BAB II

DASAR TEORI

2.1 Nilai Eigen dan Syarat Batas

Nilai eigen sangat penting dalam banyak persoalan fisika. Misalnya, kestabilan pesawat udara ditentukan oleh lokasi dalam bidang kompleks dari nilai eigen matriks tertentu. Frekuensi alamiah dari getaran berkas sinar sebenarnya merupakan nilai eigen dari suatu matriks (tak berhingga). Nilai eigen juga terdapat dalam analisis dari banyak persoalan matematik karena mereka merupakan bagian yang mudah dan jelas untuk menyajikan suatu matriks. Karena alasan ini, maka setiap sistem persamaan diferensial linear biasa orde pertama dengan koefisien-koefisien yang konstan dapat diselesaikan dengan koefisien-koefisien konstan, yang dinyatakan dalam nilai eigen dari matriks koefisiennya. Juga perilaku barisan $A, A^2, A^3, \ldots,$ dari pangkat matriks paling mudah dapat dianalisis dalam nilai eigen dari A. Barisan semacam itu terdapat dalam penyelesaian iterasi dari sistem persamaan linear dan nonlinear (Conte, 1992).

Dikatakan bahwa bilangan (nyata atau kompleks) λ merupakan suatu nilai eigen dari matriks B, jika untuk vektor y (nyata atau kompleks) tertentu yang tidak nol, terdapat

$$By = \lambda y. \tag{2.1}$$

Vektor-n y lalu disebut suatu vektor eigen dari B yang merupakan bagian dari nilai eigen λ. Persamaan (2.1) dapat ditulis dalam bentuk

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

$$(B - \lambda I)\, y = 0. \tag{2.2}$$

Karena y harus merupakan suatu vektor yang bukan nol, maka terlihat bahwa λ merupakan suatu nilai eigen dari B jika dan hanya jika sistem homogen dan (2.1) mempunyai penyelesaian tak trivial (Conte, 1992).

Sebuah persoalan nilai batas akan memerlukan pemecahan sebuah persamaan diferensial atau sistem di dalam suatu daerah R, yang memenuhi berbagai tambahan pada batas dari R. Pemakaian-pemakaian akan menghasilkan sangat banyak macam persoalan seperti itu. Persoalan dua titik syarat batas dari persamaan diferensial biasa akan melibatkan sebuah persamaan diferensial orde kedua, sebuah syarat permulaan dan sebuah syarat terminal, yakni:

$$y'' = f(x, y, z), \qquad y(a) = A, \qquad y(b) = B. \tag{2.3}$$

Di sini, daerah R tak lain daripada interval (a,b) dan batasnya terdiri dari dua titik ujung. Sebuah persoalan klasik dari persamaan parsial adalah persoalan Dirichlet, yang mengharuskan bahwa persamaan Laplace

$$T_{xx} + T_{yy} = 0 \tag{2.4}$$

dipenuhi di dalam suatu daerah R dari bidang xy dan bahwa $T(x, y)$ mempunyai nilai-nilai tertentu pada batas dari R (Scheid, 1992).

2.2 Persamaan Diferensial Orde II

Biasanya persamaan diferensial dibagi dalam dua kelas besar yaitu persamaan linear dan persamaan nonlinear. Sedangkan pada persamaan diferensial linear

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

terdapat persamaan homogen dan nonhomogen. Ada dua alasan utama untuk mengkonsentrasikan persamaan pada orde dua. Pertama, karena persamaan orde dua mempunyai aplikasi penting dalam Fisika misalnya mekanika dan dalam teori rangkaian listrik. Kedua, teorinya khas dan sederhana (Kreyszig, 1993).

Banyak dari permasalahan fisika yang penting dan berbentuk linear dapat diselesaikan dengan persamaan diferensial. Adapun bentuk persamaan diferensial orde kedua non homogen adalah :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2(x)y = S(x) \tag{1.1}$$

dengan S adalah sebuah bentuk non homogen dan k adalah bilangan kompleks sehingga k^2 merupakan sebuah fungsi real.

Ketika k^2 positif maka solusi dari persamaan homogen $(S = 0)$ adalah osilator harmonis (sinusoida) dengan bilangan lokal k, sedangkan ketika k^2 negatif maka solusinya berupa pertumbuhan/peluruhan eksponensial pada bilangan lokal $(-k^2)^{\frac{1}{2}}$ (Koonin, 1986).

