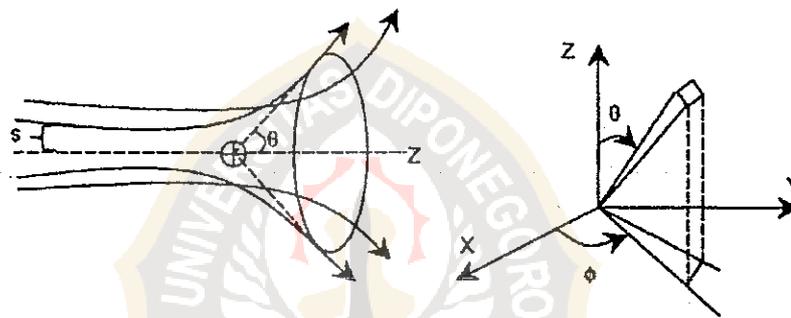


BAB II

DASAR TEORI

2.1 TEORI HAMBURAN

Teori hamburan menjelaskan tentang partikel datang (proyektil), partikel sasaran dan interaksi diantara keduanya. Ditinjau proses hamburan suatu fluks partikel dengan rapat fluks I sepanjang arah z diperlihatkan pada gambar (2.1) berikut:



Gambar 2.1 Tampang lintang hamburan

Arus partikel-partikel itu akan terbelokkan oleh penghambur ke berbagai arah θ , dan jika dengan parameter bentuk (*impact parameter*) s kecil, maka dia akan lebih mudah terbelokkan. Banyaknya partikel $N(\theta)$, terhambur per satuan sudut ruang Ω per satuan rapat fluks I , pada arah θ , tampang lintangnya dinotasikan dengan σ dan rapat kebolejadiannya dinotasikan dengan S (Sudojo, 2001 : 142).

2.1.1 Tampang lintang hamburan

Konfigurasi eksperimen hamburan diperlihatkan sebagaimana pada gambar (2.1). Berkas partikel energi tunggal dengan energi dan rapat arus \vec{J}_{inc} yang telah diketahui, datang pada suatu sasaran yang menjadi pusat hamburan. Notasi \vec{J}_{sc} merupakan variabel rapat arus terhambur. Jumlah partikel terhambur per satuan waktu yang menembus elemen permukaan da adalah $\vec{J}_{sc} \cdot da$. Elemen permukaan da terletak sejauh jejari r dari sasaran. Jika $d\Omega$ adalah sudut vektor ruang elektron terhambur dari bagian elemen permukaan yang ditembusi da dengan hubungan $da = r^2 d\Omega$, maka jumlah partikel yang melintas menembus elemen permukaan da per satuan waktu adalah :

$$dN = \vec{J}_{sc} \cdot ds = r^2 \vec{J}_{sc} \cdot d\Omega. \quad (2.1)$$

Karena jumlah partikel terhambur akan naik seiring dengan kenaikan arus datang \vec{J}_{inc} , maka dapat diasumsikan bahwa jumlahnya sebanding dengan \vec{J}_{inc} , sehingga dapat dirumuskan :

$$dN = r^2 \vec{J}_{sc} \cdot d\Omega = \vec{J}_{inc} \cdot d\sigma. \quad (2.2)$$

Faktor kesebandingan $d\sigma$ disebut sebagai tampang lintang diferensial hamburan yang memiliki dimensi luas dan satuannya sering disajikan dalam barn

(1 barn = 10^{-24} cm²). Oleh karena itu tampang lintang hamburan total dirumuskan (Liboff, 1992 : 726):

$$\sigma = \int d\sigma = \int_{4\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega. \quad (2.3)$$

2.1.2 Amplitudo hamburan

Dalam mekanika kuantum, jika berkas partikel datang tidak tergantung satu sama lain sehingga hanya ada interaksi tunggal yaitu dengan sasaran, maka partikel datang tersebut dapat diumpamakan sebagai partikel bebas. Jika partikel tersebut memiliki momentum $\hbar\vec{k}$ dan energi $(1/2m)\hbar^2\vec{k}^2$, maka dalam *state* gelombang datar akan memiliki fungsi gelombang :

$$\varphi_{inc} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{z}}, \quad (2.4)$$

sehingga ketika berinteraksi dengan pusat hamburan, ia akan terhambur dengan gelombang φ_{sc} . Jika hamburan bersifat isotropik yaitu hamburannya adalah kesegala arah, maka dapat diharapkan bahwa gelombang terhambur φ_{sc} merupakan gelombang simetri sferik :

$$\varphi_{inc.iso} = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r}. \quad (2.5)$$

Namun bagaimanapun gelombang terhambur adalah anisotropik yaitu bahwa gelombang tersebut terhambur ke segala arah yang tidak memiliki nilai kebolehjadian yang sama. Sifat anisotropik dari fungsi gelombang terhambur φ_{sc} dapat diuraikan menggunakan adanya faktor modulasi $f(\theta)$, sehingga bentuk umum fungsi gelombang terhambur menjadi (Liboff, 1992 : 727) :

$$\varphi_{sc} = \frac{f(\theta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} \quad (2.6)$$

$f(\theta)$ disebut faktor modulasi yang dapat digunakan untuk menentukan tampang lintang diferensial hamburan.

