,wherey);
  write(' Perc. Gravitasi (g)     =  ');read(g);
  writeln;
  gotoxy(10,wherey);
  write(' Titik Awal (xo)         =  ');read(x1);

  for j := 1 to 3 do
   Begin
    gotoxy(10,wherey);
    write(' Titik awal (yo-',j:1,')        =  ');
    readln(y1[j]);
   End;

  y1[4]:= Sqrt(2*(Em - g*y1[1]
        - (Ws2/2)*Sqr(Sqrt(Sqr(y1[3])+Sqr(y1[1]))-(g*Ld/Ws2)))
        -Sqr(y1[2]));
  gotoxy(10,wherey);
  write(' Titik awal (yo-4)       = ',y1[4]:1);readln;
  gotoxy(10,wherey);
  write(' Titik akhir (x)         =  ');readln(x2);
  gotoxy(10,wherey);
  write(' Selang (dx)             =  ');readln(dx);
 End;

PROCEDURE RUNGE_KUTA;

VAR
 fx,y              : nilai_awal;
 yy,z              : nilai;
 k                 : koef;
 xx,x,delx,delt,pita : double;
 n,p               : integer;
```

LISTING PROGRAM
DINAMIKA CHAOS PADA PENDULUM ELASTIK

```
Begin
 for p := 1 to N do

 Begin
  L[p,1] := 0;
  L[p,2] := 0;

  n := 0;
  delt := 100;
  repeat
   Begin
    n := n + 1;
    pita := exp(n*ln(2));
    delx := (x2-x1)/pita;
    xx := x1;

    for j := 1 to m do yy[n,j] := y1[j];

    while xx < x2 do
     Begin
      x := xx;

      for j := 1 to m do y[j] := yy[n,j];

      for i := 1 to 4 do

       Begin
        fx[1]:= y[2];
        fx[2]:= - g - y[1]*Ws2 + (g*Ld*y[1])/(Sqrt(Sqr(y[3])+Sqr(y[1])));
        fx[3]:= y[4];
        fx[4]:= - Ws2*y[3] + (g*Ld*y[3])/(Sqrt(Sqr(y[3])+Sqr(y[1])));

        for j:= 1 to m do
         Begin
          k[i,j] := delx*fx[j];
          if i in [1..2] then
           Begin
            x := xx + delx/2;
            y[j] := yy[n,j] + k[i,j]/2;
           End
           else
```

```
        if i = 3 then
        Begin
         x := xx + delx;
         y[j] := yy[n,j] + k[3,j];
        End;
      End;
    End;

    xx := xx + delx;

    for j:= 1 to m do
     yy[n,j] := yy[n,j] + (k[1,j] + 2*(k[2,j] + k[3,j]) + k[4,j])/6;

   End;

    if n <> 1 then delt := yy[n,1] - yy[n-1,1];

  End;

   until abs(delt) < eps;
   for j:= 1 to m do y2[j] := yy[n,j];

   L[p,1] := y2[3];
   L[p,2] := y2[4];

 End;

End;


PROCEDURE PLOT_GRAFIK;

 Begin
   DefineWindow(1,0,0,XmaxGlb,YmaxGlb);
   DefineWindow(2,5,10,XmaxGlb-5,YmaxGlb-10);
   DefineWorld(1,0,0,20,20);
   DefineWorld(2,-80,-0.8,80,0.6);
   DefineHeader(2,' POINCARE MAP ');
   SelectWorld(2);
   SelectWindow(2);
   SetBackgroundColor(15);
   SetForegroundColor(0);
```

