

BAB IV
ANALISIS PERUMUSAN TEORETIS
FAKTOR BENTUK STRUKTUR INTI

4.1 HAMBURAN ELASTIK ELEKTRON-INTI

Untuk kasus hamburan elastik ($\omega = 0$), dengan mengabaikan efek recoil, dapat dibahas adanya hamburan elastik muatan listrik dan hamburan elastik magnet.

Persamaanampang lintang diferensial hamburan elektron dalam suku multipol elektromagnetik telah dijabarkan oleh Sasongko (1985) yang memiliki bentuk sebagaimana diperlihatkan dalam persamaan A.52 (lihat lampiran-A). Persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi (Wong, 1990 : 127) :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ip} = \frac{Z^2 \sigma_M}{1 + (2\epsilon \sin^2 \frac{1}{2}\theta)/M} \left[F_L(q)^2 + \left(\frac{1}{2} + \tan^2 \frac{1}{2}\theta\right) F_T(q)^2 \right]. \quad (4.1)$$

$F_L(q)$ disebut sebagai faktor struktur longitudinal dan $F_T(q)$ disebut sebagai faktor struktur transversal, sedangkan indeks ip menyatakan bahwa persamaanampang lintang tersebut untuk hamburan elektron tak terpolarisasi yakni elektron terhambur hanya fungsi sudut polar θ . Dalam faktor struktur longitudinal terkandung multipol muatan inti, sedangkan dalam faktor struktur transversal terkandung multipol listrik dan multipol magnet inti.

Hamburan yang diuraikan dalam formula Mott dan Dirac adalah hamburan untuk muatan titik. Hal ini benar jika energi elektron adalah kecil sehingga panjang gelombang de Broglie-nya akan lebih besar dibandingkan ukuran inti. Namun jika energi elektron dinaikkan hingga panjang gelombang de Broglie-nya lebih kecil dibandingkan ukuran inti, maka struktur inti yakni distribusi rapat muatan dan magnetisasinya akan tampak (Wong, 1990 : 125).

4.1.1 Analisis Faktor Struktur Muatan Inti

Hamburan elastik menyebabkan inti tetap pada keadaan *ground state*, $J_i = J_f = J_0$, sehingga persamaan (A.52) untuk suku multipol muatan dapat dituliskan sebagai berikut (Eisenberg, 1988 : 169) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{el} &= \frac{4\pi\sigma_M}{1 + (2E \sin^2 \frac{1}{2}\theta)/M} \frac{1}{2J_0 + 1} \sum_{J \geq 0} \left| \langle J_0 \| \hat{M}_J^{coul}(q) \| J_0 \rangle \right|^2 \\ &= \frac{Z^2 \sigma_M |F_L(q)|^2}{1 + (2E \sin^2 \frac{1}{2}\theta)/M}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pada persamaan tersebut hanya menyisakan faktor struktur longitudinal $F_L(q)$ yang sekaligus juga merupakan faktor struktur muatan elastik, dengan faktor struktur $F_L(q)$ yang didefinisikan sebagai :

$$|F_L(q)|^2 \equiv \frac{4\pi}{Z^2} \frac{1}{2J_0 + 1} \sum_{J=0} \left| \langle J_0 \| \hat{M}_J^{coul}(q) \| J_0 \rangle \right|^2. \quad (4.3)$$

Diperlihatkan dalam persamaan (4.3) bahwa faktor struktur longitudinal merupakan sumbangan dari multipol muatan di dalam inti. Untuk dapat mengetahui struktur muatan inti (monopol, dipol, ataukah kuadropol), maka harus dapat diketahui sebelumnya orde multipol muatan di dalam persamaan (4.3). Orde multipol muatan inti yang memberikan sumbangan dapat diketahui melalui kaidah kesimetrian paritas (de Shalit, 1963 : 154).

Dari definisi operator multipol Coulomb pada persamaan (A.17), terkandung fungsi gelombang $Y_{JM}(\theta, \phi)$, yakni harmonik sferik dengan orde J mempunyai bentuk eksplisit (Wong, 1990 : 390) :

$$Y_{JM}(\theta, \phi) = (-1)^{\frac{1}{2}(M+|M|)} \left\{ \frac{2J+1}{4\pi} \frac{(J-|M|)!}{(J+|M|)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \sin^{|M|} \theta \quad (4.4)$$

$$\otimes \frac{1}{2^J J!} \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^{J+|M|} (\cos^2 \theta - 1)^J \exp(iM\phi).$$

Nilai paritas dapat tentukan melalui transformasi pencerminan (Wong, 1990 : 391; de Shalit, 1963 : 102) fungsi harmonik sferik dalam persamaan (4.4) terhadap titik acuan, yaitu :

$$\begin{aligned}
Y_{JM}(\pi - \theta, \phi + \pi) &= (-1)^{\frac{1}{2}(M+|M|)} \left\{ \frac{2J+1}{4\pi} \frac{(J-|M|)!}{(J+|M|)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \sin^{|M|}(\pi - \theta) \\
&\otimes \frac{1}{2^J J!} \left(\frac{d}{d \cos(\pi - \theta)} \right)^{J+|M|} (\cos^2(\pi - \theta) - 1)^J \exp(iM(\phi + \pi)) \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}(M+|M|)} \left\{ \frac{2J+1}{4\pi} \frac{(J-|M|)!}{(J+|M|)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \sin^{|M|} \theta \\
&\otimes \frac{1}{2^J J!} \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^{J+|M|} (\cos^2 \theta - 1)^J \exp(iM\phi).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Persamaan paritas untuk $Y_{JM}(\theta, \phi)$ dapat dituliskan (Brink, 1975 : 18-19 dan Wong, 1990 : 67) :

$$\begin{aligned}
Y_{JM}(\theta, \phi) &\xrightarrow{p} Y_{JM}(\pi - \theta, \pi + \phi) \\
&= \hat{\pi} Y_{JM}(\theta, \phi) \hat{\pi}^{-1} = (-1)^J Y_{JM}(\theta, \phi),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

sehingga persamaan paritas untuk operator multipol Coulomb adalah :

$$\hat{\pi} \hat{M}_J^{coul}(q) \hat{\pi}^{-1} = (-1)^J \hat{M}_J^{coul}(q). \tag{4.7}$$

Pada persamaan (4.7) tampak bahwa operator multipol Coulomb (muatan) mempunyai paritas $(-1)^J$. Operator multipol Coulomb pada persamaan (4.7) akan simetri jika J adalah suatu bilangan genap. Oleh karena itu integrasi pada persamaan (A.17) akan hanya bernilai untuk fungsi-fungsi genap, dengan kata lain bahwa dalam multipol Coulomb, hanya J genap saja yang dapat memberikan

sumbangan dalam hamburan, yakni : C_0, C_2, C_4, \dots yang berarti bahwa struktur muatan inti adalah berbentuk monopol, kuadrupol dan seterusnya (Eisenberg, 1988 : 175).

Menurut Eisenberg (1988), untuk deuteron pada keadaan *ground state* yaitu dengan spin $J=1$, persamaan (4.2) akan menjadi bentuk yang lebih sederhana karena hanya terdapat dua sumbangan yang memenuhi persyaratan penjumlahan momentum orbital. Hal ini disebabkan karena deuteron memiliki dua nilai momentum angular orbital yaitu $L=0$ dan $L=2$, sehingga ada dua sumbangan yang memenuhinya yaitu C_0 dan C_2 . Oleh karena itu persamaanampang lintang diferensial yang berbentuk :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{el} = \frac{Z^2 \sigma_M |F_L(q)|^2}{1 + (2E \sin^2 \frac{1}{2}\theta) / M} \quad (4.8)$$

memiliki faktor struktur $F_L(q)$ yang akan disumbang oleh multipol muatan inti (Coulomb) pada keadaan *ground state* dua macam.