Jika partikel terhambur pada elemen sudut ruang $d\Omega$ dalam arah e_r , maka dapat diperoleh komponen radial \vec{J}_{sc} yaitu (Sankar, 1980 : 539 dan Liboff, 1992 : 727) :

$$\begin{aligned} \vec{J}_{sc,r} &= \frac{\hbar}{2mi} \left(\varphi_{sc}^* \frac{\partial}{\partial r} \varphi_{sc} - \varphi_{sc} \frac{\partial}{\partial r} \varphi_{sc}^* \right) \\ &= \frac{\hbar \bar{k}}{mr^2} |f(\theta)|^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Karena elemen vektor sudut ruang $d\Omega$ dalam arah e_r akan mengikuti kaidah :

$$r^2 \vec{J}_{sc} \cdot d\Omega = r^2 \vec{J}_{sc,r} \cdot d\Omega = \vec{J}_{inc} \cdot d\sigma \quad (2.8)$$

dan vektor arus dari berkas datang hanya pada arah komponen z dengan nilai $\frac{\hbar k}{m}$,

maka dapat diperoleh hubungan :

$$r^2 \vec{J}_{sc,r} \cdot d\Omega = \frac{\hbar k}{m} d\sigma \quad (2.9)$$

Dari hasil substitusi persamaan (2.7) ke persamaan (2.9) dapat diperoleh hubungan antaraampang lintang diferensial dengan amplitudo hamburan yang berbentuk (Liboff, 1992 : 727; Sakurai, 1994 : 385) :

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega.$$

atau

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (2.10)$$

dengan $|f(\theta)|$ didefinisikan sebagai amplitudo hamburan. Persamaan (2.10) menunjukkan bahwaampang lintang diferensial hamburan adalah sebanding dengan kuadrat amplitudo hamburan.

2.1.3 Pendekatan Born

Untuk hamburan dengan tenaga partikel penghambur yang amat tinggi sehingga partikel sedikit saja yang dapat terhambur oleh potensial yang tidak harus sentral maka kasus dapat dijelaskan dengan digunakan metode pendekatan

Born (Sudojo, 2001 : 148). Dalam kasus hamburan, *state* akhir tersusun dari satu kesatuan sehingga dapat diterapkan teori gangguan harmonik, misalnya formula Fermi untuk kasus di mana *state* akhir terdiri dari satu kesatuan (*continuum*). Untuk kasus gangguan Hamiltonian, partikel datang masuk dalam jangkauan interaksi dengan momentum $\hbar\vec{k}$ dan meninggalkan jangkauan interaksi dengan momentum $\hbar\vec{k}'$. Apabila diasumsikan bahwa dalam eksperimen hamburan dilakukan dalam kotak kubus besar bervolume L^3 , maka *state* gelombang datar ternormalisasi yang dituliskan untuk \vec{k} dan \vec{k}' dan diberikan oleh persamaan (Liboff, 1992 : 740) :

$$\begin{aligned} |\vec{k}\rangle &= \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{L^{3/2}} \\ |\vec{k}'\rangle &= \frac{e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}}}{L^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Formula Fermi untuk rerata transisi dari *state* \vec{k} hingga \vec{k}' yang disebabkan oleh potensial pengganggu $V_{(r)}$, berbentuk (Liboff, 1992 : 740) :

$$\bar{w}_{kk'} = \frac{2\pi}{\hbar} g(E_{\vec{k}}) \left| \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle \right|^2, \quad (2.12)$$

dengan $g(E_k)$ adalah rapat *state* akhir. Jika dituliskan dalam suku $\hbar\vec{k}'$, maka rapat *state* akhir untuk partikel tak ber-spin akan berbentuk :

$$g(E_{\vec{k}}) = \frac{mL^3 \vec{k}}{2\pi^2 \hbar^2}. \quad (2.13)$$

Untuk menghubungkan rata-rata transisi \bar{w} denganampang lintang diferensial hamburan $d\sigma$, dituliskan bahwa fungsi gelombang datang $|\vec{k}\rangle$ adalah untuk arus datang yang berbentuk :

$$\vec{J}_{inc} = \frac{\hbar \vec{k}}{mL^3}. \quad (2.14)$$

Rapat *state* akhir $g(E_{\vec{k}})$ dalam \vec{k} tersebut adalah isotropik. Hal ini menunjukkan bahwa rapat *state* akhir \vec{k} ada dalam semua sudut ruang 4π . Untuk memiliki *state* terhambur dalam arah $d\Omega$ sebesar \vec{k} , maka dikalikan g dengan rasio $d\Omega/4\pi$. Untuk $g(E_{\vec{k}})$ yang diperbesar, maka $\bar{w}_{kk'}$ akan memaparkan rata-rata partikel dari fluks datang datang yang terhambur pada $d\Omega$ dalam arah \vec{k} . Rataan ini didefinisikan dengan $\vec{J}_{inc} d\sigma$, sehingga diperoleh hubungan :

$$\vec{J}_{inc} d\sigma = \frac{d\Omega}{4\pi} \bar{w}_{kk'}, \quad (2.15)$$

dan hasil substitusi persamaan (2.15), (2.14) dan (2.12) ke persamaan (2.2) diperoleh tampang lintang diferensial (Liboff,1992 : 742):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \frac{\bar{k}'}{\bar{k}} \left| \langle \bar{k}' | V | \bar{k} \rangle \right|^2 \quad (2.16)$$

Persamaan (2.16) merupakan bentuk dasar perumusan tampang lintang hamburan menggunakan pendekatan Born dengan menerapkan formula Fermi untuk rata-rata transisinya.