```
    SetHeaderOn;
    DrawBorder;
    SetlineStyle(0);
    DrawAxis(8,8,5,0,0,8,0,0,true);
    DrawPolygon(L,1,N-1,0,0,0);
    DrawTextW(-78.5,-0.725,1,'(dy/dx) ');
    DrawTextW(60,0.575,1,' y ');
    SetLineStyle(0);
    DrawTextW(25,0.075,1,'(b)');
    DrawSquare(35,0.05,70,0.375,false);
    DrawTextW(40,0.125,1,'Keterangan :');
    DrawTextW(40,0.2,1,'(W1-Wba)T2 = 0');
    DrawTextW(40,0.25,1,'T2/T1 = 2');
    DrawTextW(40,0.3,1,'T2/Te = 2');

  End;

{--------------------------PROGRAM INDUK ---------------------------------}

Begin

  Repeat
    INPUT_DATA;
     Clrscr;textcolor(yellow+blink);
    Gotoxy(30,15); writeln(' TUNGGU SEBENTAR  ! ');
     RUNGE_KUTA;

    Repeat
     Clrscr;
     Textcolor(lightcyan);
     Gotoxy(1,5);
     writeln('   HASIL SIMULASI : ');writeln;
     initGraphic;
     PLOT_GRAFIK;
     ch := readkey;
     if (ch = chr(080)) or (ch = chr(112)) then hardcopy(false,1)
     else;
     repeat until keypressed;
     LeaveGraphic;
     ch := readkey;
     clrscr;
     gotoxy(15,15);
```