Faktor struktur muatan untuk distribusi muatan inti pada *ground state* memiliki bentuk :

$$|F_L(q)| \equiv \frac{\sqrt{4\pi}}{Z} \langle I || \hat{M}_J^{cool}(q) || I \rangle. \quad (4.9)$$

dengan bentuk umum elemen matrik dalam mekanika kuantum :

$$\left\langle l \left\| \hat{M}^{coul} \right\| l \right\rangle = \int \psi^*(r) \hat{M}^{coul} \psi(r) d^3r \quad (4.10)$$

Karena deuteron memiliki dua fungsi gelombang *ground state* dari dua komponen *state* yaitu $L=0$ dan $L=2$, maka elemen matrik yang dihasilkan akan memiliki bentuk kombinasi, yaitu :

$$\begin{aligned} \langle l m_l | \hat{M}_{00}^{coul}(q) | l m_l \rangle &= \langle 00 | \hat{M}_{00}^{coul}(q) | 00 \rangle + 2 \langle 00 | \hat{M}_{00}^{coul}(q) | 22 \rangle \\ &+ \langle 22 | \hat{M}_{00}^{coul}(q) | 22 \rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dengan teorema Wigner-Eckart persamaan (A.18) dan bentuk koefisien Clebsch-Gordan persamaan (F.1) diperoleh suku kedua persamaan (4.11) bernilai nol, sehingga hanya tersisa dua suku yaitu suku pertama dan ketiga, hasil elemen matrik tereduksinya berbentuk :

$$\langle l \left\| \hat{M}_{00}^{coul}(q) \right\| l \rangle = \langle 0 \left\| \hat{M}_{00}^{coul}(q) \right\| 0 \rangle + \langle 2 \left\| \hat{M}_{00}^{coul}(q) \right\| 2 \rangle. \quad (4.12)$$

Dengan menerapkan fungsi gelombang *ground state* deuteron persamaan (E.9) ke dalam elemen matrik persamaan (4.12) diperoleh :

$$\begin{aligned} \langle l \left\| \hat{M}_{00}^{coul}(q) \right\| l \rangle &= \frac{1}{4\pi r^2} \int (u^2 + w^2) j_0\left(\frac{1}{2}qr\right) Y_{00}(\theta, \phi) d^3r \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int (u^2 + w^2) j_0\left(\frac{1}{2}qr\right) dr \end{aligned} \quad (4.13)$$

sehingga persamaan faktor struktur deuteron pada keadaan *ground state* berbentuk :

$$F_L(q) = \frac{1}{Z} \int (u^2 + w^2) j_0\left(\frac{1}{2}qr\right) dr. \quad (4.14)$$

Sebagaimana perolehan struktur muatan sferik, struktur kuadropol juga ditentukan dari kombinasi elemen matrik dua fungsi gelombang dengan bentuk sebagai berikut :

$$\langle lm_l | \hat{Q}_{20}(q) | lm_l \rangle = \langle 00 | \hat{Q}_{20}(q) | 00 \rangle + 2 \langle 00 | \hat{Q}_{20}(q) | 22 \rangle + \langle 22 | \hat{Q}_{20}(q) | 22 \rangle, \quad (4.15)$$

dengan \hat{Q}_{20} adalah operator kuadropol yang berbentuk :

$$\hat{Q}_{20} = \frac{1}{4} r^2 \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_{20}(\theta, \phi). \quad (4.16)$$

Penerapan teorema Wigner-Eckart persamaan (A.18) dan bentuk koefisien Clebsch-Gordan persamaan (F.3) untuk menghasilkan elemen matrik tereduksi diperoleh suku pertama persamaan (4.15) bernilai nol, sehingga elemen matrik tereduksinya menjadi :

$$\langle 1 \| \hat{Q}_{20}(q) \| 1 \rangle = 2 \langle 0 \| \hat{Q}_{20}(q) \| 2 \rangle + \langle 2 \| \hat{Q}_{20}(q) \| 2 \rangle. \quad (4.17)$$

Dengan menerapkan fungsi gelombang deuteron persamaan (E.9) dan operator kuadrupol persamaan (4.16) diperoleh elemen matrik persamaan (4.17) yang berbentuk :

$$\langle 1 \| \hat{Q}_{20}(q) \| 1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int (2uw - \frac{2}{\sqrt{8}} w^2) j_2(\frac{1}{2}qr) dr, \quad (4.18)$$

sehingga persamaan faktor struktur kuadrupolnya adalah :

$$F_Q(q) = \frac{1}{Z} \int (2uw - \frac{2}{\sqrt{8}} w^2) j_2(\frac{1}{2}qr) dr. \quad (4.19)$$

Dengan menuliskan bentuk fungsi Bessel sferik orde-0, persamaan (4.14) dapat dituliskan menjadi :

$$|F_E(q)| \equiv \frac{2}{Z} \left[\int (u^2 + w^2) \frac{\sin \frac{1}{2}qr}{qr} dr \right]. \quad (4.20)$$

Persamaan (4.20) dapat diperoleh setelah menganggap bahwa muatannya terdistribusi dalam bentuk bola, sehingga dalam persamaan tersebut dapat digantikan $d^3r = 4\pi r^2 dr$. Besaran $(u^2 + w^2)$ yang merupakan kuadrat fungsi

radial *state triplet-S* dan *triplet-D* adalah sebagai fungsi distribusi rapat muatan listrik inti dalam keadaan dasar yaitu $4\pi r^2 \rho_0$, sehingga dapat ditentukan ukuran dan distribusi muatan inti.

Untuk menganalisis faktor struktur kuadrupol dari hamburan elastik elektron ($q \approx 0$) oleh deuteron dapat dilakukan sebagai berikut; Persamaan (4.19) untuk $q \approx 0$ akan berbentuk (lihat lampiran-E) :

$$|F_Q(q)| \equiv \frac{q^2}{15} \left[\int (2uw - \frac{2}{\sqrt{8}} w^2) r^2 dr \right] \quad (4.21)$$

setelah diperoleh momen kuadrupol yang berbentuk (lihat lampiran-E) :

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{20} \left[\int (uw - \frac{\sqrt{2}}{4} w^2) r^2 dr \right] \quad (4.22)$$

maka persamaan (4.21) dapat dituliskan menjadi :

$$F_Q(q) = \frac{\sqrt{8}}{3} (\frac{1}{2}q)^2 Q$$

atau

$$|F_Q(q)|^2 = \frac{8}{9} (\frac{1}{2}q)^4 Q^2 \quad (4.23)$$

Persamaan (4.23) menunjukkan besarnya momen kuadropol listrik deuteron Q yang diperoleh dari hubungan faktor struktur sebagai fungsi alih momentum q melalui hamburan elektron-Deuteron.

4.1.2 Analisis Faktor Struktur Momen Magnet Inti

Untuk nilai alih momentum yang lebih tinggi maka pengaruh magnetik inti akan muncul dalam interaksi elektron-inti. Jika hamburan elastik muatan memberikan gambaran terbaik tentang distribusi muatan listrik inti dalam keadaan dasar (Hofstadter, 1956 : 222), maka hamburan elastik magnetik akan memberikan gambaran terperinci tentang arus inti pada keadaan dasar (Wong, 1990 : 147).

Berbeda dengan hamburan elastik muatan dimana neutron sama sekali tidak berperan apapun, maka dalam hamburan elastik magnetik, neutron menyumbang arus inti lewat magnetisasi spin intrinsiknya (Wong, 1990 : 147).

Di dalam inti, operator arus total dapat dipisahkan atas bagian arus konveksi dan bagian arus yang berasal dari momen magnet intrinsik inti. Operator Hamiltonian interaksi intinya memiliki bentuk (Sasongko, 1985 : 39) :

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -e \int \hat{J}_N(\vec{x}) \cdot \hat{A}(\vec{x}) d^3x - \frac{e}{2M} \int \hat{\mu}_N \cdot \nabla \times \hat{A}(\vec{x}) d^3x \\ & + e \int \hat{\rho}_N(\vec{x}) \hat{A}_0(\vec{x}) d^3x, \end{aligned} \quad (4.24)$$

dengan :

$\hat{J}_N(\vec{x})$ adalah operator rapat arus konveksi, dan

$\hat{\mu}_N(\vec{x})$ adalah operator rapat magnetisasi.