Untuk penjabaran hamburan hingga orde tinggi, secara umum digunakan persamaan integral Lippmann-Schwinger sebagai fungsi gelombang dalam hamburan. Persamaan tersebut memiliki bentuk (Sakurai, 1994 : 380) :

$$\langle x' | \psi^{(+)} \rangle = \langle x' | \phi \rangle + \int d^3x'' \langle x' | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | x'' \rangle \langle x'' | V | \psi^+ \rangle. \quad (2.17)$$

Jika pengaruh penghambur tidak sangat kuat, maka $\langle x' | \psi^{(+)} \rangle$ dapat didekati dengan mengambil suku pertamanya saja yaitu $\langle x' | \phi \rangle$ untuk gelombang datar dengan k sebagai notasi momentum. Hasil pendekatannya adalah :

$$\langle x' | \psi^{(+)} \rangle \longrightarrow \langle x' | \phi \rangle = \frac{e^{ik \cdot x'}}{(2\pi)^{3/2}} \quad (2.18)$$

Karena diambil potensial V hanya untuk orde pertama, maka amplitudo pendekatan yang diperoleh disebut sebagai amplitudo Born orde-pertama, yang dinotasikan dengan $f^{(1)}$, dengan bentuk :

$$f^{(1)}(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' e^{i(\vec{k}-\vec{k}')x'} V(x'), \quad (2.19)$$

atau dalam bentuk elemen matriknya adalah :

$$f^{(1)}(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} (2\pi)^3 \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle. \quad (2.20)$$

Ruas kanan persamaan (2.19) untuk amplitudo orde-pertama selain $-\left(\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\right)$ merupakan transformasi Fourier tiga dimensi dari potensial, sedangkan pada persamaan (2.20) menunjukkan bahwa amplitudo hamburan merupakan hasil nilai elemen matriks dari operator potensial interaksi antara fungsi gelombang datang dan fungsi gelombang hambur. Untuk potensial simetri sferik, $f^{(1)}(\vec{k}', \vec{k})$ merupakan fungsi $|\vec{k} - \vec{k}'|$ yang diberikan oleh :

$$|\vec{k} - \vec{k}'| \equiv \vec{q} = 2\vec{k} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (2.21)$$

dari hubungan persamaan (2.10) dan substitusi persamaan (2.11) untuk *state* datang dan *state* terhambur ke dalam persamaan (2.16) maka akan didapatkan amplitudo hamburan dalam fungsi sudut hamburan yang berbentuk (Sakurai, 1994 : 386) :

$$\begin{aligned}
 f^{(1)}(\theta) &= -\frac{1}{2} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{iq} \int_0^\infty \frac{r^2}{r} V(r) (e^{iqr} - e^{-iqr}) dr \\
 &= -\frac{2m}{q\hbar^2} \int_0^\infty r V(r) \sin qr dr
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

dengan θ adalah sudut hamburan. Jika dimasukkan bentuk tertentu dari potensial interaksi antara partikel datang dengan sasaran, maka akan diperoleh secara langsung bentuk amplitudo hamburannya. Ini merupakan bentuk perumusan amplitudo hamburan yang sering disebut sebagai bentuk standar pendekatan Born.

2.1.4 Analisis Multipol

Dalam koordinat sferik, persamaan gelombang dapat dinyatakan sebagai superposisi atau jumlahan gelombang dari berbagai bilangan ℓ , sebagaimana penyelesaian persamaan gelombang yang menampilkan persamaan Helmholtz. Bilangan ℓ adalah dalam bentuk fungsi harmonik sferik $Y_{\ell,m}$, di mana dalam mekanika kuantum, ℓ berkaitan dengan momentum rotasi, sehingga dalam peristiwa deeksitasi itu dikatakan membawa serta momentum rotasi sedemikian hingga azas kekekalan momentum rotasi dalam proses transisi keadaan inti terpenuhi. Jika momentum inti mula-mula adalah dari L_i menjadi L_f , maka momentum rotasi yang dibawa foton adalah $\mathbf{J} = \mathbf{L}_i + \mathbf{L}_f$. melalui kaidah kuantisasi ruang berlaku aturan pilih (*selection rule*) (Sudojo, 2001 : 304) :

$$L_i - L_f \leq 1 \leq L_i + L_f. \tag{2.23}$$

Mengingat penyelesaian persamaan Laplace dalam sistem koordinat sferik, maka terdefiniskanlah momen multipol listrik dengan bentuk (Brink, 1975 : 64) :

$$Q_{l,m} = \frac{1}{2} \int e r^{l^2} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') \rho_{ch}(r') d^3 r. \quad (2.24)$$

$\rho_{ch}(r')$ adalah rapat muatan listrik setempat, r^l menentukan orde paritas radiasi dengan $l=0, 1, 2, \dots$ yang berkaitan dengan bentuk monopol, dipol, kuadrupol dan seterusnya.

Jika distribusi muatan listrik menghasilkan multipol listrik, maka distribusi arus listrik menghasilkan multipol magnet yang didefinisikan (Brink, 1975 : 75) :

$$M_{l,m} = -\frac{1}{l+1} \int r^l Y_{l,m}^*(\theta', \phi') \cdot \frac{r \times j}{c} d^3 r, \quad (2.25)$$

sehingga dikenal adanya radiasi multipol $E_1, E_2, \dots, M_1, M_2, \dots$ atau secara umum E_l dan M_l dengan l menunjukkan orde multipolaritasnya. Dalam multipol muatan, listrik dan magnet dikenal adanya aturan seleksi yaitu (Eisenberg, 1988 : 169) :

