LAMPIRAN

Pembuktian persamaan (4.7)

$$\sum_{J=\text{genap}} (2J+1)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2I\,kT}J\,(J+1)\right] \tag{1}$$

J= 0, 2, 4, …(2m)

Dengan m=0, 1, 2, 3,….

Maka persamaan (1) menjadi :

$$\sum_{m=0}^{\infty}(4m+1)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2I\,kT}2m\,(2m+1)\right] \tag{2}$$

Jika disubstitusikan

$$\begin{aligned} x &= 2m(2m+1) \\ &= 4m^2+2m \end{aligned}$$

sehingga

$$dx = 8m+2$$

maka persamaan (2) dalam bentuk integralnya menjadi :

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{2}dx\,\exp\left(\frac{\hbar^2\,x}{2I\,kT}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{\hbar^2\,x}{2I\,kT}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-\frac{\hbar^2}{2IkT}}\right)\left[\exp\left(-\frac{\hbar^2 x}{2IkT}\right)\right]_0^\infty$$

$$= -\frac{I\,k\,T}{\hbar^2}\left[e^{-\infty} - e^0\right]$$

$$= -\frac{I\,k\,T}{\hbar^2}\left[\frac{1}{e^\infty} - e^0\right]$$

$$= -\frac{I\,k\,T}{\hbar^2}\left[0 - 1\right]$$

$$= \frac{I\,k\,T}{\hbar^2} \qquad (3)$$

Pembuktian persamaan (4.8)

$$\sum_{J\,=\,\text{gasal}} (2J+1)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2I\,kT} J\,(J+1)\right] \qquad (4)$$

J= 1, 3, 5, …(2m+1)

Dengan m=0, 1, 2, 3,….

Maka persamaan (4) menjadi :

$$\sum_{m=0}^{\infty}(4m+3)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2I\,kT}(2m+1)\,(2m+2)\right] \qquad (5)$$

Jika disubstitusikan

$$y = (2m+1)(2m+2)$$
$$= 4m^2 + 6m + 2$$

sehingga

$$dy = 8m + 6$$

maka persamaan (5) dalam bentuk integralnya menjadi

$$\int_{y=2}^{\infty} \frac{1}{2} dy \exp\left(\frac{\hbar^2 y}{2I\,kT}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{y=2}^{\infty} \exp\left(\frac{\hbar^2 y}{2I\,kT}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-\frac{\hbar^2}{2IkT}}\right)\left[\exp\left(-\frac{\hbar^2 y}{2IkT}\right)\right]_2^{\infty}$$

$$= -\frac{I\,k\,T}{\hbar^2}\left[e^{-\infty} - e^{\left(-\frac{\hbar^2 2}{2IkT}\right)}\right]$$

$$= \frac{I\,k\,T}{\hbar^2} \exp\left(-\frac{\hbar^2}{I\,k\,T}\right) \qquad (6)$$

Pembuktian persamaan (4.10)

$$\frac{N_{para}}{N_{ortho}} = \frac{(S+1)}{S} \exp\left(\frac{\hbar^2}{I\,k\,T}\right) \qquad (7)$$

untuk T>>, maka

$$\exp\left(\frac{\hbar^2}{I\,k\,T}\right) \approx e^0$$

$$\approx 1$$

sehingga persamaan (7) dapat didekati :

$$\frac{N_{para}}{N_{ortho}} \approx \frac{(S+1)}{S} \tag{8}$$

substitusi S=1 diperoleh :

$$\frac{N_{para}}{N_{ortho}} \approx 2:1 \tag{9}$$

Pembuktian persamaan (4.11)

$$\sum_{J=genap} (2J+1)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2IkT}J(J+1)\right] \tag{10}$$

J= 0, 2, 4, ...(2m)

Dengan m = 0, 1, 2, 3,....

Maka persamaan (10) menjadi :

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}(4m+1)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2IkT}2m(2m+1)\right]\\ &=1+5\exp\left(-\frac{3\hbar^2}{IkT}\right)+9\exp\left(-\frac{10\hbar^2}{IkT}\right)+...\end{aligned} \tag{11}$$

Untuk T≈0, deret tersebut dapat didekati dengan mengambil suku pertamanya saja yaitu :

$$\sum_{m=0}^{\infty}(4m+1)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2IkT}2m(2m+1)\right] \approx 1 \tag{12}$$

Pembuktian persamaan (4.12)

$$\sum_{J=\text{gasal}} (2J+1)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2IkT}J(J+1)\right] \tag{13}$$

J= 1, 3, 5, ...(2m+1)

Dengan m=0, 1, 2, 3,....

Maka persamaan (13) menjadi

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}(4m+3)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2IkT}(2m+1)(2m+2)\right]\\&=3\exp\left(-\frac{\hbar^2}{IkT}\right)+7\exp\left(-\frac{6\hbar^2}{IkT}\right)+\ldots\end{aligned} \tag{14}$$

Untuk T≈0, deret tersebut dapat didekati dengan mengambil suku pertamanya saja yaitu :

$$\sum_{m=0}^{\infty}(4m+3)\exp\left[-\frac{\hbar^2}{2IkT}(2m+1)(2m+2)\right]\approx 3\exp\left(-\frac{\hbar^2}{IkT}\right) \tag{15}$$