Dengan mengingat hubungan :

$$\int_V \nabla \cdot (\hat{\mu}_N \times \hat{A}) dv = - \int \hat{\mu}_N \cdot (\nabla \times \hat{A}) d^3x + \int \hat{A} \cdot (\nabla \times \hat{\mu}_N) d^3x, \quad (4.25)$$

dan dari teorema Gauss :

$$\int_V \nabla \cdot (\hat{\mu}_N \times \hat{A}) dv = \int_{S_\infty} (\hat{\mu}_N \times \hat{A}) \cdot d\vec{S} = 0, \quad (4.26)$$

diperoleh :

$$\int \hat{\mu}_N \cdot (\nabla \times \hat{A}) d^3x = \int \hat{A} \cdot (\nabla \times \hat{\mu}_N) d^3x, \quad (4.27)$$

maka persamaan (4.24) menjadi :

$$\hat{H} = -e \int \left\{ \hat{J}_N(\vec{x}) + \frac{1}{2M} \nabla \times \hat{\mu}_N(\vec{x}) \right\} \cdot \hat{A}(\vec{x}) d^3x + e \int \hat{\rho}_N(\vec{x}) \hat{A}_0(\vec{x}) d^3x. \quad (4.28)$$

Dari persamaan (4.28), dapat dituliskan operator rapat arus total yaitu :

$$\hat{\mathbf{J}}(\vec{x}) = \hat{\mathbf{J}}_N(\vec{x}) + \frac{1}{2M} \nabla \times \hat{\boldsymbol{\mu}}_N(\vec{x}). \quad (4.29)$$

Substitusi persamaan (4.29) ke dalam persamaan (A.38 dan A.39), serta dengan menerapkan persamaan Helmholtz untuk ketergantungan ruang, yang berbentuk (Eisenberg, 1988 : 43) :

$$(\nabla^2 + \vec{q}^2) j_J(qx) \bar{Y}_{JL}^M = 0, \quad (4.30)$$

maka diperoleh operator multipol listrik dan multipol magnet transversal baru yang berbentuk :

$$\hat{T}_{JM}^{el}(q) = \frac{1}{q} \int \left\{ \nabla \times (j_J(qx) \bar{Y}_{JL}^M) \hat{\mathbf{J}}_N(x) + \frac{\vec{q}^2}{2M} (j_J(qx) \bar{Y}_{JL}^M) \hat{\boldsymbol{\mu}}_N(\vec{x}) \right\} d^3x \quad (4.31a)$$

$$\hat{T}_{JM}^{mag}(q) = \int \left\{ (j_J(qx) \bar{Y}_{JL}^M) \hat{\mathbf{J}}_N(x) + \frac{1}{2M} \nabla \times (j_J(qx) \bar{Y}_{JL}^M) \hat{\boldsymbol{\mu}}_N(\vec{x}) \right\} d^3x. \quad (4.31b)$$

Oleh transformasi pencerminan operator-operator multipol transversal terhadap acuan (Brink, 1975 : 61-62 dan Cohen, 1971), diperoleh aturan paritas (de Shalit, 1963 : 154) :

$$\hat{\pi} \hat{T}_{JM}^{el}(q) \hat{\pi}^{-1} = (-1)^J \hat{T}_{JM}^{el}(q) \quad (4.32a)$$

$$\hat{\pi} \hat{T}_{JM}^{mag}(q) \hat{\pi}^{-1} = (-1)^{J+1} \hat{T}_{JM}^{mag}(q), \quad (4.32b)$$

Paritas dalam persamaan (4.32a) adalah $(-1)^J$, sehingga persamaan tersebut akan dikatakan simetri jika $J =$ bilangan genap, sementara pada persamaan (4.32b) diperoleh paritas dengan nilai $(-1)^{J+1}$, sehingga persamaan tersebut akan simetri jika $J =$ bilangan ganjil. Orde yang diperoleh dari kekekalan paritas (kesimetrian) tersebut akan menyebabkan tidak adanya sumbangan multipol listrik ganjil dan multipol magnet genap dalam proses hamburan, sehingga hanya multipol magnet ganjil saja yang menyumbang hamburan, yakni : M1, M3, M5, ... dan seterusnya, dan hanya multipol listrik genap yang menyumbang hamburan yakni : E0, E2, E4, ... dan seterusnya (Eisenberg, 1988 : 172).

Untuk hamburan elastik magnetik inti, dengan $J_i = J_f = J \neq 0$, maka besaran yang terukur pada hamburan ditentukan oleh faktor struktur yang berbentuk :

$$|F_T(q)|^2 = \frac{4\pi}{Z^2} \frac{1}{2J_0 + 1} \sum_{J_{mag}} \left| \langle J_0 \| \hat{T}_J^{mag}(q) \| J_0 \rangle \right|^2. \quad (4.33)$$

Sumbangan persamaan (4.33) dalamampang lintang persamaan (A.52) dapat diekstraksi dari garis lurus yang menghubungkan F^2 vs. $\tan^2 \frac{1}{2} \theta$ untuk harga q^2 yang dibuat tetap, atau dapat juga diperoleh dengan hamburan 180° di mana

hanya $|F_T(q)|^2$ saja yang memberikan sumbangan kepada hamburan (Eisenberg, 1988 : 175).

Adapun hubungan faktor struktur transversal $F_T(q)$ dengan momen multipol magnetik dapat di analisis yaitu dengan menjabarkan elemen matrik tereduksi dalam persamaan (4.33) sebagai berikut.

Persamaan (4.32) dapat dituliskan kembali dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \hat{T}_{JM}^{mag}(q) &= \int \left[\left\{ (-1)^{J(J+1)} \right\}^{-\frac{1}{2}} (\bar{x} \times \nabla) (j_J(qx) \bar{Y}_{JM}(\Omega)) \right\} \hat{J}_N(x) \\ &\quad + \frac{1}{2M} \nabla \times (j_J(qx) \bar{Y}_{JM}^M) \cdot \hat{\mu}(\bar{x}) \right] d^3x \\ &= \int \left[\left\{ (J(J+1))^{-\frac{1}{2}} \nabla (j_J(qx) \bar{Y}_{JM}(\Omega)) \right\} (\bar{x} \times \hat{J}_N(x)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2M} \nabla \times (j_J(qx) \bar{Y}_{JM}^M) \cdot \hat{\mu}(\bar{x}) \right] d^3x \end{aligned} \quad (4.34)$$

Dengan memakai persamaan (C.2) dan hubungan :

$$\begin{aligned} (\bar{x} \times \nabla) (j_J(qx) \bar{Y}_{JM}(\Omega)) &= \left\{ -\nabla (j_J(qx) \bar{Y}_{JM}(\Omega)) \right\} (\bar{x} \times \hat{J}_N(x)) \\ &= \left\{ -\nabla (j_J(qx) \bar{Y}_{JM}(\Omega)) \right\} \hat{L}_N(x) \quad , \end{aligned} \quad (4.35)$$

dimana : $\hat{L}_N(x) = (\bar{x} \times \hat{J}_N(x))$, yang didefinisikan sebagai operator rapat momentum sudut, dan dengan memakai persamaan (C.9) dan (C.10) pada

lampiran-C, persamaan (4.32) dapat dibawa ke dalam bentuk (Sasongko, 1985 :

43):

$$\begin{aligned}
 -i\hat{T}_{JM}^{mag}(q) &= \int \left[\left\{ (J(J+1))^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{J+1}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} (j_{J+1}(qx) \bar{Y}_{JM}^M) + \left(\frac{J}{2J+1} \right) (j_{J-1}(qx) \bar{Y}_{JM}^M) \right\} \hat{L}_N(x) \right. \\
 &+ \left. \left\{ - \left(\frac{J}{12J+1} \right)^{\frac{1}{2}} (j_{J+1}(qx) \bar{Y}_{JM}^M) + \frac{1}{2M} \left(\frac{J+1}{2J+1} \right) (j_{J-1}(qx) \bar{Y}_{JM}^M) \right\} \hat{\mu}(\bar{x}) \right] d^3x \quad (4.36) \\
 &= \left(\frac{J+1}{J} \right)^{\frac{1}{2}} \int \{ \nabla (j_J(qx) Y_{JM}(\Omega)) \} \left\{ \frac{\hat{L}_N(x)}{J+1} + \frac{\hat{\mu}(\bar{x})}{2M} \right\} d^3x
 \end{aligned}$$

Dalam pendekatan $q \approx 0$, fungsi Bessel sferik memiliki bentuk (Krane, 1988 : 28)

: $j_J(qx) \xrightarrow{q \approx 0} (qx)^J / (2J+1)!!$, sehingga persamaan (4.36) menjadi :

$$\begin{aligned}
 -i\hat{T}_{JM}^{mag}(q) &\xrightarrow{q \approx 0} \left(\frac{J+1}{J} \right)^{\frac{1}{2}} q^J \int \{ \nabla (x^J Y_{JM}(\Omega)) \} \left\{ \frac{\hat{L}_N(x)}{J+1} + \frac{\hat{\mu}(\bar{x})}{2M} \right\} d^3x \\
 &\xrightarrow{q \approx 0} \left(\frac{J+1}{J} \right)^{\frac{1}{2}} q^J \frac{(2J+1)^{\frac{1}{2}}}{(4\pi)^{\frac{1}{2}} (2J+1)!!} \hat{\mu}_{JM}
 \end{aligned} \quad (4.37)$$

dengan $\hat{\mu}_{JM}$ adalah operator momen multipol magnetik untuk J -gasal, yang didefinisikan sebagai (Eisenberg, 1988 : 176) :

$$\hat{\mu}_{JM} \equiv \left(\frac{4\pi}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} \int \{ \nabla (x^J Y_{JM}(\Omega)) \} \left\{ \frac{\hat{L}_N(x)}{J+1} + \frac{\hat{\mu}(\bar{x})}{2M} \right\} d^3x. \quad (4.38)$$

Harga harap operator $\hat{\mu}_{JM}$ dalam state $M=J_0$ didefinisikan sebagai :

$$\left\langle J_0 J_0 \left| \hat{\mu}_{J_0} \right| J_0 J_0 \right\rangle \equiv \frac{\bar{\mu}_J}{2M}, \quad (4.39)$$

dengan $\bar{\mu}_J$ = momen magnetik J.gasal.