Multipol muatan Cl dengan nilai l adalah $0 \leq l \leq 2J_i$

Multipol listrik E_l dan Magnet M_l dengan nilai l adalah $1 \leq l \leq 2J_i$

Untuk muatan listrik yang terkonsentrasi pada titik-titik muatan sebagaimana proton di dalam inti, maka berdasarkan mekanika kuantum, momen multipol listrik dan magnet berbentuk (Sudojo, 2001 : 306) :

$$Q_{l,m} = e \sum_{k=1}^Z \int r_k^{-1} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') \psi_f^* \psi_i d^3 r'$$

$$M_{l,m} = -\frac{1}{l+1} \frac{e\hbar}{m_p c} \sum_{k=1}^Z r_k^l Y_{l,m}^*(\theta', \phi') \text{div} \langle \psi_f | L_k | \psi_i \rangle d^3 r' \quad (2.26)$$

m_p dan L_k adalah massa proton dan operator momentum rotasi yang berbentuk :

$$L_k \hbar = -i\hbar \bar{r}_k \times \nabla_k. \quad (2.27)$$

2.2 HAMBURAN ELEKTRON-INTI

Interaksi pada hamburan elektron-inti adalah interaksi elektromagnetik. Hal ini disebabkan karena interaksi tersebut merupakan interaksi antar partikel bermuatan, yakni elektron yang dipandang sebagai muatan negatif dan inti dipandang sebagai muatan positif. Interaksi elektromagnetik lebih sering dikenali sebagai hasil dari gaya ikat di dalam atom dan molekul. Tingkat energi atom Hidrogen dengan mengabaikan efek spin diberikan oleh (Beisser, 1987 : 210; Perkins, 1982 : 185) :

$$E = -\frac{\alpha^2 \mu}{2n^2} \left(= -\frac{13,6}{n^2} eV \right) \quad (2.28)$$

dengan m adalah massa elektron, M adalah massa proton, $\mu = mM/(m+M) \cong m$ merupakan massa tereduksinya dan $n=1, 2, 3, \dots$ adalah bilangan kuantum utama. Di dalam seluruh sistem, tingkat sebenarnya adalah pemecahan oleh interaksi spin-orbit atau struktur halus dan interaksi spin-spin atau struktur super halus yang keduanya memiliki besar $\approx \alpha^2 E$, sedangkan tingkat energinya diakibatkan oleh orde yang lebih tinggi yang disebut dengan koreksi radiatif sebagai hasil yang diprediksikan dalam elektrodinamika kuantum.

Hal yang menjadi titik berat disini adalah bahwa tingkat energi dari *state* berikatan tergantung pada bentuk $(1/r)$ dari potensial Coulomb dan besaran terukur seperti rasio massa, momen magnetik dan kopling α untuk medan Coulomb. Namun untuk interaksi elektromagnetik dalam proses hamburan elastik elektron oleh inti, maka sistem ini adalah suku-suku sistem kontinum dari *state* tak berikatan. Distribusi sudut dari partikel terhambur ditentukan oleh bentuk potensial, kopling α serta massa dan momen magnet partikel penumbuk. Untuk mendapatkan hasil tersebut, akan di bahas pertama kali pada kasus sederhana dari hamburan partikel tak ber-spin, untuk selanjutnya di modifikasi dengan memasukkan efek spin pada dua anggapan yaitu inti dipandang sebagai partikel titik dan inti dipandang sebagai partikel berstruktur (Perkins, 1987 : 185.186).

2.2.1 Inti sebagai Partikel Titik

Untuk mendapatkan perumusan faktor struktur pada persamaanampang lintang hamburan, maka harus didapatkan sebelumnya persamaanampang lintang hamburan pada hamburan elektron-inti dengan menganggap inti sebagai partikel

titik yaitu inti dianggap tidak memiliki struktur. Penjabaran untuk berbagai keadaan spin partikel penumbuk (elektron) maupun spin sasaran (inti) dalam asumsi inti sebagai partikel titik adalah sebagai berikut.

2.2.1.1 Hamburan Elastik Elektron tak ber-spin oleh Inti tak ber-spin

Hamburan elektron tak ber-spin oleh inti dapat diperoleh dari pendekatan Born orde-pertama dengan bentuk amplitudo hamburan sebagaimana diperlihatkan pada persamaan (2.22). Didefinisikan persamaan kebolehjadian transisi dengan bentuk (Perkins, 1987 : 180) :

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{if}|^2 \rho_f \quad (2.29)$$

Untuk potensial pengganggu berbentuk potensial sentral $V(r)$ yang dihasilkan oleh inti stasioner Ze , maka elemen matrik interaksi akan menjadi integral volume dengan bentuk (Perkins, 1987 : 181) :

$$H_{if} = \int \psi_f^* V(r) \psi_i d\tau, \quad (2.30)$$

dengan ψ_i, ψ_f adalah fungsi gelombang state awal dan state akhir dari elektron terhambur. Pendekatan Born telah mengasumsikan bahwa efek gangguan berharga kecil, sehingga hamburan dapat dianggap sebagai hamburan tunggal. Oleh karena itu ψ_i, ψ_f merupakan fungsi gelombang datar. Dengan menuliskan \vec{k}

dan \vec{k} sebagai vektor propagasi awal dan akhir dalam fungsi gelombang datar, maka persamaan (2.30) akan memiliki bentuk sebagai berikut :

$$H_f = \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot r} V(r) d^3r, \quad (2.31)$$

faktor rapat *state* ρ_f dalam persamaan (2.29) memiliki bentuk :

$$\rho_f = \frac{p^2 d\Omega}{\hbar^3} \frac{dp}{dE_f}, \quad (2.32)$$

dengan $p = \hbar k$ adalah momentum elektron terhambur dan E_f adalah energi total *state* akhir. Oleh karena itu diperoleh bentuk tampang lintang diferensial hamburan sebagaimana yang diperkirakan oleh Hofstadter (Hofstadter, 1957 : 236 - 237) :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{W}{v} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 \hbar^4} \frac{p^2}{v} \frac{dp}{dE_f} |H_f|^2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

dengan v adalah kecepatan berkas datang relatif terhadap pusat hamburan.