Lebih lanjut persamaan diferensial yang muncul dalam Fisika, tidaklah amat rumit dan tertentu bentuknya. Namun demikian kadang-kadang penyelesaian secara analitik tidak dapat dilakukan dan analisis numerik terpaksa harus dipakai (Soedojo, 1995).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

2.3 Algoritma Numerov

Metode khusus yang sederhana untuk menyelesaikan persamaan (1.1) adalah dengan Numerov atau metode Cowling. Dengan memperkirakan turunan keduanya untuk tiga nilai yang berbeda :

$$y'' \approx \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \tag{2.5}$$

dengan y'' adalah turunan kedua dari fungsi yang digunakan, y_{-1} adalah fungsi pada beda hingga mundur, y_0 adalah fungsi pada beda hingga tengah, y_1 adalah fungsi pada beda hingga maju, h adalah besarnya lebar langkah yang diambil, sehingga

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = y_n'' + \frac{h^2}{12} y_n'''' + O(h^4) \tag{2.6}$$

bentuk error $O(h^2)$ dapat ditulis secara eksplisit yang didapatkan dari ekspansi Taylor yang berbentuk

$$y(x) = y_0 + xy' + \frac{x^2}{2!} y'' + \frac{x^3}{3!} y''' + \ldots \tag{2.7}$$

$$y_{\pm 1} = y(x = \pm h) = y_0 \pm hy' + \frac{h^2}{2} y'' \pm \frac{h^3}{6} y''' + O(h^4). \tag{2.8}$$

Dari persamaan diferensial itu sendiri akan didapatkan

$$y_n'''' = \frac{d^2}{dx^2}\left(-k^2 y + S\right)\Big|_{x=x_n}$$

$$= \frac{-(k^2 y)_{n+1} - 2(k^2 y)_n + (k^2 y)_{n-1}}{h^2} + \frac{S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}}{h^2} + O(h^2). \tag{2.9}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

Jika disubstitusikan ke dalam persamaan (2.6) maka setelah beberapa pengaturan akan dapat ditulis menjadi (Koonin, 1986)

$$\left(1+\frac{h^2}{12}k^2{}_{n+1}\right)y_{n+1}-2\left(1-\frac{5h^2k_n{}^2}{12}\right)y_n+\left(1+\frac{h^2k_{n-1}{}^2}{12}\right)y_{n-1}=$$

$$\frac{h^2}{12}(S_{n+1}+10S_n+S_{n-1})+O(h^6). \qquad (2.10)$$

Jika nilai $k = 0$ maka persamaan (2.10) akan menjadi:

$$y_{n+1}=2y_n-y_{n-1}+\frac{h^3}{12}(S_{n+1}+10S_n+S_{n-1})+O(h^6) \qquad (2.10a)$$

sedangkan bila nilai S yang bernilai nol maka akan didapatkan persamaan:

$$y_{n+1}=\frac{1}{1+\frac{h^2}{12}k_{n+1}^2}\left\{2\left(1-\frac{5h^2}{12}k_n^2\right)y_n-\left(1+\frac{h^2}{12}k_{n-1}^2\right)y_{n-1}\right\}+O(h^6). \qquad (2.10b)$$

2.4 Contoh permasalahan

Ada tiga contoh permasalahan syarat batas dan nilai eigen yang akan dicoba untuk diselesaikan. Permasalahan-permasalahan itu adalah potensial elektrostatik pada sebuah muatan bola, aliran panas pada sebuah batang logam atau plat, dan partikel bebas dalam sebuah kotak satu dimensi .

2.4.1 Potensial elektrostatik pada sebuah muatan bola

Pada kasus persamaan non homogen akan dicoba mencari potensial elektrostatik Φ yang dihasilkan oleh distribusi muatan lokal $\rho(r)$ yang mengikuti persamaan Poisson:

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho\,. \tag{2.11}$$

Untuk sebuah simetri bola ρ dan Φ disederhanakan menjadi

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d\Phi}{dr}\right] = -4\pi\rho\,. \tag{2.12}$$

Substitusi standar $\Phi(r) = r^{-1}\varphi(r)$ (2.13)

sehingga dihasilkan: $\dfrac{d^2\varphi}{dr^2} = -4\pi r\rho$ (2.14)

dimana dari bentuk persamaan (1.1) dengan $k^2 = 0$ dan $S = -4\pi r\rho$. Ini merupakan contoh untuk mencari syarat batas dengan menjadikan harga $k(x) = 0$. Sebagai ilustrasi konkret dari permasalahan nilai batas dengan mencoba untuk mengatasi persamaan Poisson (2.11) ketika distribusi muatan