```
    write(' < Enter  : selesai >');
    ch := readkey;
   until ch = chr(013);
   clrscr;
   gotoxy(15,15);
   write(' < Esc : masukkan data lagi >    < Enter :  exit program > ');
   repeat ch := readkey;
   until (ch = chr(027)) or (ch = chr(013));
  until ch = chr(013);
End.
```

LAMPIRAN 2

METODE NUMERIK

RUNGE-KUTTA ORDE-IV

Metode Runge-Kutta orde-4 merupakan salah satu dari keempat metode Runge-Kutta yang dianggap paling optimum. Sebagaimana telah diketahui bahwa dengan menyebutkan suku-suku dengan orde tinggi pada uraian deret Taylor maka kesalahan karena pemutusan akan menjadi kecil, tetapi kesalahan karena pembulatan akan semakin besar. Meskipun Runge-Kutta orde-3 hasilnya sudah jauh lebih cepat dari orde-orde sebelumnya, tetapi yang lazim dipakai adalah orde-4, yaitu yang menyertakan suku dengan orde-4. Runge-Kutta dengan orde lebih tinggi tentu saja dapat dibuat, tetapi kesalahan karena pembulatan akan semakin dominan.

Secara umum, rumus iterasi untuk metode Runge-Kutta dapat ditulis sebagai,

$$y_{n+1} = y_n + f\{x_n, y_n, h\} \qquad \text{(L2-1)}$$

di mana,

$$f\{x_n, y_n, h\} = a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_mk_m \qquad \text{(L2-2)}$$

$$h = x_{n+1} - x_n \qquad \text{(L2-3)}$$

dengan,

$$k_1 = hf\{x_n, y_n\} \qquad \text{(L2-4a)}$$

$$k_2 = hf\{x_n + p_1h\ ,\ y_n + q_{11}k_1\} \qquad \text{(L2-4b)}$$

$$k_3 = hf\{x_n + p_2h\ ,\ y_n + q_{21}k_1 + q_{22}k_2\} \qquad \text{(L2-4c)}$$

. . . . . .

$$k_m = hf\{x_n + p_{m-1}h\ ,\ y_n + q_{m-1,1}k_1 + q_{m-1,2}k_2 + \ldots + q_{m-1,m-1}k_m\} \qquad \text{(L2-4d)}$$

Sedangkan untuk rumus iterasi metode Runge-Kutta orde-4 sendiri adalah sebagai berikut,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\} \qquad \text{(L2-5)}$$

dengan,

$$k_1 = hf\{x_n, y_n\} \qquad \text{(L2-6a)}$$

$$k_2 = hf\{x_n + \frac{1}{2}h\ ,\ y_n + \frac{1}{2}k_1\} \qquad \text{(L2-6b)}$$

$$k_3 = hf\{x_n + \frac{1}{2}h\ ,\ y_n + \frac{1}{2}k_2\} \qquad \text{(L2-6c)}$$

$$k_4 = hf\{x_n + h\ ,\ y_n + k_3\} \qquad \text{(L2-6d)}$$

Dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 lebih mendekati hasil perhitungan dengan integrasi bila dibandingkan dengan hasil yang diperoleh dengan metode Euler.

LAMPIRAN 3

METODE ITERASI TITIK TETAP

(FIXED-POINT ITERATION METHOD)

Jika persamaan, $f(x) = 0$ disusun kembali dalam bentuk,

$$x = \bar{f}(x) \tag{L3-1}$$

maka dalam sebuah metode iteratif dapat ditulis sebagai,

$$x^{(i)} = \bar{f}\left(x^{(i-1)}\right) \tag{L3-2}$$

di mana indeks atas (superscript) i adalah jumlah tahapan (langkah) iterasi (dalam hal ini $x^{(0)}$ merupakan sebuah titik awal yang diberikan). Metode ini dikenal sebagai **metode iterasi titik tetap (fixed-point iteration method)** atau **metode substitusi berantai (successive substitution method)**