Telah diasumsikan bahwa inti adalah sangat massif, walaupun dalam faktanya inti dapat juga terjadi *recoil*. Dengan menuliskan p' , W , M dan θ sebagai momentum, energi total, massa diam inti recoil dan sudut belokan dari

elektron, maka dengan menggunakan satuan $\hbar = c = 1$ dan mengasumsikan pula bahwa keduanya yaitu elektron datang dan elektron terhambur adalah relativistik, dapat kita peroleh hubungan energi-momentum :

$$\vec{p}_0 = \vec{k} = \vec{E}_0, \quad \vec{p} = \vec{k}' = \vec{E}', \quad v \cong 1.$$

Seluruh besaran di atas adalah dalam sistem laboratorium. Dengan menerapkan kekekalan energi-momentum yang berbentuk:

$$E_i = p_0 + M = E_f = p + W, \quad \text{dan} \quad p_0 = p + p',$$

diperoleh :

$$E_i = p_0 + \sqrt{p^2 + M^2} = p + \sqrt{p_0^2 + p^2 - 2pp_0 \cos\theta + M^2}, \quad (2.34)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial E_i} \right)_0 = \frac{W}{E_i - p_0 \cos\theta} = \frac{W}{M} \frac{p}{p_0} \quad (2.35)$$

dan

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{1 + \frac{p_0}{M}(1 - \cos\theta)} \quad (2.36)$$

sehingga didapatkan bentukampang lintang diferensial pada persamaan (2.33) yang berbentuk (Hofstadter, 1957 : 239) :

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{(2\pi)^2} p^2 \frac{W}{M} \frac{p}{p_0} \left| \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(r) d^3r \right|^2 \\
&= \frac{Z^2 \alpha^2}{4 p_0} \frac{k_f}{k_i} \frac{1}{\sin^4 \frac{1}{2} \theta} \\
&= \frac{Z^2 \alpha^2}{4 p_0 \sin^4 \frac{1}{2} \theta} \left(\frac{1}{1 + \frac{2p_0}{M} \sin^2 \frac{1}{2} \theta} \right)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Persamaan (2.37) dapat diperoleh setelah memasukkan potensial interaksinya berupa potensial Coulomb yang merupakan potensial interaksi antar muatan tunggal. Persamaan (2.37) sering dikenal sebagai formula Rutherford, yaitu persamaanampang lintang diferensial hamburan elektron tak berspin oleh inti sasaran tak berspin, adapun komponen dalam tanda kurung adalah faktor inti *recoil* yaitu ketika energi elektronnya adalah relativistik.

2.2.1.2 Hamburan elektron ber-spin oleh inti tak ber-spin

Persamaan gelombang relativistik Dirac telah menguraikan elektron bak titik dengan spin $\frac{1}{2}\hbar$. Hasilnya memperlihatkan bahwa kerangka acuan elektron adalah relativistik, vektor spin $\vec{\sigma}$ adalah bersekutu dengan vektor momentum \vec{p} . Jika \vec{p} didefinisikan dalam arah z, maka harga harap $\langle \sigma_z \rangle = \pm 1$, yang berarti pula bahwa $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0$. Derajat polarisasi longitudinal adalah di sukukan dalam helisitas \bar{H} yang berbentuk (Perkins, 1987 : 191) :

$$\bar{H} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \pm 1. \tag{2.38}$$

Persamaan tersebut menggambarkan proyeksi spin intrinsik ($\vec{\sigma}$) elektron sepanjang arah dari gerak $\vec{p}/|p|$. Partikel dengan $\bar{H} = +1$ disebut sebagai kaidah tangan kanan yaitu orientasi spin dan kecepatan geraknya adalah searah, sedangkan $\bar{H} = -1$ disebut sebagai kaidah tangan kiri yaitu orientasi spin dengan kecepatan geraknya berlawanan. State dituliskan dengan ψ_R dan ψ_L .



Gambar 2.2 Hamburan proyektil ber-spin oleh sasaran tak ber-spin (Perkins, 1987 : 192).

Dalam interaksi elektromagnetik didapatkan bahwa helisitasnya adalah tetap. Notasi State ψ_L tetap diberikan untuk state setelah hamburan dan begitu pula untuk ψ_R . Untuk hamburan listrik elektron oleh partikel bermuatan lainnya, maka kaidah kekekalan momentum sudut melarang terjadinya hamburan 180° . Dengan kata lain, bahwa pertukaran foton adalah transversal, tanpa komponen momentum sudut murni sepanjang sumbu-z (lihat gambar 2.2).

Elektron dikatakan memiliki helisitas LH, maka ia terhambur dalam sudut θ sembarang yang akan diuraikan oleh $\psi_L(\theta)$ yang juga merupakan superposisi dari amplitudo $J_z = \frac{1}{2}$ dan $J_z = -\frac{1}{2}$. Bagian dari amplitudo yang menguraikan

elektron, awalnya disediakan dalam state $J_z = -\frac{1}{2}$, yang muncul pada sudut θ juga dengan $J_z = -\frac{1}{2}$ yang diberikan oleh fungsi-d atau *matrik rotasi* (Brink, 1975 : 24 dan Perkins, 1987 : 192) :

$$d_{m,m'}^j = d_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (2.39)$$

dan

$$d_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (2.40)$$

Disini pengaruh spin elektron pada hamburan oleh inti tak ber-spin dimulai dengan adanya faktor $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ di dalamampang lintangnya. Oleh karena itu persamaanampang lintang diferensialnya menjadi (Wong, 1990 : 123) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} &= \frac{Z^2 \alpha^2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta}{4 p_0^2 \sin^4 \frac{1}{2} \theta [1 + (2 p_0 / M) \sin^2 \frac{1}{2} \theta]} \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cos^2 \frac{1}{2} \theta \end{aligned} \quad (2.41)$$

Persamaan (2.41) dikenal sebagai formula Mott. Suku terakhir dalam faktor pembagi adalah untuk *recoil* inti.