Persamaan (4.39) dapat di analisis lebih lanjut; Dengan menggunakan teorema Wigner-Eckart, elemen matrik momen magnetiknya dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\left\langle J_0 J_0 \left| \hat{\mu}_{J_0} \right| J_0 J_0 \right\rangle = (-1)^{J_0 - J_0} \begin{pmatrix} J_0 & 1 & J_0 \\ -J_0 & 0 & J_0 \end{pmatrix} \left\langle J_0 \left\| \hat{\mu}_J \right\| J_0 \right\rangle, \quad (4.40)$$

sehingga dengan memasukkan hasil persamaan (4.39) ke dalam persamaan (4.40) diperoleh (lihat lampiran-D):

$$\frac{1}{2J_0 + 1} \left\langle J_0 \left\| \hat{\mu}_J \right\| J_0 \right\rangle^2 = \left(\frac{J_0 + 1}{J_0} \right) \left(\frac{\bar{\mu}_J}{2M} \right)^2 \quad (4.41)$$

Berdasarkan persamaan (4.41), maka kuadrat elemen matrik tereduksi persamaan (4.37) adalah :

$$\frac{1}{2J_0 + 1} \left| \langle J_0 \| T_J^{mag}(q) \| J_0 \rangle \right|^2 = \frac{(J+1)(2J+1)(J_0+1)}{4\pi J((2J+1)!)^2 J_0} \left(\frac{q^J \mu_J}{2M} \right)^2, \quad (4.42)$$

sehingga dari substitusi persamaan (4.42) ke dalam persamaan (4.33), diperoleh faktor struktur transversal yang berbentuk :

$$|F_T(q)|^2 = \frac{4\pi}{Z^2} \sum_{J \geq 1} \frac{(J+1)(2J+1)(J_0+1)}{4\pi J((2J+1)!)^2 J_0} \left(\frac{q^J \mu_J}{2M} \right)^2. \quad (4.43)$$

Untuk kasus alih momentum dalam hamburan yang sangat kecil, limit $q \rightarrow 0$, maka dapat dikatakan bahwa inti adalah masih dalam keadaan *ground state*. Oleh karena itu sumbangan multipol magnet state dasar (M1) yaitu momen dipol magnet adalah yang paling dominan, dan untuk $J=1$ persamaan (4.43) menjadi :

$$|F_1(q)|^2 \xrightarrow{q \rightarrow 0} = \frac{4\pi}{Z^2} \frac{2}{6\pi} \frac{(J_0+1)}{J_0} \left(\frac{q\mu}{2M} \right)^2 \quad (4.44)$$

dimana : $\mu = \mu_1 =$ momen dipol magnetik inti (dalam satuan magneton nuklir).

Untuk deuteron, elemen matrik operator multipol magnetiknya dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\langle \hat{T}_{JM}^{mag}(q) \rangle = \int \{ \nabla(J,(\mathbf{q}\mathbf{x})Y_{JM}(\Omega)) \} \left\{ \frac{\langle L \cdot J \rangle}{J(J+1)(J+1)} + \frac{\hat{\mu}_i \langle S \cdot J \rangle}{2MJ(J+1)} \right\} J d^3x, \quad (4.45)$$

sehingga dengan menerapkan fungsi gelombang *ground state* deuteron, diperoleh persamaan faktor struktur (lihat persamaan D.21) yang berbentuk :

$$|F_M(q)| = \frac{1}{Z} \frac{1}{(2J+1)^{\frac{1}{2}}} \left[\int_0^{\infty} \left\{ (\mu_p + \mu_n)u^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - (\mu_p + \mu_n) \right) w^2 \right\} j_0\left(\frac{1}{2}qr\right) dr \right] \quad (4.46)$$

Faktor struktur magnet deuteron yang diperlihatkan dalam persamaan (4.46) menunjukkan adanya sumbangan momen dipol magnetik dari komponen *state triplet-S* dan juga dari komponen *state triplet-D*.

Persamaan (4.46) diperoleh dengan mengabaikan fungsi Bessel orde-2 karena untuk q yang kecil nilai fungsi tersebut jauh lebih kecil dibandingkan fungsi Bessel orde-0. Adapun jika tidak diabaikan maka akan didapatkan persamaan faktor struktur magnetik deuteron sebagaimana yang telah diperoleh Jankus dalam tesisnya (Jankus, 1957 : 1587) yaitu :

$$|F_M(q)| = \left[\int_0^{\infty} \left\{ (\mu_p + \mu_n)u^2 - \frac{1}{2}(\mu_p + \mu_n - \frac{3}{2})w^2 \right\} j_0\left(\frac{1}{2}qr\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\mu_p + \mu_n)uw + \frac{1}{2}(\mu_p + \mu_n + \frac{3}{2})w^2 \right\} j_2\left(\frac{1}{2}qr\right) \right] dr \quad (4.47)$$

Untuk nilai alih momentum yang kecil, harga dari fungsi Bessel orde-2 dalam persamaan (4.47) akan jauh lebih kecil dibandingkan fungsi Bessel orde-0. Oleh karena itu suku ketiga dan keempat dalam persamaan (4.47) dapat diabaikan, dan persamaan (4.47) akan menjadi persamaan (4.46). Suku pertama dalam

persamaan (4.46) merupakan sumbangan momen magnet dari komponen *state triplet-S* dan suku kedua menunjukkan sumbangan momen magnet oleh komponen *state triplet-D*.

Oleh karena itu dari hubungan antara persamaan (4.46) dengan persamaan (4.43) menunjukkan bahwa momen dipol magnetik μ_1 deuteron yang terukur melalui hamburan berdasarkan persamaan (4.43) disumbang oleh komponen *state triplet-S* sebesar $(\mu_p + \mu_n)$ dan dari komponen *state triplet-D* sebesar $\frac{1}{2}(\frac{3}{2} - (\mu_p + \mu_n))$.

4.2 HAMBURAN TAK ELASTIK ELEKTRON-INTI

Hamburan elektron tak elastik terjadi untuk alih momentum $q > 0$. Dalam hamburan ini, elektron mengalihkan momentum sebesar q kepada inti sehingga memungkinkan inti dapat tereksitasi ataupun ter-elektrodisintegrasi.

4.2.1 Eksitasi pertama inti

Eksitasi yang pertama terjadi pada inti merupakan transisi dipol, dimana sumbangannya berasal dari multipol listrik transversal dan multipol longitudinal (Eisenberg, 1988 : 218.220).