Keuntungan metode ini adalah kemudahan dan fleksibilitas dalam pemilihan bentuk $\bar{f}(x)$. Kelemahannya adalah, bagaimanapun, bahwa iterasi tersebut tidak selalu konvergen dengan suatu pemilihan bentuk sembarang $\bar{f}(x)$. Untuk menjamin konvergensi iterasi, syarat berikut harus dipenuhi,

Teorema :

Ambil $\bar{f}(x)$ kontinyu pada $[a,b]$ dan $\bar{f}(x)$ ada dalam $[a,b]$ untuk semua x dalam $[a,b]$, Jika $\bar{f}'(x)$ berada (a,b) dan

$$|\bar{f}'(x)| \leq K < 1$$

untuk semua x dalam (a,b), jika $x^{(0)}$ sebuah nilai dalam $[a,b]$, maka

$$x_n = \bar{f}(x_{n-1}), n \geq 1$$

konvergen pada sebuah titik tertentu, λ , dalam $[a,b]$.

Atau, secara mudah dikatakan iterasi yang dihasilkan akan konvergen jika,

$$|\bar{f}'(x)| < 1 \qquad \text{(L3-3)}$$

pada nilai terdekat dari akar tersebut.

Gambar L3-1 mengilustrasikan bagaimana $\bar{f}(x)$ mempengaruhi konvergensi teknik iterasi tersebut. Dapat diamati bahwa konvergensi tersebut adalah asimtotis jika $0<\bar{f}'(x)<1$, dan berosilasi jika $-1<\bar{f}'(x)<0$. Selanjutnya, dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa laju konvergensi menjadi lebih cepat sedemikian $\bar{f}'(x)$ mendekati 0 dalam nilai terdekat dari akar tersebut.

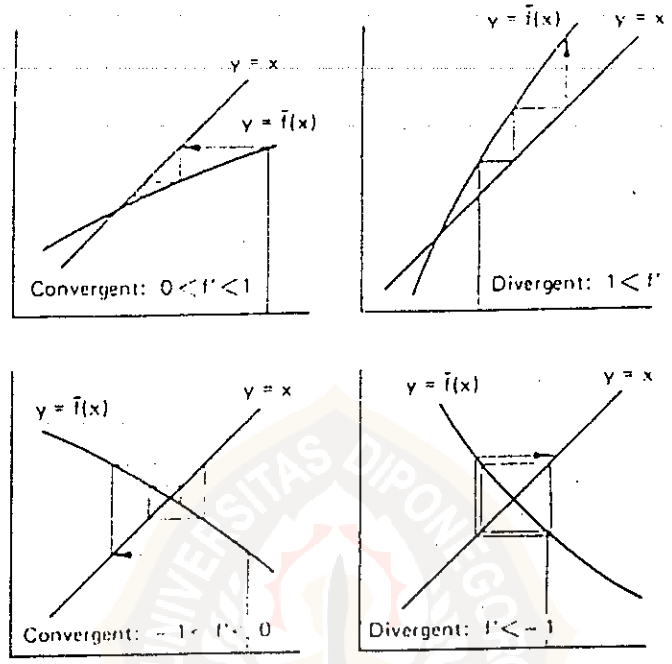
Suatu cara sistematik untuk menemukan bentuk $\bar{f}(x)$ adalah dengan membentuk persamaan,

$$\bar{f}(x)=x-\alpha f(x) \tag{L3-4}$$

sedemikian sehingga skema iterasinya menjadi,

$$x_n=x_{n-1}-\alpha f(x_{n-1}) \tag{L3-5}$$

dengan α sebuah konstanta.



Gambar L3-1 Konvergensi metode iterasi titik tetap.

Jika iterasi tersebut konvergen, x yang diperoleh dari skema di atas memenuhi $f(x) = 0$. Konstanta α dapat ditentukan sebagai berikut. Dengan substitusi persamaan (L3-4) pada persamaan (L3-3), terlihat bahwa iterasi tersebut konvergen apabila

$$-1 < 1 - \alpha f'(x) < 1 \qquad \text{(L3-6)}$$

atau

$$0 < \alpha f'(x) < 2 \qquad \text{(L3-7)}$$

Persamaan (L3-7) menunjukkan pertama, α harus bertanda sama terhadap $f'(x)$, dan kedua, persamaan (L3-5) akan selalu konvergen sebagaimana α mendekati 0. Laju konvergensi optimal apabila $\alpha \cong \frac{1}{f'(x)}$.

LAMPIRAN 4

PENENTUAN PERSAMAAN LAGRANGE

SISTEM PENDULUM ELASTIK

Sebagaimana telah diketahui, Lagrangian suatu sistem merupakan hasil pengurangan dari energi kinetik sistem dengan energi potensial,

$$L = K - V \qquad \text{(L4-1)}$$

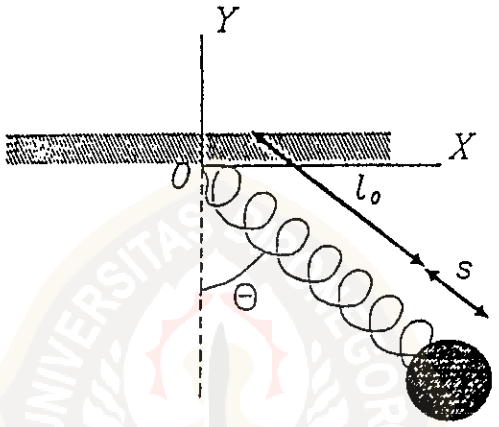
dengan, L = Lagrangian sistem,

V = Energi Potensial Sistem,

K = Energi Kinetik Sistem.

(Peter Soedojo dan Harsojo, 1985)

Dengan dasar inilah, maka dalam menguraikan Lagrangian pendulum elastik, terlebih dahulu diuraikan energi kinetik dan energi potensial sistem.



Gambar L4-1 Pendulum Elastik

TINJAUAN TERHADAP ENERGI KINETIK SISTEM

Secara umum, energi kinetik partikel didefinisikan sebagai,

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(L4-2)}$$

dengan, m = massa partikel,

v = kecepatan partikel.