2.2.1.3 Hamburan elektron ber-spin oleh inti ber-spin

Tahap akhir adalah memasukkan pengaruh spin pada sasaran sebagaimana pada proyektil (elektron) kedalam hasil formula. Sebelumnya dibayangkan bahwa hamburan elektron oleh proton (salah satu jenis nukleon) yang dianggap sebagai

partikel titik. Dalam hal ini akan terjadi kenaikan interaksi magnetik yang merupakan perputaran seluruh spin partikel sebagaimana interaksi listrik. Medan magnetik yang diakibatkan oleh momen proton adalah bervariasi sebagai fungsi r^{-3} dan medan listrik berubah sebagai fungsi r^{-2} . Oleh karena itu, tumbukan jarak dekat dan tingginya nilai kuadrat alih momentum q^2 akan berpengaruh besar dalam interaksi magnetiknya. Pengaruh interaksi listrik dan interaksi magnetik dalam persamaanampang lintang telah diperlihatkan dalam formula Dirac yang memiliki bentuk (Wong,1990 : 125) :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Dirac} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \left(\cos^2 \frac{1}{2}\theta + \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{1}{2}\theta\right), \quad (2.42)$$

atau

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Dirac} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(1 + \frac{q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{1}{2}\theta\right). \quad (2.43)$$

Suku pertama ruas kanan dari persamaan (2.42) merupakan hamburan listrik (Formula Mott) dengan bentuk sebagaimana diperlihatkan dalam persamaan (2.41), sedangkan suku kedua merupakan hamburan magnetik yang mengandung faktor $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ dari persamaan (2.40). Tampang lintang pada persamaan (2.42) akan dapat diterapkan jika elektron dan proton masing.masing dianggap sebagai partikel titik Dirac yaitu dengan momen magnetik partikel $\mu = e\hbar/2mc$, di mana m merupakan massa partikelnya. Namun demikian, proton dan neutron bukanlah

partikel titik, dan mereka memiliki momen magnetik yang berbeda. Menurut perkiraan Dirac, momen magnetik proton dan neutron adalah $\mu_p = 1 n.m.$ dan $\mu_n = 0 n.m.$, sementara dari hasil pengamatan diperoleh bahwa $\mu_p = +2,79 n.m.$ dan $\mu_n = -1,91 n.m.$ (Perkins, 1987 : 193). Hal ini menunjukkan adanya penambahan momen magnetik sering disebut dengan momen magnetik Pauli. Hasil penambahan bagian momen magnetik Pauli kedalam momen magnetik Dirac memunculkan apa yang disebut dengan anomali momen magnetik (K), misalnya untuk proton adalah $K=1,79 n.m.$ Analogi dari nukleon ke inti dalam kasus ini, maka persamaan (2.43) untuk tampang lintang diferensial hamburan elektron berspin oleh inti berspin yang melibatkan hamburan listrik dan magnet menjadi (Hofstadter, 1957 : 248) :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left(1 + \frac{q^2}{2M^2} \left[2(1+K)^2 \tan^2 \frac{1}{2}\theta + K^2\right]\right). \quad (2.44)$$

Persamaan (2.44) dikenal sebagai formula Dirac-Pauli.

2.2.2 Inti Sebagai Partikel Berstruktur

Untuk mendapatkan perumusan faktor struktur setelah diketahuinya persamaan tampang lintang hamburan elektron-inti dengan inti dianggap sebagai partikel titik, maka langkah selanjutnya yang harus dilakukan adalah menentukan persamaan tampang lintang hamburan elektron-inti dengan menganggap inti sebagai partikel berstruktur. Penjabaran tampang lintang hamburan elektron-inti

untuk berbagai keadaan spin elektron maupun spin inti dengan asumsi inti sebagai partikel berstruktur adalah sebagai berikut.

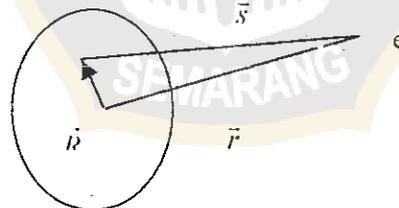
2.2.2.1 Hamburan Elastik Elektron tak ber-spin oleh Inti tak ber-spin

Untuk inti yang diasumsikan berbentuk bola dengan rapat muatan $\rho(R)$ adalah diperlihatkan dalam gambar (2.3). Rapat muatan dalam bentuk $\rho(R)$ ternormalisasi dengan bentuk persamaan (Perkins, 1987 : 187) :

$$\int \rho(R) d^3R = 1. \quad (2.45)$$

dengan rapat muatan didefinisikan (Hofstadter, 1957 : 240) :

$$\rho(R) = \frac{\rho_0}{Ze} \quad (2.46)$$



Gambar 2.3 Inti dianggap berbentuk bola.

Inti dengan muatan yang berstruktur, maka Potensial Coulombnya bukan lagi antar muatan tunggal melainkan antar muatan yang terdistribusi. Oleh karena itu Potensial Coulomb akan memiliki bentuk (Perkins, 1987 : 188) :

$$V(r) = \frac{Ze^2}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{R}) d^3 R}{|\vec{r} - \vec{R}|}. \quad (2.47)$$

Adanya potensial Coulomb berdistribusi dengan bentuk sebagaimana diperlihatkan pada persamaan (2.47), maka amplitudo hamburan yang merupakan elemen matrik dari potensial tersebut akan berbentuk :

$$\begin{aligned} H_{if} &= \frac{Ze^2}{4\pi} \int \int \frac{\rho(\vec{R}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}} d^3 R \operatorname{Re}^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{R})} d^3 r}{|\vec{r} - \vec{R}|} \\ &= \frac{Ze^2}{4\pi} \int \rho(\vec{R}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}} d^3 R \int \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{s}} 2\pi s^2 ds d(\cos\theta)}{s} \end{aligned} \quad (2.48)$$

dengan $\vec{s} = \vec{r} - \vec{R}$ dan θ adalah sudut polar antara \vec{s} dan \vec{q} , dengan \vec{q} adalah vektor alih momentum.