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi}e^{-r}\,. \tag{2.15}$$

yang mempunyai muatan total

$$Q = \int \rho(r)d^3r = \int_0^\infty \rho(r)4\pi r^2 dr = 1\,. \tag{2.16}$$

Sehingga penyelesaian analitik untuk permasalahan ini adalah (Koonin, 1986)

$$\varphi(r) = 1 - 1/2(r+2)e^{-r}\,. \tag{2.17}$$

2.4.2 Aliran panas pada sebuah batang logam atau plat

Persamaan aliran panas adalah

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,. \tag{2.18}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

Dengan u adalah temperatur dan α^2 adalah sebuah konstanta karakteristik dari materi saat panas mengalir. Sedangkan bagian radial dari persamaan (2.18) berbentuk

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \qquad \text{atau} \qquad \frac{d^2F}{dx^2} + k^2 F = 0 . \tag{2.19}$$

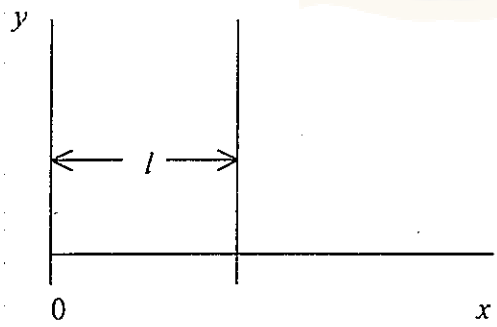
(Untuk permasalahan satu dimensi, F hanya sebagai fungsi x).

Penyelesaian analitik dari (2.19) adalah

$$F(x) = \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases} . \tag{2.20}$$

Dapat dibandingkan aliran panas yang melalui plat dengan ketebalan l. Diasumsikan bahwa permukaan plat sangat luas sehingga dapat diabaikan beberapa hal dan menganggap bahwa aliran panas hanya pada jarak x (lihat gambar 2.2).

Permasalahan ini identik dengan aliran panas pada batang logam yang disekat dengan panjang l yang juga terjadi hanya pada jarak x. Anggap plat terjadi pada distribusi suhu *steady state* pada $x = 0$ suhu 0° dan $x = l$ suhu 100°. Pada saat $t = 0$ dan $x = l$ suhu pada dinding (seperti suhu pada dinding $x = 0$) 0°. Nantinya akan didapatkan distribusi suhu sepanjang sumbu x.



Gambar 2.2 Aliran panas yang terjadi pada batang logam dengan $x = 0$ dan $x = l$ pada suhu 0° hingga 100° (Boas, 1983).

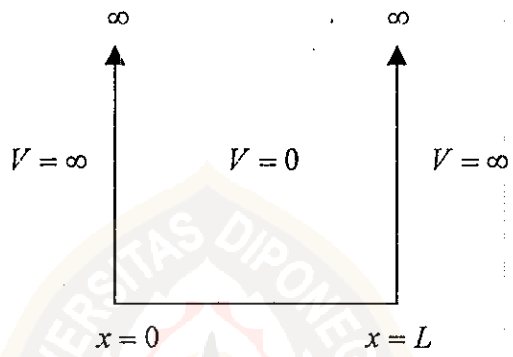
This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

2.4.3 Partikel bebas dalam sebuah kotak satu dimensi

Bila ditinjau sebuah partikel yang bergerak bebas dalam sebuah kotak satu dimensi yang panjangnya L maka potensialnya dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$V(x) = 0 \qquad 0 \le x \le L$$

$$= \infty \qquad x < 0, x > L. \tag{2.21}$$



Gambar 2.3 Sebuah partikel yang bergerak bebas dalam suatu daerah satu dimensi $0 \le x \le L$; daerah $x < 0$ dan $x > L$ diabaikan.

Persamaan Schrödinger waktu-bebas satu dimensi, yaitu :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \tag{2.22}$$

dengan potensial yang sesuai $(V = 0)$ maka persamaan di atas menjadi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \tag{2.23}$$

atau

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi \tag{2.24}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

dengan $$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \qquad (2.25)$$

Persamaan Schrödinger harus diterapkan secara terpisah pada daerah di dalam dan di luar kotak. Jika diterapkan persamaan (2.22) bagi daerah diluar kotak, bila $V \to \infty$ dengan mensyaratkan $\psi = 0$, sehingga $V\psi$ tidak akan menjadi takhingga. Jika kedua dinding kotak benar-benar tegar, maka partikel akan selalu berada dalam kotak, sehingga probabilitas untuk menemukan partikel di luar kotak tentulah nol. Untuk membuat probabilitasnya nol di luar kotak, harus diambil $\psi = 0$ di luar kotak sehingga akan diperoleh

$$\psi(x) = 0 \qquad x < 0, x > L. \qquad (2.26)$$

Persamaan Schrödinger untuk $0 \le x \le L$, bila $V(x) = 0$ memiliki pemecahan : (Krane, 1992)