(Sears, F. W., dan Zemansky, M. W., 1985)

Jika sistem pendulum elastik diasumsikan sebagai sebuah partikel, maka energi kinetik sistem dapat diasumsikan sebagai,

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

dengan, m = massa beban,

v = kecepatan gerak beban.

Untuk sistem pendulum elastik ini, energi kinetik sistem (K) merupakan penjumlahan dari energi kinetik sistem untuk proyeksi arah vertikal dan arah horisontal. Jika, K_x merupakan komponen energi kinetik sistem arah horisontal dan K_y merupakan komponen energi kinetik sistem untuk arah vertikal (lihat gambar L4-2 berikut), maka diperoleh

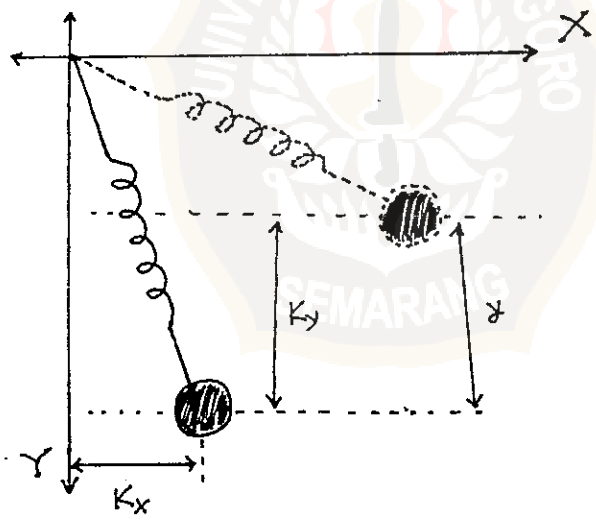
$$K = K_x + K_y$$

$$K = \frac{1}{2}mv_x^{\,2} + \frac{1}{2}mv_y^{\,2}$$

$$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

atau,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \qquad \text{(L4-3)}$$



Gambar L4-2

TINJAUAN TERHADAP ENERGI POTENSIAL SISTEM

Seperti halnya dengan energi kinetik, energi potensial pendulum elastik juga ditinjau atas dua hal, yaitu ditinjau atas kaitannya dengan energi potensial gravitasi serta kaitannya terhadap osilator harmonik pegas.

Menurut F W Sears dan M W Zemansky, energi potensial gravitasi (Ep) didefinisikan sebagai hasil kali antara berat (mg) dari benda itu dengan tinggi (y) dari pusat beratnya di atas bidang patokan, sebagai

$$Ep(gravitasi) = mgy \qquad \text{(L4-4)}$$

Untuk sistem pendulum elastik ini y merupakan tinggi benda (sistem) dari pusat beratnya, m merupakan massa beban (yang mengapung).

Sedangkan untuk energi potensial sistem ditinjau dari gerak osilator harmonik adalah,

$$E_p = \frac{1}{2} k s^2 \qquad \text{(L4-5)}$$

dengan k = konstanta pegas,

x = pertambahan panjang pegas.

(Sears, F. W., dan Zemansky, M. W., 1985)

Pada sistem pendulum elastik ini, k merupakan konstanta pegas, s didefinsikan sebagai x atau pertambahan panjang pegas sebagai akibat terjadinya peregangan. Jadi,

$$V = E_p(gravitasi) + E_p(osilator\,harmonik)$$
$$V = mgy + \frac{1}{2}k\,s^2$$

dari gambar di atas (L4-1), diketahui

$$s = r - l_0$$
$$s = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} - l_0$$

sehingga

$$V = mgy + \frac{1}{2}k\left\{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} - l_0\right\}^2 \qquad \text{(L4-6)}$$

Dari persamaan L4-3 dan L4-6, akhirnya diperoleh Lagrangian sistem pendulum elastik sebagai berikut,

$$L = K - V$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \left\{ mgy + \frac{1}{2}k\left\{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} - l_0\right\}^2 \right\}$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy - \frac{1}{2}k\left\{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} - l_0\right\}^2$$

atau

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgy - \frac{1}{2}k\left\{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} - l_0\right\}^2 \qquad \text{(L4-7)}$$