Didefinisikan faktor struktur inti (Hofstadter, 1957 : 240) :

$$F(q^2) = \int \rho(R) e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}} d^3 R, \quad (2.49)$$

sehingga amplitudo hamburan dalam persamaan (2.48) menjadi :

$$\begin{aligned} H_{if} &= \frac{Ze^2}{2} F(q^2) \int \vec{s} d\vec{s} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{s}} d(\cos\theta) \\ &= \frac{Ze^2}{2} F(q^2) \int \frac{\vec{s} d\vec{s} (e^{i\vec{q}\cdot\vec{s}} - e^{-i\vec{q}\cdot\vec{s}})}{iq\vec{s}} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Bentuk integral tersebut sangatlah tidak menguntungkan, karenaampang lintang untuk hamburan dua partikel melalui medan *invers-square-law* menjadi tak berhingga. Dalam kenyataannya, inti dipisahkan pada jarak yang cukup besar dengan elektron-elektron atom. Untuk itu harus dimodifikasi potensial $V(r)$ dengan faktor $e^{-r/a}$, dengan a melambangkan jenis jari-jari atom. Karena $a \gg R$ (dengan faktor $\cong 10^4$), maka dapat dituliskan $e^{-r/a} = e^{-r/a}$, dan persamaan (2.50) menjadi (Perkins, 1987 : 188) :

$$\begin{aligned}
 H_{if} &= \frac{Ze^2}{2iq} F(q^2) \left\{ \int e^{-s(\gamma_a - iq)} ds - \int e^{-is(\gamma_a + iq)} ds \right\} \\
 &= \frac{Ze^2}{iq} F(q^2) \left\{ -\frac{1}{(\gamma_a) - iq} - \frac{1}{(\gamma_a) + iq} \right\} \\
 &= \frac{(Ze^2/2) F(q^2)}{q^2 + (\gamma_a)^2}
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Dituliskan bahwa jika $q < \gamma_a$ yaitu alih momentum yang sangat kecil, maka $M^2 \propto d\sigma/d\Omega$ adalah konstan. Untuk kasus $q \gg \gamma_a$, maka akan didapatkan persamaanampang lintang diferensial :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2 (e^2/4\pi)^2}{q^4} p^2 \frac{W}{M} \frac{p}{p_0} [F(q^2)]^2. \tag{2.52}$$

Dari hasil persamaan (2.52) akan muncul $(W/M) - 1 = q^2/2M^2 \ll 1$, sehingga dapat dituliskan bahwa W/M bernilai 1 (satu) untuk tiap kasus yang sifatnya

sederhana. Dengan asumsi bahwa momentum inti *recoil*, $p' = q \ll p_0$, maka dapat dituliskan yaitu $p = p_0$ dan

$$q^2 = 2p_0^2 - 2p_0^2 \cos \theta = 4p_0^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta, \quad (2.53)$$

sehingga diperoleh :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 (e^2 4\pi)^2 [F(q^2)]^2}{4p_0^2 \sin^4 \frac{1}{2} \theta} \quad (2.54)$$

Karena $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, dan

$$d\Omega = 2\pi d(\cos \theta) = \frac{2\pi dq^2}{2p_0^2}, \quad (2.55)$$

maka persamaan (2.54) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi\alpha^2 Z^2 [F(q^2)]^2}{q^4} \quad (2.56)$$

Persamaan (2.54) dan (2.56) merupakan persamaanampang lintang hamburan elektron oleh inti berstruktur dengan menganggap keduanya tak berspin. Jika

diterapkan untuk inti yang dianggap sebagai titik, maka nilai kecil untuk q^2 mengakibatkan nilai faktor struktur $F(q^2) \approx 1$, sehingga dihasilkanampang lintang diferensial hamburan yang dikenal sebagai formula Rutherford, sebagaimana dalam persamaan (2.37).

2.2.2.2 Hamburan elektron ber-spin oleh inti tak ber-spin

Pada kuadrat alih momentum q^2 yang besar dan inti di pandang memiliki struktur, maka persamaan (2.41) harus dikalikan kembali dengan kuadrat faktor struktur elastik $|F(q^2)|^2$. Diperoleh bentuk tampang lintang diferensial (Hofstadter, 1957 : 241) :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{Z^2 \alpha^2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta |F(q^2)|^2}{4 p_0^2 \sin^4 \frac{1}{2} \theta [1 + (2 p_0 / M) \sin^2 \frac{1}{2} \theta]}, \quad (2.57)$$

atau

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} |F(q^2)|^2. \quad (2.58)$$

2.2.2.3 Hamburan elektron ber-spin oleh inti ber-spin

Persamaan (2.44) telah menjelaskan interaksi dalam hamburan elektron ber-spin oleh inti ber-spin yaitu dengan menganggap bahwa inti adalah sebuah partikel titik.