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx \qquad (0 \le x \le L). \qquad (2.27)$$

2.5 Bahasa Pemrograman Borland Delphi 6.0

Ide munculnya Delphi sebenarnya berasal dari bahasa pemrograman yang cukup terkenal, yaitu Pascal. Turbo Pascal yang muncul pertama kali hanya dapat dijalankan di sistem operasi DOS. Namun dalam perkembangan selanjutnya, Borland International juga merilis Turbo Pascal yang berjalan di Windows 3.X, yaitu Turbo Pascal For Windows.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

Karena pemrograman Windows dengan Borland Pascal masih dirasa cukup sulit maka sejak tahun 1993 Borland International mengembangkan bahasa Pascal yang bersifat visual. Hasil dari pengembangan ini adalah dirilisnya Delphi 1 pada tahun 1995 (Pranata, 2000).

Program Delphi yang digunakan adalah Delphi 6.0 yang merupakan perangkat pengembang untuk membangun program aplikasi berbasis Windows 95 atau NT.

Delphi 6.0 dikembangkan dengan melanjutkan apa yang sudah dikerjakan pada versi-versi Delphi sebelumnya yaitu penambahan fasilitas-fasilitas sehingga mempermudah pengembangan aplikasi, dengan cara mengurangi pengetikan sehingga pengguna dapat berkonsentrasi pada apa yang akan dibuat bukan pada bagaimana cara membuatnya.

Sejak kelahirannya, keluarga Delphi mendapat julukan RAD (kependekan dari *Rapid Application Development*), yaitu perangkat pengembang yang mampu dengan mudah dan cepat menghasilkan program aplikasi. Dengan Delphi 6.0 dapat dibangun suatu program aplikasi dalam tatanan GUI (*Graphical User Interface*). Program aplikasi yang telah menerapkan GUI dalam Delphi ini banyak menggunakan perantara untuk berinteraksi dengan pemakai (Pramono, 1998).

Pada dasarnya lingkungan pengembangan terpadu (*IDE / Integrated Development Environment*) milik Delphi dibagi menjadi enam bagian utama, yaitu Menu, Speed Bar, Component Palette, Form Designer, Code Editor, dan Object Inspector.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

- Menu

  Menu pada Delphi memiliki kegunaan seperti menu pada aplikasi Windows lainnya. Dari menu ini, program dapat dipanggil atau disimpan, dijalankan dan dilacak bug program, dsb. Singkatnya segala sesuatu yang berhubungan dengan IDE Delphi, dapat dilakukan dari menu.

- Speed Bar

  Speed Bar atau sering juga disebut toolbar berisi kumpulan tombol yang tidak lain adalah pengganti beberapa item menu yang sering digunakan. Dengan kata lain, setiap tombol pada Speed Bar menggantikan salah satu item menu. Sebagai contoh, tombol kiri atas adalah pengganti menu File | New, tombol di sebelah kanannya adalah pengganti menu File | Open, dst.

- Component Palette

  Component Palette berisi kumpulan ikon yang melambangkan komponen-komponen pada VCL (*Visual Component Library*). VCL merupakan pustaka komponen yang dengannya kita dapat membangun aplikasi.

- Form Designer

  Sesuai dengan namanya, Form Designer merupakan tempat merancang jendela dari aplikasi Windows. Perancangan form dilakukan dengan meletakkan komponen-komponen yang diambil dari Component Palette.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)

- Code Editor

  Code Editor adalah tempat menuliskan program. Disini diletakkan pernyataan-pernyataan dalam bahasa Object Pascal. Yang perlu diperhatikan pada Code Editor adalah kode sumber tidak perlu dituliskan seluruhnya. Delphi telah menuliskan semacam kerangka untuk pengguna.

- Object Inspector

  Object Inspector digunakan untuk mengubah karakteristik sebuah komponen. Pada Object Inspector ada dua tab yaitu Properties dan Events yang dapat diaktifkan salah satunya dengan mengklik teks Properties atau Events (Pranata, 2000).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purposes of security, back-up and preservation. (http://eprints.undip.ac.id)