4.2.1.1 Analisis Faktor Struktur Listrik Inti

Sumbangan yang berasal dari multipol listrik transversal, untuk $q \approx 0$ ternyata mengakibatkan elemen matriknya dapat direduksi hingga dapat disajikan dalam suku multipol Coulomb. Persamaan (4.31a) dapat dituliskan dalam elemen matriknya :

$$\langle J_F \|\hat{T}_{JM}^{el}(q)\|J_I \rangle = \frac{1}{q} \int \left\{ \nabla \times (j_J(qx) \bar{Y}_{JM}^M) \cdot \hat{J}_N(x) + \frac{\bar{q}^2}{2M} (j_J(qx) \bar{Y}_{JM}^M \cdot \hat{\mu}_N(\bar{x})) \right\} d^3x \quad (4.48)$$

Dengan memakai salah satu sifat vektor harmonik sferik

$\bar{Y}_{JM}^M = (J(J+1))^{-\frac{1}{2}} (-i)(\bar{x} \times \nabla) Y_{JM}(\Omega)$, persamaan (4.48) dapat di ubah menjadi :

$$\begin{aligned} \langle J_f \|\hat{T}_{JM}^{el}(q)\|J_i \rangle &= \frac{1}{iq(J(J+1))^{\frac{1}{2}}} \int \left\{ \nabla \times (j_J(qx) (\bar{x} \times \nabla) Y_{JM}(\Omega)) \cdot \hat{J}_N(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{q}^2}{2M} (j_J(qx) (\bar{x} \times \nabla) Y_{JM}(\Omega) \cdot \hat{\mu}_N(\bar{x})) \right\} d^3x \end{aligned} \quad (4.49)$$

untuk pendekatan $q \approx 0$; $j_J(qx) = (qx)^J / (2J+1)!!$, dan dengan memakai hubungan.hubungan dari beberapa sifat vektor harmonik sferik dan fungsi Bessel sferik (lampiran-C) serta kekekalan arus $\nabla \cdot \hat{J}_N(\bar{x}) = -i[\hat{H}, \hat{\rho}_N(x)]$, maka persamaan (4.49) menjadi (Sasongko, 1985 : 49) :

$$\begin{aligned} \langle J_f \|\hat{T}_{JM}^{el}(q)\|J_i \rangle &\xrightarrow{q \approx 0} (-i) q^{J-1} ((J+1)/J)^{\frac{1}{2}} / (2J+1)!! \\ &\otimes \int x^J Y_{JM}(\Omega_x) \left\{ \nabla \cdot \hat{J}_N(x) + \frac{1}{2M} (q^2 / (J+1)) \nabla \cdot (\bar{x} \times \mu_N(x)) \right\} d^3x \\ &\xrightarrow{q \approx 0} -q^{J-1} ((J+1)/J)^{\frac{1}{2}} / (2J+1)!! \\ &\otimes \int \left\{ x^J Y_{JM}(\Omega_x) [\hat{H}, \hat{\rho}_N(x)] + \frac{i}{2M} (q^2 / (J+1)) \mu_N(x) \cdot \right. \\ &\quad \left. (\bar{x} \times \nabla \cdot (x^J Y_{JM}(\Omega_x))) \right\} d^3x \end{aligned} \quad (4.50)$$

Untuk real foton, suku kedua dengan orde $q^J / M = \omega / M \ll 1$ dapat diabaikan terhadap suku pertama, sehingga dengan memakai hubungan $E = E' + \omega$ persamaan (4.50) menjadi :

$$\begin{aligned} \langle J_f \| \hat{T}_{JM}^{el}(q) \| J_i \rangle &\xrightarrow{q \approx 0} \left(\frac{E - E'}{q} \right) (J+1)/J)^{\frac{1}{2}} \int \frac{x^J}{(2J+1)!!} Y_{JM}(\Omega_x) \rho(\vec{x}) d^3x \\ &= \frac{\omega}{q} (J+1)/J)^{\frac{1}{2}} \langle J_f \| \hat{M}_J^{coul}(q) \| J_i \rangle \end{aligned} \quad (4.51)$$

Untuk eksitasi pertama $J=1$, dari persamaan (4.51) diperoleh faktor struktur transversal dari sumbangan multipol listrik yang berbentuk :

$$\begin{aligned} |F_T(q)|^2 &\equiv \frac{4\pi}{Z^2} \frac{1}{2J_0+1} \sum_{J_{\text{coul}}} \left| \langle J_f \| \hat{T}_J^{el}(q) \| J_i \rangle \right|^2 \\ &\equiv \frac{4\pi}{Z^2} \frac{2}{2J_0+1} \left(\frac{\omega}{q} \right)^2 \left| \langle J_f \| \hat{M}_J^{coul}(q) \| J_i \rangle \right|^2. \end{aligned} \quad (4.52)$$

4.2.1.2 Analisis Faktor Struktur Muatan Inti

Analisis mengenai sumbangan muatan transisi terhadap faktor struktur transversal dilakukan sebagai berikut; Dari persamaan operator multipol muatan yang berbentuk :

$$\hat{M}_J^{coul}(q) = \int \hat{\rho}_N(\vec{x}) j_1(qx) Y_{J0}(\Omega_x) d^3x, \quad (4.53)$$

untuk eksitasi pertamanya $J_i=1$, menjadi :

$$\hat{M}_J^{coll}(q) = \int \hat{\rho}_N(\vec{x}) j_1(qx) Y_{10}(\Omega_x) d^3x, \quad (4.54)$$

dengan $\hat{\rho}_N(\vec{x})$ adalah rapat muatan inti yang merupakan rapat muatan kesetimbangan $\hat{\rho}_0(\vec{x})$ yang tergeser sejauh $\vec{S} = (N/A)\vec{r}$ dimana \vec{r} merupakan vektor posisi diukur dari pusat massa. Rapat muatan pada hamburan tak elastik elektron oleh inti yang akan muncul dalam perumusan faktor struktur adalah rapat muatan transisi (Burcham, 1963 : 343). Rapat muatan inti transisi dapat disajikan dengan bentuk :

$$\hat{\rho}_N(\vec{x}) = \hat{\rho}(\vec{x} - (N/A)\vec{r}), \quad (4.55)$$

dengan N adalah jumlah proton dan A adalah jumlah nukleon. Apabila pergeserannya dianggap kecil, maka dapat dilakukan perluasan \vec{r} dalam persamaan (4.55). Perluasan pada orde pertama memberikan nilai :

$$\hat{\rho}_N(\vec{x}) \approx \hat{\rho}(\vec{x} - (N/A)\vec{r} \cdot (\vec{x}/x)). \quad (4.56)$$

Substitusi persamaan (4.56) ke dalam persamaan (4.54) menghasilkan operator multipol muatan yang berbentuk :

$$\begin{aligned}\hat{M}_J^{coul}(q) &\approx \int \hat{\rho}_N(x - (N/A)\vec{r} \cdot (\vec{x}/x)) j_1(qx) Y_{10}(\Omega) d^3x \\ &\approx -(N/A)\vec{r} \cdot \int Y_{10}(\Omega_x) d\Omega_x \int \vec{x} \rho_0(x) j_1(qx) x^2 dx\end{aligned}\quad (4.57)$$

Dalam persamaan (4.57), suku pertama integrasi menjadi nol karena hasil integrasi terhadap fungsi ganjil x^3 .

Dengan mengingat $\int Y_{10}(\Omega_x) d\Omega_x = (4\pi/3)^{-\frac{1}{2}}$, maka persamaan (4.57) menjadi (lihat persamaan (D.2)):

$$\begin{aligned}\hat{M}_J^{coul}(q) &\approx -(N/A)(4\pi/3)^{-\frac{1}{2}}\vec{r} \cdot \int \vec{x} \rho_0(x) j_1(qx) x^2 dx \\ &\approx (N/A)q\hat{r} \cdot \int \rho_0(x) j_0(qx) Y_{00}(\theta, \phi) dx\end{aligned}\quad (4.58)$$

di mana \hat{r} = operator tensor rank-1, komponen-0, yang dirumuskan :

$$\hat{r} = (2M\omega)^{-\frac{1}{2}}(a_m^+ + (-1)^m a_{-m}) = (2M\omega)^{-\frac{1}{2}}(a^+ + a), \quad (4.59)$$

dengan ω adalah perbedaan energi elektron datang dengan terhambur dan M adalah massa nukleon. Dengan menerapkan harga fungsi Bessel sferik dan harmonik sferik orde-0 kedalam persamaan (4.58), maka kuadrat elemen matrik persamaan (4.58) adalah :

$$\begin{aligned} \left| \langle 1^- | \hat{M}_i^{coil}(q) | 0^- \rangle \right|^2 &= (N/A)^2 q^2 \left| \langle 1^- | \hat{r} | 0^- \rangle \right|^2 \left| \langle 0 | \hat{M}_0^{coil}(q) | 0 \rangle \right|^2 \\ &= (N/A)^2 (q^2 / 2M\omega) \left| \langle 0 | \hat{M}_0^{coil}(q) | 0 \rangle \right|^2, \end{aligned} \quad (4.60)$$

Persamaan (4.60) diperoleh dengan menerapkan hasil kuadrat elemen matrik tereduksi persamaan (4.59) yang berbentuk :

$$\left| \langle 1^- | \hat{r} | 0^- \rangle \right|^2 = (2M\omega)^{-1}. \quad (4.61)$$