Struktur proton maupun neutron, sebagaimana inti, diuraikan secara empirik melalui faktor struktur yang sesuai. Faktor struktur akan muncul dalam perumusan tampang lintang diferensial dengan memasukkan efek spin pada

elektron maupun inti sasaran sehingga dari persamaan (2.44) akan diperkirakan bentuk persamaanampang lintang diferensial yang berbentuk (Hofstadter, 1957 : 252) :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Dirac-Pauli} \otimes F^2, \quad (2.59)$$

dengan F adalah bentuk umum faktor struktur untuk hamburan elektron oleh sasaran berspin. Secara eksperimen telah dibuktikan oleh Hofstadter, dkk (1956), sementara perumusannya telah diuraikan sebelumnya oleh Foldy (1952) dan Salzman (1955) yaitu dengan menyajikan suatu bentuk persamaan umum mengenai rapat arus muatan nukleon hingga didapatkan perumusanampang lintangnya. Perumusanampang lintang diferensial tersebut adalah (Hofstadter, 1957 : 252 dan Hofstadter, 1964 : 12) :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left\{ F_1^2(q^2) + \frac{q^2}{2M^2} [2(F_1(q^2) + KF_2(q^2))^2 \tan^2 \frac{1}{2}\theta + K^2 F_2^2(q^2)] \right\}. \quad (2.60)$$

Persamaan (2.60) dikenal sebagai formula Rosenbluth. Modifikasi persamaan (2.43) untuk inti berstruktur sebagai bentuk lain dari persamaan (2.60) dilakukan oleh Berkelman (Hofstadter, 1964 : 48) yaitu :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} (A(q^2) + B(q^2) \tan^2 \frac{1}{2}\theta). \quad (2.61)$$

Pada persamaan (2.61), A dan B merupakan variabel yang mengandung faktor struktur listrik dan magnet yang dapat ditentukan dengan memplotkan antara rasioampang lintang dengan alih momentum ataupun dengan memvariasikan sudut hambur.

2.3 INTI DEUTRIUM

Inti deuterium merupakan inti sederhana namun dikatakan lengkap. Hal ini disebabkan karena deuterium tersusun oleh dua buah nukleon dari dua jenis nukleon yaitu satu proton dan satu neutron. Nukleon dari inti deuterium disebut juga *deuteron*. Meskipun deuteron merupakan isotop hidrogen, namun deuteron adalah inti stabil. Deuteron adalah inti yang hanya memiliki satu *state* energi yaitu *state* dasar (*ground state*) dan dia tidak memiliki *state* eksitasi (*excited state*). Deuteron memiliki energi ikat yang mengikat proton dan neutron sebesar $E_B = 2,22$ MeV. Spin deuteron pada *ground state* adalah satu ($J = 1$), paritas dari fungsi gelombang *ground state* adalah positif ($\pi = +$), dan isospinnya bernilai nol ($T = 0$).

Paritas deuteron hanya ditentukan oleh fungsi gelombang orbital gerak relatif antara proton dengan neutron. Di dalam *state*, momentum anguler orbital tergantung dari fungsi gelombang $Y_{LM}(\theta, \phi)$ yang merupakan harmonik sferik orde L . dibawah inversi sistem koordinat, transformasi dari harmonik sferik akan berbentuk (Wong, 1990 : 67) :

$$Y_{LM}(\theta, \phi) \xrightarrow{p} Y_{LM}(\pi - \theta, \pi - \phi) = (-1)^L Y_{LM}(\theta, \phi), \quad (2.62)$$

sehingga paritas dari $Y_{LM}(\theta, \phi)$ adalah $(-1)^L$. karena diketahui bahwa paritas deutron adalah positif, maka momentum anguler orbital L haruslah merupakan bilangan genap ($L = 0, 2, \dots$).

Momentum anguler spin S deutron merupakan spin intrinsik dua buah nukleon. Karena spin intrinsik proton maupun spin intrinsik neutron adalah sama yakni bernilai setengah ($s_p = \frac{1}{2}, s_n = \frac{1}{2}$), maka kemungkinan spin deutron adalah $S = 0$ atau $S = 1$. Momentum anguler total hasil kopling momentum anguler orbital dan spin dirumuskan :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} . \quad (2.63)$$

Karena pada deutron $J=1$ dan L harus bilangan genap, maka didapat $S \neq 0$. Oleh karena itu spin intrinsik deutron yang paling mungkin adalah $S=1$.

Dengan diketahuinya spin total J dan momentum anguler spin S deutron, maka dapat diketahui pula nilai dari momentum anguler orbitalnya yang merupakan bilangan genap. Dari persamaan (2.63) diperoleh :

$$J = L \pm S . \quad (2.64)$$

Karena $J=1$ dan $S=1$, maka diperoleh dua nilai momentum anguler orbital yaitu $L=0$ dan $L=2$.

Hasil tersebut memberikan gambaran bahwa dalam *ground state*-nya, deuteron memiliki dua komponen *state*, untuk komponen *state* dengan $(S, L) = (1, 0)$ dalam notasi spektroskopik dituliskan 3S_1 (*state triplet-S*) dan untuk $(S, L) = (1, 2)$ dituliskan 3D_1 (*state triplet-D*).

Fungsi gelombang *ground state* deuteron merupakan fungsi gelombang paduan dari kedua komponen *state* dalam *ground state* (Eisenberg, 1972 : 21):

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left[\frac{u(r)}{r} + \sqrt{\frac{1}{8}} S_{12} \frac{w(r)}{r} \right] \chi_m, \quad (2.65)$$

dengan $u(r)$ merupakan komponen radial dari fungsi gelombang *state* 3S_1 , dan $w(r)$ adalah komponen radial dari fungsi gelombang *state* 3D_1 . Normalisasi fungsi gelombang kedua *state* berbentuk :

$$\int_0^\infty (u^2(r) + w^2(r)) dr = 1, \quad (2.66)$$

χ_m adalah fungsi spin triplet, dengan $m=0, \pm 1$ dan S_{12} dirumuskan (Jankus, 1957 : 1587):

$$S_{12} \equiv 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2, \quad (2.67)$$

yaitu sebuah operator tensor.