Persamaan (4.51) untuk eksitasi pertama adalah :

$$\langle 1^- | \hat{T}_{JM}^{el}(q) | 0^- \rangle \xrightarrow{q \approx 0} \frac{\omega}{q} (2)^{\frac{1}{2}} \langle 1^- | \hat{M}_J^{coil}(q) | 0^- \rangle, \quad (4.62)$$

sehingga dengan substitusi persamaan (4.60) ke dalam hasil kuadrat persamaan (4.62), diperoleh kuadrat elemen matrik yang berbentuk :

$$\left| \langle 1^- | \hat{T}_{JM}^{el}(q) | 0^- \rangle \right|^2 = 2 \left(\frac{\omega}{q} \right)^2 (N/A)^2 (q^2 / 2M\omega) \left| \langle 0 | \hat{M}_J^{coil}(q) | 0 \rangle \right|^2. \quad (4.63)$$

Oleh karena itu faktor struktur listrik transversal dari sumbangan multipol muatan inti dapat dirumuskan :

$$|F_T(q)|^2 \equiv \frac{4\pi}{Z^2} \frac{2}{2J_0 + 1} \left(\frac{\omega}{q}\right)^2 \left(\frac{N}{A}\right)^2 \left(\frac{q^2}{2M\omega}\right) \left| \langle 0 | \hat{M}_J^{coul}(q) | 0 \rangle \right|^2, \quad (4.64)$$

dan dengan mensubstitusikan persamaan (4.64) ke dalam persamaan (4.1) diperolehampang lintang transisi dipol yang memperlihatkan sumbanganampang lintang dari multipol longitudinal dan multipol listrik tranversal yang berbentuk :

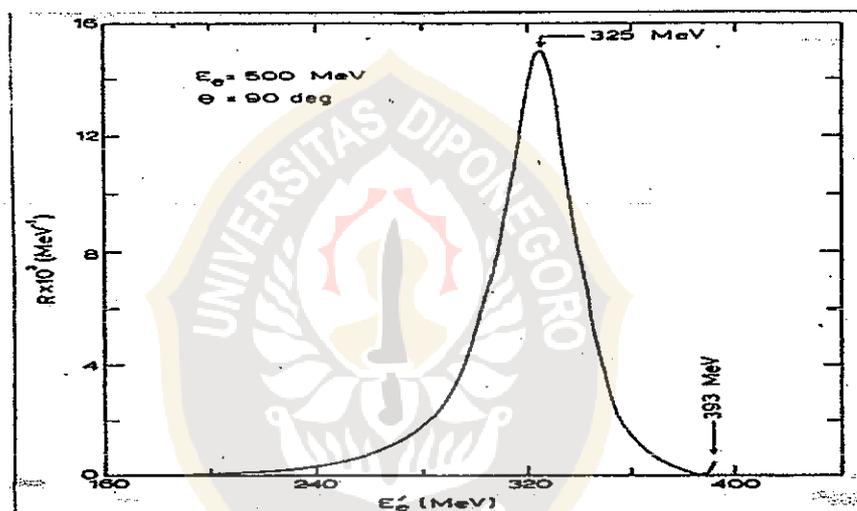
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) (1^- \leftarrow 0^-) = \frac{Z^2 \sigma_M |F_L(q)|^2}{1 + (2E \sin^2 \frac{1}{2} \theta) / M} \otimes (N/A)^2 (q^2 / 2M\omega) \left\{ 1 + 2(\omega/q)^2 \left(\frac{1}{2} + \tan^2 \frac{1}{2} \theta\right) \right\} \quad (4.65)$$

Tampak dalam persamaan (4.65), bahwa persamaanampang lintang hamburannya adalah serupa denganampang lintang hamburan elastik persamaan (4.2), hanya saja ada faktor koreksi sebesar $(N/A)^2 (q^2 / 2M\omega)$. Faktor struktur longitudinal pada persamaan (4.65) adalah identik dengan faktor struktur longitudinal elastik persamaan (4.3), hanya saja ada faktor koreksi sebesar $(N/A)^2 (q^2 / 2M\omega)$ dan persamaan untuk faktor struktur transversal dari persamaan (4.65) adalah identik dengan faktor struktur longitudinal elastik, hanya saja ada faktor koreksi sebesar $(N/A)^2 (\omega / M)$.

4.2.2 Elektrodintegrasi

Elektrodintegrasi merupakan proses terlepasnya nukleon dari dalam inti akibat tumbukan elektron yang memiliki energi lebih besar dari energi ikat nukleon dalam inti. Berikut adalah grafik hamburan elektron-Deuteron dengan memperlihatkan puncak elastik pada energi 325 MeV.

Untuk interaksi elektron-Deuteron, pembahasan elektrodintegrasi menjadi hal yang sangat penting. Hal ini disebabkan karena deuteron hanya memiliki tingkat energi *ground state* saja dan tidak memiliki *excited state*.



Gambar 4.1 Grafik faktor struktur fungsi E' hamburan tak elastik elektron-Deuteron (Hofstadter, 1964)

Energi interaksi elektron-Deuteron yang dihasilkan dari teori gangguan berbentuk (Jankus, 1957 : 1587):

$$H = \sum_{k=1,2} \left\{ e_k \phi(r_k) + \frac{1}{2} i e_k [A(r_k) \cdot \nabla_k + \nabla_k \cdot A(r_k)] - \frac{1}{2} i e_k \sigma_k \cdot [\nabla_k \times A(r_k)] \right\}. \quad (4.66)$$

Dengan menggunakan potensial yang diturunkan dari fungsi gelombang elektron oleh Moller (1931) yang berbentuk (Heitler, 1954 : 231) :

$$\varphi(r) = -4\pi e \frac{a_0}{q^2} e^{iq \cdot r}, \quad (4.67a)$$

$$A(r) = 4\pi e \frac{\bar{a}}{q^2} e^{iq \cdot r}, \quad (4.67b)$$

maka elemen matrik energi interaksi untuk persamaan (4.66) memiliki bentuk (Jankus, 1957, : 1587) :

$$\langle\langle H \rangle\rangle = \frac{4\pi e}{q^2} \left\langle \left[a_0 e^{\frac{1}{2}iqr} - \frac{1}{2}(\nabla \cdot \bar{a}) e^{\frac{1}{2}iqr} + \frac{1}{2}i(\mu_p \sigma_p e^{\frac{1}{2}iqr} + \mu_n \sigma_n e^{\frac{1}{2}iqr}) \cdot (q \times \bar{a}) \right] \right\rangle \quad (4.68)$$

Dari hasil tersebut, tampang lintang diferensial hamburan tak elastik deuteron akan memiliki bentuk umum (Hofstadter, 1957 : 265):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{ie} = \frac{1}{(4\pi)^3} \left(\frac{e^2}{E_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} k dp d\Omega_x \otimes \left\langle \left| \left[a_0 - i\nabla \cdot \bar{a} + \frac{i}{2M} \mu_p \sigma_p \cdot (q \times \bar{a}) \right] e^{\frac{1}{2}iqr} + \frac{i}{2M} \mu_n \sigma_n \cdot (q \times \bar{a}) e^{\frac{1}{2}iqr} \right| \right\rangle^2, \quad (4.69)$$

dengan k adalah variabel yang merepresentasikan momentum akhir proton, \bar{a} dan a_0 adalah elemen matrik Dirac, $d\Omega_k$ adalah elemen sudut ruang proton dan p adalah momentum elektron terhambur. Dengan menerapkan fungsi gelombang deuteron awal dan akhir pada hasil elemen matrik persamaan (4.68), Jankus (1931) telah berhasil menurunkan bentuk persamaan (4.69) menjadi (Hofstadter, 1957 : 266) :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lc} = \left(\frac{e^2}{E_0}\right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2k_0}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \otimes \left\{ (1 - f_D^2) + \frac{q^2}{4M^2} [2(\mu_p^2 + \mu_n^2 - 3f_D^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} + \mu_p^2 + \mu_n^2 - 3f_D^2] \right\}, \quad (4.70)$$

dengan f_D adalah faktor struktur muatan deuteron yang berbentuk :

$$f_D = \int (u^2 + w^2) j_0\left(\frac{1}{2}qr\right) dr. \quad (4.71)$$

Karena hamburan tak elastik terjadi ketika alih momentumnya q sangat besar, untuk pendekatan alih momentum yang sangat besar ($q \gg$) akan dihasilkan faktor struktur yang sangat kecil bahkan mendekati nol, sehingga hasil dari pendekatan ini mengakibatkan persamaan (4.70) menjadi lebih sederhana yaitu :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ie} = \left(\frac{e^2}{E_0}\right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2E_0}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \otimes \left\{ 1 + \frac{q^2}{4M^2} [2(\mu_p^2 + \mu_n^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} + \mu_p^2 + \mu_n^2] \right\} \quad (4.72)$$

Ruas kanan persamaan (4.72) merupakan bentuk persamaan yang identik dengan jumlahan tampang lintang diferensial hamburan elektron oleh nukleon (proton dan neutron) sebagai partikel titik. Oleh karena itu persamaan (4.72) dapat dibawa ke dalam bentuk :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ie} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_p + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_n, \quad (4.73)$$

dengan indeks p untuk proton dan n untuk neutron.

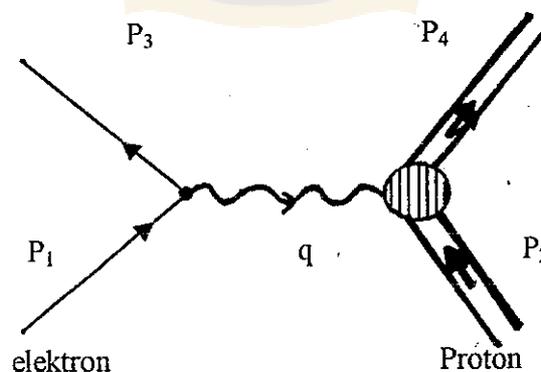
Hasil pendekatan ini menunjukkan bahwa tampang lintang diferensial hamburan tak elastik deutron merupakan jumlahan tampang lintang diferensial hamburan elastik elektron-proton dan elektron-neutron. Hal ini sesuai dengan kenyataan bahwa deutron merupakan inti yang hanya memiliki dua nukleon yakni proton dan neutron, sehingga proses elektrodintegrasi pada deutron pada dasarnya merupakan proses pecahnya inti (*break up*) deutron menjadi proton dan neutron.

4.3 HAMBURAN ELASTIK ELEKTRON-NUKLEON

Jika energi berkas elektron yang digunakan memiliki orde GeV, maka panjang gelombang de Broglie-nya menjadi jauh lebih pendek dibandingkan ukuran inti bahkan lebih pendek daripada ukuran nukleon. Oleh karena itu hamburan pada kasus tersebut dapat digunakan untuk mendapatkan informasi mengenai struktur nukleon (Wong, 1990 : 131).

4.3.1 Analisis Faktor Struktur Listrik-magnet Proton

Kajian faktor struktur dari hamburan elektron oleh muatan statik tidak dapat diterapkan secara langsung untuk menghasilkan struktur proton karena dua hal. Pertama, momen magnetik proton ikut berpengaruh dalam hamburan tidak hanya muatannya saja. Kedua, proton akan *recoil* akibat penembakan elektron energi tinggi. Oleh karena itu proton tidak bersifat statis. Karena dianggap bahwa proton bukan muatan titik, maka dapat dimodifikasikan bentuk hamburan elektron-proton. Modifikasi tersebut adalah dengan menggambarkan interaksi elektron-proton pada diagram Feynman dalam QED orde terendah sebagaimana diperlihatkan pada gambar (4.2) berikut (Griffits, 1987 : 264) :



Gambar 4.2 Diagram Feynman hamburan elastik elektron-proton

Dalam diagram Feynman dinyatakan bahwa p_1 , p_2 , p_3 , dan p_4 merupakan momentum elektron datang, momentum proton awal, momentum elektron terhambur, dan momentum proton akhir, sedangkan q adalah alih momentum elektron kepada proton melalui *foton Virtual*. Analisis hamburan elektron-proton dengan diagram Feynman dilakukan dengan menguraikan faktor bentuk pada masing-masing ujung (*vertex*) interaksi yaitu ujung elektron-foton dan ujung foton-proton.

Amplitudo hamburan orde-terendah untuk hamburan elastik elektron-proton diberikan oleh (Leon, 1973 dan Hofstadter, 1957 : 246):

$$\langle |H|^2 \rangle = -i \int j_\mu \left(-\frac{1}{q^2} \right) j^\mu d^4x, \quad (4.74)$$

dengan $q = p' - p$ dan j_μ merupakan rapat arus transisi elektron yakni pada ujung elektron-foton dan arus transisi proton yakni pada ujung foton-proton yang memiliki bentuk (Yennie, 1957 : 145.146 dan Hofstadter, 1957 : 248) :

$$j_{elektron}^\mu = -e \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) e^{i(k'-k)x}, \quad (4.75a)$$

dan

$$j_{proton}^\mu = -e \bar{u}(p') [\] u(p) e^{i(p'-p)x}. \quad (4.75b)$$

Karena dalam hal ini proton dianggap memiliki struktur, maka tidak dapat lagi digantikan faktor dalam kurung persegi [] dengan variabel γ^μ sebagaimana jika dia dianggap sebagai partikel titik yang ber-Spin $\frac{1}{2}$, sementara bentuk j_{proton}^μ haruslah merupakan vektor-empat Lorentz. Oleh karena itu harus digunakan bentuk vektor-empat yang paling umum yang tersusun dari p, p', q dan matrik $-\gamma$ Dirac yang diselipkan diantara spinor \bar{u} dan u . Hanya akan ada dua faktor yang saling gayut yaitu γ^μ dan $i\sigma^{\mu\nu}q_\mu$ dan koefisien ini merupakan fungsi dari q^2 yang merupakan variabel skalar yang tidak saling gayut pada ujung proton.

Keterlibatan γ^5 diabaikan melalui kaidah kekekalan paritas sehingga bentuk [] ditemukan oleh Foldy (1952) yaitu (Yennie, 1957 : 146 dan Hofstadter, 1964 : 11):

$$[] = \left[F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{k}{2M}F_2(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\mu \right], \quad (4.76)$$

dengan q_μ adalah alih momentum-empat untuk nukleon, k adalah anomali momen magnetik nukleon dan F_1, F_2 merupakan dua buah faktor struktur yang tidak saling gayut.

Untuk alih momentum yang sangat kecil $q^2 \rightarrow 0$, ketika di uji dengan foton gelombang panjang, maka tidak akan muncul perbedaan bahwa proton memiliki struktur ukuran orde 1 fermi. Akan dapat dilihat bahwa dia merupakan

partikel bermuatan e dan momen magnetik $(1+k)e/2M$ dimana k adalah anomali momen magnetik dengan nilai terukur 1,79. Oleh karena itu dipilihlah untuk pendekatan ini nilai $F_1^p(0)=1$, $F_2^p(0)=1$ untuk proton yang diperoleh secara eksperimental.

Dalam gambar (4.2) interaksi pada ujung elektron-foton diuraikan oleh besaran $L_{elektron}^{\mu\nu}$ yang disebut sebagai faktor bentuk lepton, sedangkan interaksi pada ujung foton-proton diuraikan oleh besaran $K_{\mu\nu proton}$ yang disebut sebagai faktor bentuk hadron. Oleh karena itu amplitudo hamburan elektron-proton memiliki bentuk (Griffits, 1987 : 264) :

$$\langle |H|^2 \rangle = \frac{g_e^4}{q^4} L_{elektron}^{\mu\nu} F_{\mu\nu proton} \quad (4.77)$$

Besaran $L_{elektron}^{\mu\nu}$ yang menguraikan interaksi pada ujung elektron-foton telah diketahui yakni berbentuk :

$$L_{elektron}^{\mu\nu} = 2 \{ p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu + g^{\mu\nu} [(mc)^2 - (p_1 - p_3)^2] \} \quad (4.78)$$

Adapun analisis untuk besaran yang menguraikan interaksi pada ujung foton-proton $F_{\mu\nu proton}$ adalah sebagai berikut : $F_{\mu\nu}$ merupakan besaran yang belum diketahui, namun dapat dipastikan bahwa dia adalah tensor rank-Dua, dan besaran yang hanya gayut pada momentum awal proton p_2 , momentum akhir proton p_4 ,

dan alih momentum q . Karena $q = p_2 - p_4$, maka disini ada tiga besaran yang saling tidak berpengaruh dan disini dapat bebas menggunakan dua besaran saja yaitu q dan p ($p = p_2$, momentum awal proton). Oleh karena itu, sekarang tidak akan ada banyak tensor yang dapat terbentuk kecuali hanya akan ada dua vektor-empat. Bentuk umum yang paling memungkinkan dari $F_{\mu\nu}$ adalah:

$$F_{\mu\nu}^{proton} = -F_1 g^{\mu\nu} + \frac{F_2}{(Mc)^2} p^\mu p^\nu + \frac{F_4}{(Mc)^2} q^\mu q^\nu + \frac{F_5}{(Mc)^2} (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) \quad (4.79)$$

K_i merupakan fungsi yang belum diketahui dan merupakan variabel skalar dalam kasus q^2 . Dituliskan bahwa $p^2 = (Mc)^2$ merupakan konstanta dan $q \cdot p = -q^2/2$. Faktor $(Mc)^{-2}$ telah dikeluarkan, sehingga dalam mendefinisikan F_1 , F_4 dan F_5 maka mereka akan memiliki dimensi yang sama. Pada prinsipnya dapat ditambahkan kombinasi antisimetri ($p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu$), namun karena $L^{\mu\nu}$ adalah simetri, maka kombinasi tersebut tidak akan berpengaruh dalam amplitudo hamburan $\langle |H|^2 \rangle$. Ke empat fungsi adalah saling tidak independen, sehingga dapat diperlihatkan bahwa :

$$q_\mu F^{\mu\nu} = 1 \quad (4.80)$$

Oleh karena itu hanya akan dihasilkan dua bentuk hubungan yaitu :

$$F_4 = \frac{(Mc)^2}{q^2} F_1 + \frac{1}{4} F_2 \quad (4.81)$$

dan

$$F_3 = \frac{1}{2} F_2 \quad (4.82)$$

dari hasil ini $F_{\mu\nu}$ dapat diekspresikan hanya dengan dua fungsi yaitu $F_1(q^2)$ dan $F_2(q^2)$ (Griffits, 1987 : 265) :

$$F_{proton}^{\mu\nu} = F_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{F_2}{(Mc)^2} \left(p^\mu + \frac{1}{2} q^\mu \right) \left(p^\nu + \frac{1}{2} q^\nu \right) \quad (4.83)$$

substitusi persamaan (4.83) dan (4.78) ke dalam persamaan (4.77) diperoleh amplitudo yang berbentuk :

$$\langle |H|^2 \rangle = \frac{4g_e^4}{q^4} \left\{ F_1 \left[(p_1 \cdot p_3) - 2(mc)^2 \right] + F_2 \left[\frac{(p_1 \cdot p)(p_3 \cdot p)}{(Mc)^2} + \frac{q^2}{4} \right] \right\} \quad (4.84)$$

Dalam kerangka laboratorium, proton sasaran dianggap diam, sehingga $p = (Mc, 0, 0, 0)$. Elektron datang dengan energi awal E dan terhambur pada sudut θ dengan energi akhir E' . Apabila diasumsikan bahwa tumbukan adalah dalam energi yang sangat tinggi $(E, E') \gg mc^2$, maka massa elektron dapat diabaikan, $m = 0$. Momentum awal elektron $p_i = \frac{E}{c}(1, \hat{p}_i)$ dan momentum akhirnya

$p_3 = \frac{E}{c}(1, \hat{p}_f)$, dengan $\hat{p}_i \cdot \hat{p}_f = \cos\theta$. Oleh karena itu amplitudo hamburan dalam kerangka laboratorium berbentuk :

$$\langle |H|^2 \rangle = \frac{g_e^2 c^2}{4EE' \sin^4 \frac{\theta}{2}} (2F_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + F_2 \cos^2 \frac{\theta}{2}), \quad (4.85)$$

dengan

$$E' = \frac{E}{1 + (2E/Mc^2) \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (4.86)$$

Dari hubungan antara tampang lintang diferensial dengan amplitudo hamburan yang berbentuk :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar E'}{8\pi McE} \right)^2 \langle |H|^2 \rangle \quad (4.87)$$

maka bentuk perumusan tampang lintang diferensial hamburan elastik elektron-proton adalah (Griffits, 1987 : 266) :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha \hbar}{4ME' \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \frac{E'}{E} (2F_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + F_2 \cos^2 \frac{\theta}{2}). \quad (4.88)$$

F_1 dan F_2 sekarang merupakan faktor struktur yang dapat ditentukan secara

langsung dari data hamburan hasil eksperimen yaitu dengan pengukuran $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

sebagai fungsi sudut hambur θ dan fungsi alih momentum q^2 . Untuk menjabarkan faktor struktur listrik-magnet dan menyederhanakan bentuk perumusan, digunakan kombinasi linier dari $F_{1,2}(q^2)$ yang diberikan oleh Sach dengan bentuk kombinasi adalah sebagai berikut :

$$G_E^p = F_1^p + \frac{k q^2}{4M^2} F_2^p \quad (4.89a)$$

dan

$$G_M^p = F_1^p + 4F_2^p \quad (4.89b)$$

dengan G_E^p adalah faktor struktur listrik proton dan G_M^p adalah faktor struktur magnetik proton.

Untuk memperlihatkan hubungan faktor struktur listrik dan magnet proton pada persamaanampang lintang diferensial dalam kerangka laboratorium, maka persamaan (4.88) dapat diubah menjadi (Hofstadter, 1964 : 12) :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{E}{E} \left\{ \left(F_1^2 - \frac{k^2 q^2}{2M^2} F_2^2 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} (F_1 + 4F_2)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (4.90)$$

atau dalam bentuk lain (Wong, 1990 : 131) :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{d\hbar}{2E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \frac{E'}{E} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left\{ \frac{G_E^2 + t G_M^2}{1+t} + 2 t G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right\} \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mik}} \left\{ \frac{G_E^2 + t G_M^2}{1+t} + 2 t G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right\} \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\text{dengan } t = \left(\frac{\hbar q}{2Mc} \right)^2$$

Distribusi muatan dan momen magnetik proton dapat ditentukan melalui faktor struktur sebagaimana dalam penerapannya yaitu untuk menentukan distribusi muatan pada awan muatan statis melalui interpretasi transformasi Fourier.

4.3.2 Analisis Faktor Struktur Listrik-magnet Neutron

Analisis faktor struktur neutron pada dasarnya adalah sama sebagaimana dalam analisis faktor struktur proton. Hanya saja analisis secara langsung dari data hamburan elektron oleh neutron amat sulit dilakukan dibandingkan analisis faktor struktur proton dari data hamburan elektron oleh proton. Hal ini disebabkan karena belum memungkinkan untuk dapat membuat sasaran dari neutron bebas, sebagaimana proton yang dapat menggunakan sasaran atom hidrogen. Pada energi yang lebih tinggi, hamburan elektron oleh neutron tidak dapat diukur secara langsung karena interaksi yang terjadi antara elektron dengan neutron bukan lagi interaksi elektromagnetik lagi melainkan dengan gaya inti khas. Namun demikian setelah di analisis hamburan tak elastik elektron-deuteron yaitu kasus elektrodintegrasi (lihat persamaan (4.73)), analisis faktor struktur neutron

menjadi mudah dilakukan dengan sebelumnya telah di analisis terlebih dahulu faktor struktur proton dari hamburan elektron-proton (Hofstadter, 1964 : 68 dan Leon, 1973 : 224).

Untuk neutron, hamburan diamati dengan sasaran inti deuterium, melalui kaidah pemisahan tampang lintang diferensial hamburan diperoleh :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(en) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(ed) - \frac{d\sigma}{d\Omega}(ep) + \text{faktor koreksi} \quad (4.92)$$

dengan (en) adalah hamburan elektron oleh neutron, (ed) hamburan elektron oleh deuteron dan (ep) adalah hamburan elektron oleh proton sedangkan faktor koreksi disini adalah dari sifat fisis inti deuteron. Oleh karena itu data neutron memiliki ketepatan yang kecil (Perkins, 1987 : 194).

Penelitian telah dilakukan oleh Hofstadter, dkk. pada tahun 1961 di Universitas Stanford yang memberikan hasil tentang adanya hubungan antara faktor struktur listrik magnet neutron dengan faktor struktur listrik-magnet proton yaitu dengan memunculkan kaidah *Scaling law* yang berbentuk (Perkins, 1987 : 194 dan Leon, 1973 : 224) :

$$G_E^p(q^2) = \frac{G_M^p(q^2)}{|\mu_p|} = \frac{G_M^n(q^2)}{|\mu_n|} = G(q^2) \quad (4.93)$$

$$G_E^n(q^2) = 0,$$

Faktor struktur $G(q^2)$ dirumuskan :

$$G(q^2) = \left[1 + \frac{-q^2}{M_V^2} \right]^{-2} \quad (4.94)$$

dengan $M_V = 0,84$ GeV

Untuk neutron $F_1^n(0) = 0$ dan $F_2^n(0) = 1$, dengan $k_n = -1,91$ yang diperoleh secara eksperimental

